MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2017/2018 – Prof. C. Presilla
Prova A4 – 10 luglio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Per sistemi con un numero finito di gradi di libertà, le trasformazioni degli operatori canonici q_k, p_k

$$q_k \mapsto \tilde{q}_k, \quad p_k \mapsto \tilde{p}_k, \qquad \tilde{q}_k^\dagger = \tilde{q}_k, \quad \tilde{p}_k^\dagger = \tilde{p}_k, \qquad k = 1, \dots, N,$$

sono regolate dal teorema di von Neumann. Enunciarlo, spiegando il significato dei termini usati.

[punteggio 4]

---

2 Sia $\boldsymbol{L} = (L_x, L_y, L_z)$ un operatore di momento angolare. Quanto valgono i valori di aspettazione di L_x e L_y in un autostato $|l, m\rangle$ di L^2 e L_z? Nello stesso stato, quali valori potrebbe fornire una misura di L_x e L_y?

[punteggio 4]

---

3 Un sistema quantistico si trova in uno stato descritto dall'operatore matrice densità ρ. Come si fa a stabilire se lo stato in questione è uno stato puro o miscela? All'equilibrio termico il sistema si troverà in uno stato puro o in uno stato miscela?

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m e spin 1/2, vincolata in una dimensione, è descritta dalla Hamiltoniana

$$H = H_0 + \omega S_z, \qquad H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

Posto $H_0|n\rangle = (n + 1/2)\hbar\omega|n\rangle$ e $S_z|\pm\rangle = \pm(\hbar/2)|\pm\rangle$, con $|n\rangle$ e $|\pm\rangle$ stati normalizzati,
1) determinare lo spettro di H inclusa la degenerazione.
2) Sia $|\psi(0)\rangle = C(|0\rangle|-\rangle + \sqrt{3}|1\rangle|+\rangle)$ lo stato del sistema al tempo $t = 0$, determinare la costante di normalizzazione C e lo stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$.
Sia A un operatore che agisce solo sulla parte spaziale nel seguente modo:

$$A|0\rangle = \mathrm{i}\sqrt{2}|1\rangle, \qquad A|1\rangle = -\mathrm{i}\sqrt{2}|0\rangle, \qquad A|n\rangle = |n\rangle, \quad n \geq 2.$$

3) Dimostrare che A è una osservabile.
4) Determinare i risultati di una misura di A al tempo t e le relative probabilità.

[punteggio 7]

5 Due particelle di spin 1/2, non identiche, sono descritte dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{J^2}{2I} + \alpha J_z, \qquad \boldsymbol{J} = (J_x, J_y, J_z), \qquad J = |\boldsymbol{J}|\,,$$

dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_{1,2} = \boldsymbol{L}_{1,2} + \boldsymbol{S}_{1,2}$, essendo $\boldsymbol{L}_{1,2}$ e $\boldsymbol{S}_{1,2}$ i momenti angolari orbitali e di spin delle due particelle. Al tempo $t = 0$ la particella 1 si trova nello stato di momento angolare totale $j_1 = 1/2$ e $j_{1z} = 1/2$, mentre la particella 2 nello stato di momento angolare totale $j_2 = 3/2$ e $j_{2z} = -1/2$. Come al solito, j_1, j_{1z}, j_2, j_{2z} sono i numeri quantici di $J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z}$.
Determinare:
1) lo stato del sistema al tempo $t > 0$;
2) i risultati di una misura di J_{2z} al tempo t e le relative probabilità;
3) il primo istante t_1 in cui lo stato del sistema ritorna uguale a quello al tempo $t = 0$.

[punteggio 7]

6 Si consideri un sistema di N particelle identiche non interagenti contenute all'interno di una sfera di raggio $2R$. L'Hamiltoniana di singola particella vale

$$H = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + V(r),$$

dove r è la distanza dal centro della sfera e

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & 0 \leq r < R, \\ V_0, & R \leq r < 2R. \end{cases}$$

All'equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) la pressione $P(2R)$ esercitata dal gas sulla superficie della sfera.
Nell'ipotesi che le particelle siano fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, calcolare:
3) l'energia di Fermi ϵ_{F} del sistema nel limite di N molto grande.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Se U è unitario $U^{-1} = U^{\dagger}$ allora gli operatori

$$\tilde{q}_k = U q_k U^{-1} \qquad \tilde{p}_k = U p_k U^{-1}$$

sono autoaggiunti e soddisfano $[\tilde{q}_k, \tilde{p}_j] = i\hbar\,\delta_{kj}$
cioè la trasformazione è canonica

Viceversa se il numero di gradi di libertà è finito
ogni trasformazione canonica è associabile a
un operatore di trasformazione unitario

Esercizio 2

Usando $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ e $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$

e la relazione $L_\pm |l\, m\rangle = |l, m \pm 1\rangle$

è evidente che $\langle l, m | L_x | l\, m\rangle = 0$

$\langle l, m | L_y | l\, m\rangle = 0$

in quanto $\langle l, m | l, m'\rangle = \delta_{m m'}$

I risultati di una misura di L_x o L_y sono i loro autovalori che, per l fissato, possono essere $m_x \hbar$ $m_y \hbar$ $m_x\, m_y$ interi

$-l \leq m_x \leq l$ $\qquad -l \leq m_y \leq l$

~~Poiché~~

$$\cancel{0 = \langle l, m | L_x | l\, m\rangle = \sum_{m_x=-l}^{l} m_x \hbar\, p_{m_x}}$$

~~per la probabilità p_{m_x} di misurare $m_x \hbar$~~

Esercizio 3

Se $\{|k\rangle\}$ è una base nello spazio di Hilbert

$$\rho = \sum_k p_k \, |k\rangle\langle k|$$

stato puro $\quad p_k = \delta_{k k_0}$

stato miscela $\quad p_k \neq 0$ per più di un k

normalizzazione $\quad tr\,\rho = 1 \iff \sum_k p_k = 1$

$$tr\,\rho^2 = tr \sum_{kk'} p_k p_{k'} \, |k\rangle\langle k|k'\rangle\langle k'|$$
$$= tr \sum_k p_k^2 \, |k\rangle\langle k| = \sum_k p_k^2$$

stato puro $\quad \rho^2 = \rho \quad tr\,\rho^2 = 1$

stato miscela $\quad \rho^2 \neq \rho \quad tr\,\rho^2 < 1$

All'equilibrio termico (distribuzione canonica o gran canonica) ρ_{eq} è uno stato miscela

Esercizio 4

1) Gli autovalori sono i numeri $\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega \pm \frac{\hbar\omega}{2}$ che ordinati danno

$E_0 = 0$ non degenere $|0\rangle|-\rangle$

$E_1 = \hbar\omega$ 2 volte degenere $|0\rangle|+\rangle$ $|1\rangle|-\rangle$

$E_2 = 2\hbar\omega$ 2 volte degenere $|1\rangle|+\rangle$ $|2\rangle|-\rangle$

$E_3 = 3\hbar\omega$ 2 volte degenere $|2\rangle|+\rangle$ $|3\rangle|-\rangle$

$\vdots$

$E_k = k\hbar\omega$ 2 volte degenere $|k-1\rangle|+\rangle$ $|k\rangle|-\rangle$

2) $1 = \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = |C|^2(1+3)$

scegliamo $C = \frac{1}{2}$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left(|0\rangle|-\rangle + \sqrt{3}\,|1\rangle|+\rangle\right)$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_0 t}\,|0\rangle|-\rangle + \sqrt{3}\,e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\,|1\rangle|+\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(|0\rangle|-\rangle + \sqrt{3}\,e^{-i2\omega t}\,|1\rangle|+\rangle\right)$$

3) calcoliamo A^+ che è definito da

$$\langle n|A^+|k\rangle = \overline{\langle k|A|n\rangle}$$

$$\langle k|A|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 & +i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ -i\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Coniugando e scambiando gli indici si ottiene

$$A_{kn} = A^+_{kn} \qquad \text{cioè} \quad A = A^+$$

Dunque A è un operatore Hermitiano e quindi una osservabile.

4) Gli autovalori e gli autovettori di A sono

$\det(A - \lambda I) = 0$ $\quad \lambda = 1$ con autovettori $|n\rangle \quad n \geq 2$

$\lambda^2 - 2 = 0 \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$ con autovettori

$$\lambda = +\sqrt{2} \qquad |v_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle - i|1\rangle\right)$$

$$\lambda = -\sqrt{2} \qquad |v_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + i|1\rangle\right)$$

Misurando A al tempo t con il sistema nello stato $|\psi(t)\rangle$ possiamo trovare il risultato

$$+\sqrt{2} \quad \text{con } \operatorname{prob}(A=+\sqrt{2}) = \left|\langle v_1|\langle +|\psi(t)\rangle\right|^2 + \left|\langle v_1|\langle -|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$$= \left|-i\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}e^{-i2\omega t}\right|^2 + \left|\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$-\sqrt{2} \quad \text{con } \operatorname{prob}(A=-\sqrt{2}) = \left|\langle v_2|\langle +|\psi(t)\rangle\right|^2 + \left|\langle v_2|\langle -|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-2i\omega t}\right|^2 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right|^2$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$$

$$1 \quad \text{con } \operatorname{prob}(A=1) = \left|\langle n|\langle +|\psi(t)\rangle\right|^2 + \left|\langle n|\langle -|\psi(t)\rangle\right|^2$$

$$= 0 \qquad \text{per } n \geq 2$$

Esercizio 5

1)

$$|\psi(0)\rangle = |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= \sum_{J J_z} |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ J\ J_z\rangle \underbrace{\langle j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ J\ J_z | j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle}$$

$$= \sum_{J J_z} |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ J\ J_z\rangle\ C^{J J_z}_{j_1 j_{1z} j_2 j_{2z}}$$

deve essere ~~...~~ $j_z = j_{1z} + j_{2z} = 0$

poichè $|j_1 - j_2| \leq j \leq |j_1 + j_2|$ si può avere $j=1$ e $j=2$

dalla tavola dei coefficienti di Clebsch-Gordan si ha

$$C^{2\,0}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad C^{1\,0}_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|2,0\rangle - |1,0\rangle\right) \quad \text{omesso } j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 2(2+1)t}{2I} + \alpha\, 0\, \hbar t\right)|2,0\rangle$$

$$- \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 1(1+1)t}{2I} + \alpha\, 0\, \hbar t\right)|1,0\rangle\Big]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i3\hbar t}{I}}|2,0\rangle - e^{-\frac{i\hbar t}{I}}|1,0\rangle\right)$$

$$= e^{-\frac{i\hbar t}{I}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}|2,0\rangle - |1,0\rangle\right) \qquad \omega = \frac{2\hbar}{I}$$

2)

$$|2,0\rangle \equiv |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j=2\ j_z=0\rangle$$

$$= \sum_{j_{1z}} \sum_{j_{2z}} |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}\rangle$$

$$\langle j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z} | j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j=2\ j_z=0\rangle$$

$$= \sum_{j_{1z}} \sum_{j_{2z}} |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}\rangle\ C^{j=2\ j_z=0}_{j_1=\frac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\frac{3}{2}\ j_{2z}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\ |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=+\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|1\,0\rangle \equiv |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j=1\ j_z=0\rangle$$

$$= \sum_{j_{1z}} \sum_{j_{2z}} |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}\rangle\ C^{j=1\ j_z=0}_{j_1=\frac{1}{2}\ j_{1z}\ j_2=\frac{3}{2}\ j_{2z}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\ |j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i\alpha t}{\hbar}}\Big[\frac{1}{2}|j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle\left(e^{-i\omega t}+1\right)$$

$$+\frac{1}{2}|j_1=\tfrac{1}{2}\ j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\ j_2=\tfrac{3}{2}\ j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle\left(e^{-i\omega t}-1\right)\Big]$$

i possibili risultati di una misura di J_{2z} al tempo t sono $-\frac{\hbar}{2}$ e $+\frac{\hbar}{2}$ con

$$\mathrm{prob}\left(J_{2z}=-\frac{\hbar}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}+1\right)\right|^2$$

$$=\frac{1}{4}\left(2+e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\cos(\omega t)\right)$$

$$\mathrm{prob}\left(J_{2z}=+\frac{\hbar}{2}\right)=\left|\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}-1\right)\right|^2$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\cos(\omega t)\right)$$

3) $|\psi(t_1)\rangle = e^{i\phi}\,|\psi(0)\rangle$ implica

$e^{-i\omega t_1}=1$ $\quad\omega t=2\pi n\quad$ per $n=1$ $\quad t_1=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi I}{\hbar}$

$m=0$

j / m_1, m_2	2	1	0
1, -1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$
0, 0	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	0	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
-1, 1	$\sqrt{\frac{1}{6}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$

$j_1=\frac{3}{2}, j_2=\frac{1}{2}$

$m=2$

j / m_1, m_2	2
$\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$	1

$m=1$

j / m_1, m_2	2	1
$\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$-\frac{1}{2}$

$m=0$

j / m_1, m_2	2	1
$\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$

$j_1=\frac{3}{2}, j_2=1$

$m=\frac{5}{2}$

j / m_1, m_2	$\frac{5}{2}$
$\frac{3}{2}, 1$	1

$m=\frac{3}{2}$

j / m_1, m_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{2}, 0$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
$\frac{1}{2}, 1$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$-\sqrt{\frac{2}{5}}$

$m=\frac{1}{2}$

j / m_1, m_2	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}, -1$	$\sqrt{\frac{1}{10}}$	$\sqrt{\frac{2}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$
$\frac{1}{2}, 0$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$	$\sqrt{\frac{1}{15}}$	$-\sqrt{\frac{1}{3}}$
$-\frac{1}{2}, 1$	$\sqrt{\frac{3}{10}}$	$-\sqrt{\frac{8}{15}}$	$\sqrt{\frac{1}{6}}$

Esercizio 6

1)
$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_0^{2R} 4\pi r^2 dr \int dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+V(r)\right)}$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_0^{2R} 4\pi r^2 dr\, e^{-\beta V(r)} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta p_x^2/2m}\right)^3$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(e^{\beta V_0}\int_0^{R} 4\pi r^2 dr + e^{-\beta V_0}\int_R^{2R} 4\pi r^2 dr\right)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{4\pi}{h^3}\left(e^{\beta V_0}\frac{R^3}{3} + e^{-\beta V_0}\frac{1}{3}\left(8R^3 - R^3\right)\right)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$= \frac{4\pi R^3}{3}\frac{1}{h^3}\left(e^{\beta V_0} + 7e^{-\beta V_0}\right)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$\bar{E} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1^N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -N\frac{1}{Z_1}\frac{\partial}{\partial\beta}Z_1$$

$$= -N\left(\frac{V_0 e^{\beta V_0} - 7V_0 e^{-\beta V_0}}{e^{\beta V_0}+7e^{-\beta V_0}} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\frac{2\pi m}{-\beta^2}}{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}}\right)$$

$$= N\left(\frac{3}{2}\beta^{-1} - V_0\frac{e^{\beta V_0} - 7e^{-\beta V_0}}{e^{\beta V_0}+7e^{-\beta V_0}}\right)$$

2) ~~E~~quazione di stato del gas perfetto applicata al volume $4\pi r^2 dr$

$$P(r)\, 4\pi r^2 dr = dN(r)\, k_B T$$

$$dN(r) = N \frac{e^{-\beta V(r)} 4\pi r^2 dr}{\int_0^{2R} e^{-\beta V(r)} 4\pi r^2 dr}$$

$$P(r) = N k_B T \frac{e^{-\beta V(r)}}{\int_0^{2R} e^{-\beta V(r)} 4\pi r^2 dr}$$

$$P(2R) = N k_B T \frac{e^{-\beta V_0}}{\frac{4\pi R^3}{3}\left(e^{\beta V_0} + 7 e^{-\beta V_0}\right)}$$

3) $N(\varepsilon)$ = numero di particelle (fermioni spin 1/2) con energia $\leq \varepsilon$ a $T=0$

$$= \frac{2}{h^3} \int 4\pi r^2 dr \int d^3\underline{p}\; \Theta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(r)\right)$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^R 4\pi r^2 dr \int_0^{\sqrt{(\varepsilon+V_0)2m}} 4\pi p^2 dp$$

$$+ \frac{2}{h^3} \int_R^{2R} 4\pi r^2 dr \int_0^{\sqrt{(\varepsilon-V_0)2m}} 4\pi p^2 dp \quad \Theta(\varepsilon - V_0)$$

$$= \frac{2}{h^3} \quad \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \frac{4}{3}\pi \left((\varepsilon+V_0)2m\right)^{3/2}$$

$$+ \frac{2}{h^3} \quad \frac{4}{3}\pi\, 7R^3 \quad \frac{4}{3}\pi \left((\varepsilon-V_0)2m\right)^{3/2} \quad \Theta(\varepsilon - V_0)$$

l'energia di ~~Ferm~~ Fermi è data dalla relazione

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N$$

Per N grande anche ε_F è grande ; per $\varepsilon_F \gg V_0$

possiamo approssimare

$$N = \frac{2}{h^3} \, \frac{4}{3}\pi R^3 \, (1+7) \, \frac{4}{3}\pi \left(\varepsilon_F \, 2m\right)^{3/2}$$

$$\left(\varepsilon_F \, 2m\right)^{3/2} = \frac{N}{\frac{2}{h^3} \, \frac{4}{3}\pi \, 8R^3 \, \frac{4}{3}\pi}$$

$$\varepsilon_F = \frac{1}{2m} \left(\frac{N}{\frac{2}{h^3} \, \frac{4}{3}\pi \, 8R^3 \, \frac{4}{3}\pi} \right)^{2/3} = C \, N^{2/3}$$

$$C = \frac{1}{2m} \left(\frac{h^3}{2} \, \frac{1}{\frac{4}{3}\pi \, \cancel{\Omega}} \right)^{2/3} = \frac{h^2}{2m \left(\frac{8}{3}\pi \, \Omega \right)^{2/3}}$$

dove $\Omega = \frac{4}{3}\pi (2R)^3$ = volume della sfera

la condizione $\varepsilon_F \gg V_0$ più precisamente è

$$C \, N^{2/3} \gg V_0 \qquad N \gg \left(\frac{V_0}{C} \right)^{3/2}$$