MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2019/2020 – Prof. C. Presilla
Prova A5 – 9 settembre 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Un sistema unidimensionale è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = K + V, \qquad K = ap^2, \qquad V = bq^4, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

essendo q e p gli operatori canonici di posizione e impulso. Dimostrare che in ogni autostato $|\psi\rangle$ di H risulta $\langle\psi|K|\psi\rangle = 2\langle\psi|V|\psi\rangle$.

[punteggio 4]]

---

2 Sia $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_1$ e $\boldsymbol{J}_2$ operatori di momento angolare. Dimostrare che per i coefficienti di Clebsch-Gordan risulta

$$C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2} \equiv \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle = 0, \qquad \text{se } m \neq m_1 + m_2,$$

dove j_1, m_1, j_2, m_2 e j, m sono, rispettivamente, i numeri quantici di J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z} e J^2, J_z.

[punteggio 4]

---

3 Al tempo t_0 un sistema è descritto dall'operatore densità $\rho(t_0)$. Qual'è la condizione che ci dice se il sistema si trova in uno stato puro o miscela? Può uno stato puro (miscela) diventare uno stato miscela (puro) a un successivo tempo t? Portare un esempio o dimostrare quanto si afferma.

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi lungo una circonferenza di raggio a. Considerando che la particella non è soggetta ad altre forze esterne ad eccezione del vincolo, il suo moto lungo la circonferenza è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\theta^2},$$

dove la variabile angolare θ misura la posizione della particella rispetto a un raggio di riferimento. Osservando che le autofunzioni fisicamente accettabili devono essere periodiche in θ, determinare:
1) gli autovalori e le autofunzioni dell'energia della particella;
2) la degenerazione di questi autovalori;
3) la probabilità di misurare l'energia dello stato fondamentale quando la particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\begin{cases} e^{-\mathrm{i}\pi}, & 0 \le \theta \le \pi, \\ 0, & \pi < \theta \le 2\pi; \end{cases}$$

4) la variazione al primo ordine in λ del livello fondamentale dell'energia e del primo eccitato nel caso in cui venga aggiunta la perturbazione $V(\theta) = \lambda \sin\theta\cos\theta$.

[punteggio 7]

---

5 Una particella di spin 1/2 si trova in uno stato $|\psi\rangle$ in cui il valore di aspettazione di S_x è $\alpha\hbar/2$ e quello di S_y è $\beta\hbar/2$ con $-1 \le \alpha, \beta \le 1$. Mostrare che:
1) deve necessariamente aversi $\alpha^2 + \beta^2 \le 1$;
2) lo stato $|\psi\rangle$ è unico se $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ mentre di stati $|\psi\rangle$ ne esistono due se $\alpha^2 + \beta^2 < 1$.
3) Calcolare le probabilità di ottenere i valori $\pm\hbar/2$ in una misura di S_z quando la particella si trova nello stato $|\psi\rangle$ corripondente al caso $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

[punteggio 7]

---

6 Un gas ideale di N particelle identiche è descritto dall'Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = ap^{3/2} + bq^2, \qquad q = |\boldsymbol{q}|, \quad p = |\boldsymbol{p}|, \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,$$

dove a, b sono costanti positive. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) la funzione di partizione $Z(T)$;
2) l'energia media $E(T)$ del gas.
3) Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, determinarne l'energia di Fermi ϵ_F.

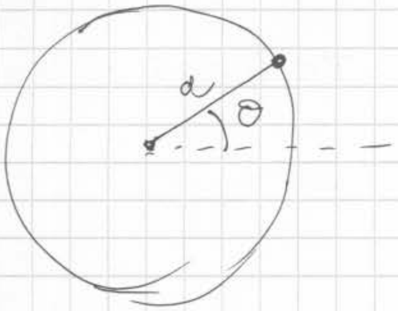
[punteggio 7]

Esercizio (1) vedi Es. 1 del 15. 07. 2019

Esercizio (2) vedi Es. 2 del 28.01.2020

Esercizio (3) vedi Es. 3 del 29. 01. 2019

Esercizio 4



$$H = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

$$H\varphi = E\varphi$$

$$\varphi''(\theta) = -k^2\varphi(\theta) \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2ma^2E}}{\hbar} > 0$$

soluzioni lin. indipendenti $\varphi(\theta) = e^{\pm ik\theta}$

Imponendo che $\varphi(\theta) = \varphi(\theta + 2\pi)$ abbiamo $e^{\pm ik2\pi} = 1$

cioè $k = 0, 1, 2, \dots$

$$E = E_{\pm k} = \frac{\hbar^2}{2ma^2}k^2$$

Per $k \neq 0$ il livello $\frac{\hbar^2k^2}{2ma^2}$ è doppiamente degenere

con autofunzioni $\varphi_{+k}(\theta) = c\, e^{ik\theta}$ $\quad \varphi_{-k}(\theta) = c\, e^{-ik\theta}$

la costante di normalizzazione c è data da

$$1 = \int_0^{2\pi} |\varphi_{\pm k}(\theta)|^2 d\theta = |c|^2 2\pi \quad \text{ad esempio } c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

lo stato fondamentale $k=0$ $E_0 = 0$ è non degenere

e $\varphi_0(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Si osservi che le autofunzioni $\varphi_{\pm k}(\theta)$ possono anche essere scelte reali

$$\varphi_{+k}(\theta) \sim e^{ik\theta} + e^{-ik\theta} \sim \cos(k\theta)$$

$$\varphi_{-k}(\theta) \sim e^{ik\theta} - e^{-ik\theta} \sim \sin(k\theta)$$

Si osservi che $\psi(\theta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \begin{cases} e^{-i\theta} & 0 \le \theta \le \pi \\ 0 & \pi < \theta \le 2\pi \end{cases}$

è normalizzato, infatti

$$\int_0^{2\pi} |\psi(\theta)|^2 d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} d\theta = 1$$

Pertanto la probabilità di trovare il valore $E_0 = 0$ in una misura di energia stante il sistema nello stato ψ è

$$p_0 = |\langle \psi | \varphi_0 \rangle|^2 = \left| \int_0^{2\pi} \overline{\psi(\theta)}\, \varphi_0(\theta) d\theta \right|^2$$

$$= \left| \int_0^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{i\theta} d\theta \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi^2} \left| \frac{e^{i\theta}}{i} \Big|_0^{\pi} \right|^2 = \frac{1}{2\pi^2} \left| \frac{e^{i\pi} - 1}{i} \right|^2 = \frac{2}{\pi^2}$$

In presenza della perturbazione

$$V(\theta) = \lambda \sin\theta \cos\theta = \frac{\lambda}{2} \sin 2\theta$$

al primo ordine in λ l'autovalore non degenere E_0 diventa $E_0 + \Delta E_0$ con

$$\Delta E_0 = \langle \varphi_0 | V | \varphi_0 \rangle = \frac{\lambda}{2} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(2\theta) d\theta = 0$$

Il primo livello eccitato $E_1 = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ è doppiamente degenere pertanto al primo ordine in λ le correzioni a E_1 sono determinate dagli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_1 | V | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_1 | V | \varphi_{-1} \rangle \\ \langle \varphi_{-1} | V | \varphi_1 \rangle & \langle \varphi_{-1} | V | \varphi_{-1} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \varphi_1 | V | \varphi_1 \rangle = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{i\theta}} \sin(2\theta) e^{i\theta} d\theta = 0$$

$$\langle \varphi_{-1} | V | \varphi_{-1} \rangle = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{-i\theta}} \sin(2\theta) e^{-i\theta} d\theta = 0$$

$$\langle \varphi_{-1} | V | \varphi_1 \rangle = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{e^{-i\theta}} \sin(2\theta) e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{8\pi i}\int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\left(e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}\right) d\theta$$

$$= \frac{\lambda}{8\pi i}\left(\frac{e^{8\pi i} - 1}{4i} - 2\pi\right) = i\frac{\lambda}{4}$$

$$\langle \varphi_1 | V | \varphi_{-1} \rangle = \overline{\langle \varphi_{-1} | V | \varphi_1 \rangle} = -i\frac{\lambda}{4}$$

La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -i\frac{\lambda}{4} \\ i\frac{\lambda}{4} & 0 \end{pmatrix}$ ha autovalori $\pm\frac{\lambda}{4}$

quindi il livello E_1 si splitta in

$E_1 + \frac{\lambda}{4}$ e $E_1 - \frac{\lambda}{4}$

Esercizio 5

Siano $|\pm\rangle_z$ gli autostati di S_z : $S_z|\pm\rangle_z = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_z$

Nella base $|\pm\rangle_z$ abbiamo

$$|\psi\rangle = a\,|+\rangle_z + b\,|-\rangle_z \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Possiamo scegliere $a > 0$ e $b = |b|e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

La condizione di normalizzazione impone

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = a^2 + |b|^2$$

da cui $|b| = \sqrt{1-a^2}$

Le condizioni sui valori di aspettazione di S_x e S_y danno

$$\langle S_x\rangle = \frac{\hbar}{2}(\bar{a}\ \bar{b})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}(\bar{a}b + a\bar{b})$$

$$= \frac{\hbar}{2}\,a\sqrt{1-a^2}\;2\cos\theta = \frac{\hbar}{2}\,\alpha$$

$$\langle S_y\rangle = \frac{\hbar}{2}(\bar{a}\ \bar{b})\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}i(\bar{a}b - a\bar{b})$$

$$= \frac{\hbar}{2}\,a\sqrt{1-a^2}\;2\sin\theta = \frac{\hbar}{2}\,\beta$$

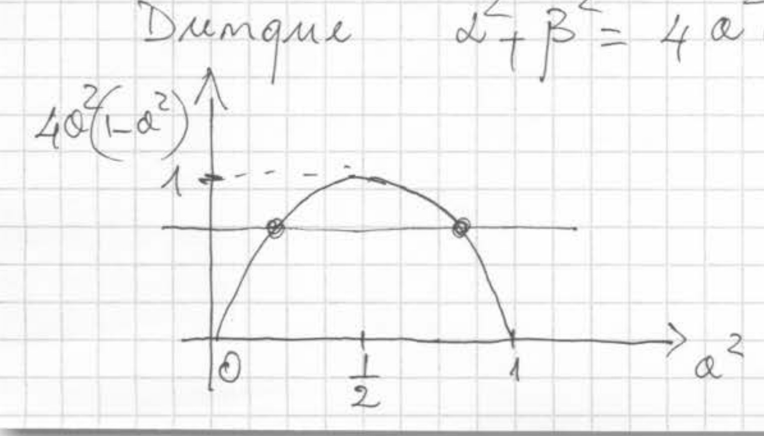
cioè

$$\alpha^2 = a^2(1-a^2)\,4\cos^2\theta$$

$$\beta^2 = a^2(1-a^2)\,4\sin^2\theta$$

Si noti che $\theta = \theta(\alpha,\beta)$ è fissato in modo univoco dai valori di α e β

Dunque $\alpha^2 + \beta^2 = 4a^2(1-a^2)$



Risulta $\alpha^2+\beta^2 \leq 1$

$\alpha^2+\beta^2=1$ è ottenuto per un solo valore di a

$a^2=\frac{1}{2}$ cioè $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$0\leq\alpha^2+\beta^2<1$ è ottenuto per due valori di a

quelli soluzione dell'eq. $4a^4-4a^2+\alpha^2+\beta^2=0$

$$a^2=\frac{+2\pm\sqrt{4-4(\alpha^2+\beta^2)}}{4}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}$$

$$a=\sqrt{\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{1-(\alpha^2+\beta^2)}}$$

Per $\alpha^2+\beta^2=1$ cioè $a=\sqrt{\frac{1}{2}}$ lo stato $|\psi\rangle$ è

$$|\psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_z+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}|-\rangle_z$$

La probabilità di misurare $S_z=\pm\frac{\hbar}{2}$ è

$$p_\pm=\left|\langle\psi|\pm\rangle_z\right|^2=\frac{1}{2}$$

Esercizio 6

$$H(\underline{p},\underline{q}) = a\, p^{3/2} + b\, q^2 \qquad \underline{p},\underline{q} \in \mathbb{R}^3 \quad p = |\underline{p}| \quad q = |\underline{q}|$$

$a, b > 0$

$$Z = Z_1^N$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int d\underline{q} \int d\underline{p}\; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^3} \int_0^\infty 4\pi q^2 dq\, e^{-\beta b q^2} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp\, e^{-\beta a p^{3/2}}$$

$$= \frac{1}{h^3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} dq_x\, e^{-\beta b q_x^2} \right)^3 \int_0^\infty 4\pi p^2 dp\, e^{-\beta a p^{3/2}}$$

$$\beta a p^{3/2} = u$$

$$\frac{3}{2} \beta a p^{1/2} dp = du$$

$$p^2 dp = p^{3/2} p^{1/2} dp = \frac{2}{3\beta^2 a^2}\, u\, du$$

$$= \frac{1}{h^3} \left(\sqrt{\frac{\pi}{\beta b}} \right)^3 4\pi \frac{2}{3\beta^2 a^2} \int_0^\infty u\, e^{-u}\, du$$

$$= \frac{1}{h^3} \frac{\pi^{3/2}}{\beta^{3/2} b^{3/2}}\, 4\pi\, \frac{2}{3\beta^2 a^2} \quad 1$$

$$= \frac{8\, \pi^{5/2}}{3\, h^3 a^2 b^{3/2}}\, \beta^{-7/2}$$

$$E = -N \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1 = +N \frac{7}{2} \frac{1}{\beta} = N \frac{7}{2} k_B T$$

Allo stesso risultato si giunge con il teorema di equipartizione

$$\langle a p_x^{3/2} \rangle = \langle a p_y^{3/2} \rangle = \langle a p_z^{3/2} \rangle = \frac{2}{3} k_B T$$

$$\langle b q_x^2 \rangle = \langle b q_y^2 \rangle = \langle b q_z^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$$

$$\frac{E}{N} = 3 \; \frac{2}{3} k_B T + 3 \; \frac{1}{2} k_B T = \frac{7}{2} k_B T$$

Numero di stati di singola particella con energia $\leq \varepsilon$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2}{h^3} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; \theta\left(\varepsilon - H(\underline{q}, \underline{p})\right)$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^{\sqrt{\varepsilon/b}} 4\pi q^2 dq \int_0^{\left(\frac{\varepsilon - b q^2}{a}\right)^{2/3}} 4\pi p^2 dp$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^{\sqrt{\varepsilon/b}} 4\pi q^2 dq \quad \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\varepsilon - b q^2}{a}\right)^2$$

$$= \frac{2}{h^3} \frac{16\pi^2}{3a^2} \int_0^{\sqrt{\varepsilon/b}} q^2 \left(\varepsilon^2 + b^2 q^4 - 2\varepsilon b q^2\right) dq$$

$$= \frac{32\pi^2}{h^3 3a^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{3} \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{3/2} + \frac{b^2}{7} \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{7/2} - \frac{2\varepsilon b}{5} \left(\frac{\varepsilon}{b}\right)^{5/2} \right)$$

$$= \frac{32\pi^2}{h^3 3a^2} \; \varepsilon^{7/2} \left(\frac{1}{3 b^{3/2}} + \frac{1}{7 b^{3/2}} - \frac{2}{5 b^{3/2}} \right)$$

$$= \frac{32\pi^2}{h^3 3a^2 b^{3/2}} \; \varepsilon^{7/2} \; \frac{35 + 15 - 42}{105}$$

$$= \frac{256}{315} \; \frac{\pi^2}{h^3 a^2 b^{3/2}} \; \varepsilon^{7/2}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N$$

$$\varepsilon_F = \left(\frac{315}{256} \; \frac{h^3 a^2 b^{3/2}}{\pi^2} N \right)^{2/7}$$