MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 10 luglio 2023

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Sia ξ un'osservabile e $|A\rangle$ un vettore normalizzato e si ponga $(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2$. Dimostrare che $\Delta\xi = 0$ se e solo se $|A\rangle$ è un autovettore di ξ.

[punteggio 4]

2 Un elettrone si trova nello stato di spin $|\alpha\rangle = \frac{3}{5}i|+\rangle_z + \frac{4}{5}|-\rangle_z$, dove $S_z|\pm\rangle_z = \pm\frac{\hbar}{2}|\pm\rangle_z$. Determinare il valore medio di S_x nello stato $|\alpha\rangle$ e le probabilità di misurare i valori $\pm\frac{\hbar}{2}$ eseguendo la misura di S_x stante l'elettrone nello stato $|\alpha\rangle$.

[punteggio 4]

3 Un sistema quantistico all'equilibrio termico con un termostato a temperatura T è formato da due sottosistemi. Assumendo che l'Hamiltoniana del sistema sia $H = H_1 + H_2$, dove H_1 e H_2 sono le Hamiltoniane dei due sottosistemi, dimostrare che l'entropia del sistema è additiva, cioé che risulta $S = S_1 + S_2$.

[punteggio 4]

4 In uno spazio di Hilbert di dimensione 4, il sistema di vettori $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle, |4\rangle\}$ è una base ortonormale. In questa base, due osservabili ξ e η sono rappresentate dalle matrici

$$\xi \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & \xi_{13} & 0 \\ \xi_{21} & 1 & 0 & \xi_{24} \\ 0 & \xi_{32} & 0 & -2i \\ \xi_{41} & 0 & \xi_{43} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \eta \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{pmatrix},$$

dove ξ_{13}, ξ_{21}, ξ_{24}, ξ_{32}, ξ_{41}, ξ_{43} e k sono numeri complessi. Determinare:
1) il valore dei coefficienti incogniti ξ_{ij};
2) il valore di k affinché ξ ed η siano osservabili compatibili;
3) gli autovalori di ξ e η per k fissato come al punto 2);
4) un insieme di autovettori comuni di ξ e η;
5) stabilire se le due osservabili formano un sistema completo di osservabili compatibili.

[punteggio 7]

5 Due particelle identiche di massa m e spin 1 sono vincolate in una dimensione e governate dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + V(q_1 - q_2) + \frac{3\pi^2}{4}\hbar^\alpha m^\beta \ell^\gamma \boldsymbol{S_1} \cdot \boldsymbol{S}_2, \qquad V(q) = \begin{cases} 0, & |q| < \ell, \\ \infty, & |q| > \ell, \end{cases} \qquad \ell > 0,$$

dove $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle e q_1, p_1, q_2, p_2 le loro coordinate spaziali e quantità di moto. Determinare:
1) il valore degli esponenti reali α, β, γ usando solo l'analisi dimensionale;
2) l'espressione di H_{cm}, la componente di H nel sistema di riferimento del centro di massa;
3) i primi quattro autovalori di H_{cm}, specificandone la degenerazione, e i corrispondenti autovettori;
4) la correzione al primo ordine in ϵ indotta sul livello fondamentale di H_{cm} dalla perturbazione $H' = \epsilon({S_1}_z^2 + {S_2}_z^2)$.

[punteggio 7]

6 Un gas di N particelle identiche non interagenti di massa m è vincolato in un piano all'interno di una regione di area A con Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = c\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2c^2}, \qquad \boldsymbol{q} = (q_x, q_y) \in A \subset \mathbb{R}^2, \quad \boldsymbol{p} = (p_x, p_y) \in \mathbb{R}^2,$$

dove c è la velocità della luce. Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura T e le particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media per particella E/N;
2) l'entropia S del gas.
Si consideri poi il caso in cui le particelle siano fermioni di spin 1/2 e la temperatura di equilibrio sia approssimabile con $T = 0$. Determinare:
3) l'energia di Fermi ϵ_F in funzione della densità N/A delle particelle.
Suggerimento: nel calcolo degli integrali considerare il cambio di variabile $|\boldsymbol{p}|^2 c^2 + m^2c^4 = x^2$

[punteggio 7]

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

	J	J ...
	M	M ...
m_1	m_2	Coefficients
m_1	m_2	
.	.	
.	.	

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^{\,\ell}_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^{\,j}_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^{\,j}_{m,m'} = d^{\,j}_{-m,-m'}$$

1/2×1/2

m_1	m_2	1
		+1
+1/2	+1/2	1

m_1	m_2	1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	1
		−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

m_1	m_2	3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

m_1	m_2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

m_1	m_2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

m_1	m_2	3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1

m_1	m_2	3
		+3
+2	+1	1

m_1	m_2	3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

m_1	m_2	3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

m_1	m_2	3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

m_1	m_2	3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

m_1	m_2	3
		−3
−2	−1	1

1×1

m_1	m_2	2
		+2
+1	+1	1

m_1	m_2	2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

m_1	m_2	2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

m_1	m_2	2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

m_1	m_2	2
		−2
−1	−1	1

2×1/2

m_1	m_2	5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

m_1	m_2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

m_1	m_2	5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

m_1	m_2	5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

m_1	m_2	2
		+2
+3/2	+1/2	1

m_1	m_2	2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

m_1	m_2	2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

m_1	m_2	2
		−2
−3/2	−1/2	1

3/2×1

m_1	m_2	5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

m_1	m_2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

m_1	m_2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

m_1	m_2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

m_1	m_2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

m_1	m_2	5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

$$d^{\,1}_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{\,1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{\,1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,1}_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^{\,1}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

3/2×3/2

m_1	m_2	3
		+3
+3/2	+3/2	1

m_1	m_2	3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

m_1	m_2	3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

m_1	m_2	3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

m_1	m_2	3
		−3
−3/2	−3/2	1

2×3/2

m_1	m_2	7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

m_1	m_2	7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

m_1	m_2	7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

m_1	m_2	7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

m_1	m_2	7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

m_1	m_2	7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

m_1	m_2	7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

m_1	m_2	7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

2×2

m_1	m_2	4
		+4
+2	+2	1

m_1	m_2	4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

m_1	m_2	4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

m_1	m_2	4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

m_1	m_2	4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

m_1	m_2	4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

m_1	m_2	4
		−4
−2	−2	1

$$d^{\,3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,2} = \Big(\frac{1+\cos\theta}{2}\Big)^2$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{\,3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^{\,2}_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta - 1)$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta - 1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^{\,2}_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{\,3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta + 1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^{\,2}_{2,-2} = \Big(\frac{1-\cos\theta}{2}\Big)^2 \qquad d^{\,2}_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta + 1) \qquad d^{\,2}_{0,0} = \Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Esercizio (1)

Se $\xi |A\rangle = \xi_A |A\rangle$

allora $\xi^2 |A\rangle = \xi_A^2 |A\rangle$ e quindi

$$\langle A|\xi|A\rangle = \xi_A \qquad \langle A|\xi^2|A\rangle = \xi_A^2$$

cioè $(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2 = \xi_A^2 - \xi_A^2 = 0$

Se $(\Delta\xi)^2 = 0$

allora
$$\begin{aligned} 0 &= \langle A|\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)^2|A\rangle \\ &= \langle A|\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)^\dagger\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle \\ &= \left\| \left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle \right\|^2 \end{aligned}$$

cioè $\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle = 0$

ovvero $\xi|A\rangle = \langle A|\xi|A\rangle \, |A\rangle$

Esercizio (2)

Ricordando che $S_x = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $|+\rangle_z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $|-\rangle_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
abbiamo

$$\langle \alpha | S_x | \alpha \rangle = \left(-\frac{3}{5}i, \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{5}i \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

$$= \left(-\frac{3}{5}i, \frac{4}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5}i \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{12}{25}i + \frac{12}{25}i$$

$$= 0$$

Inoltre sappiamo che $|\pm\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix}$ quindi

$$\text{prob}\left(S_x = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left| {}_x\langle + | \alpha \rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\begin{pmatrix} \frac{3}{5}i \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{3}{5}i + \frac{4}{5}\right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\text{prob}\left(S_x = -\frac{\hbar}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Si osservi che tutti gli stati considerati sono normalizzati.

Esercizio (3)

$$\rho = \rho_1 \rho_2 \qquad \frac{e^{-\beta H}}{Z} = \frac{e^{-\beta H_1}}{Z_1} \frac{e^{-\beta H_2}}{Z_2}$$

$$Z = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H} = Z_1 Z_2$$

$$Z_1 = \mathrm{tr}_1 e^{-\beta H_1} \qquad Z_2 = \mathrm{tr}_2\, e^{-\beta H_2}$$

$$\frac{-S}{k_B} = \langle \log \rho \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H} \log \rho \right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H_1} e^{-\beta H_2} \left(\log \rho_1 + \log \rho_2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \Big[\mathrm{tr}_1\left(e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) \mathrm{tr}_2\, e^{-\beta H_2} + \mathrm{tr}_1\left(e^{-\beta H_1} \right) \mathrm{tr}_2\left(e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right) \Big]$$

$$= \frac{1}{Z_1} \mathrm{tr}_1\left(e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) + \frac{1}{Z_2} \mathrm{tr}_2\left(e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right)$$

$$= \left(S_1 + S_2 \right) \frac{-1}{k_B}$$

quindi $S = S_1 + S_2$

Esercizio 4

La matrice che rappresenta un'osservabile deve essere Hermitiana, quindi

$$\xi \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2i \\ 0 & 0 & 2i & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

si osservi che ξ è diagonale a blocchi con i blocchi A e B che sono le matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

Anche η è diagonale a blocchi 2×2

$$\eta \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k-1 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

con $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix}$

Le osservabili ξ e η sono compatibili se e solo se $[\xi, \eta] =$

Usando le proprietà delle matrici diagonali a blocchi

$$\xi\eta = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & BC \end{pmatrix}$$

$$\eta\xi = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & CB \end{pmatrix}$$

Quindi $[\xi, \eta] = 0$ se e solo se $BC - CB = 0$

$$BC = \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2i(k-1) \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

$$CB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & k-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ 2i(k-1) & 0 \end{pmatrix}$$

che implica $-2i(k-1) = 2i$ cioè $k = 0$

In conclusione $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -\mathbb{1}$ cioè

$$\eta \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di η sono ± 1 ciascuno con degenerazione 2.

Gli autovalori di ξ sono l'unione degli autovalori di A e di quelli di B

$$\det(A - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$1 - \lambda = \pm 1 \qquad \lambda = 1 \mp 1$ cioè $\lambda = 0$ e $\lambda = 2$

$$\det(B - \lambda \mathbb{1}) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -2i \\ 2i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4i^2 = \lambda^2 - 4 = 0 \quad \text{cioè}$$

$$\lambda = \pm 2$$

Gli autovalori di ξ sono quindi $0, -2$ non degeneri e 2 con degenerazione 2

Usando il fatto che ogni vettore è autovettore di $\pm \mathbb{1}$ con autovalore ± 1
e il fatto che una matrice diagonale a blocchi $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ ammette autovettori del tipo $a_1|1\rangle + a_2|2\rangle + 0|3\rangle + 0|4\rangle$ con $(a_1, a_2)^T$ autovettore di A e autovettori del tipo $0|1\rangle + 0|2\rangle + b_1|3\rangle + b_2|4\rangle$ con $(b_1, b_2)^T$ autovettore di B
un sistema di autovettori comuni di ξ e η può essere ottenuto trovando gli autovettori di A e di B e completandoli come spiegato sopra nello spazio a 4 dimensioni

autovettori di A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = -a_1$$

primo autovettore normalizzato $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \Rightarrow a_1 + a_2 = 2a_1 \Rightarrow a_2 = a_1$$

secondo autovettore normalizzato $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^T$

autovettori di B

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2i b_2 = -2b_1 \Rightarrow b_2 = -i b_1$$

primo autovettore normalizzato $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^T$

$$\begin{pmatrix} 0 & -2i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \Rightarrow -2i b_2 = 2b_1 \Rightarrow b_2 = i b_1$$

secondo autovettore normalizzato $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\frac{i}{\sqrt{2}}\right)^T$

I seguenti 4 vettori

	autovalori ξ	η
$\vert V_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 2\rangle + 0\,\vert 3\rangle + 0\,\vert 4\rangle$	0	1
$\vert V_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 2\rangle + 0\,\vert 3\rangle + 0\,\vert 4\rangle$	2	1
$\vert V_3\rangle = 0\,\vert 1\rangle + 0\,\vert 2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 3\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,\vert 4\rangle$	-2	-1
$\vert V_4\rangle = 0\,\vert 1\rangle + 0\,\vert 2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\vert 3\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,\vert 4\rangle$	2	-1

sono autovettori normalizzati contemporaneamente di ξ e η e formano un sistema ortonormale completo nello spazio di Hilbert quadridimensionale. Tale sistema è unico in quanto le coppie di autovalori di ξ e η ad esso relative sono distinte $\{(0,1), (2,1), (-2,-1), (2,-1)\}$ quindi non degeneri. In altre parole ξ e η formano un sistema completo di osservabili compatibili.

Esercizio 5

Dall'analisi dimensionale abbiamo

$$[E] = [\hbar]^{\alpha} [m]^{\beta} [l]^{\gamma} [\hbar]^{2}$$

$$[m\, l^2 t^{-2}] = [m\, l^2 t^{-1}]^{\alpha+2} [m]^{\beta} [l]^{\gamma}$$

$$= [m]^{\alpha+2+\beta} [l]^{2\alpha+4+\gamma} [t]^{-\alpha-2}$$

$$\begin{cases} 1 = \alpha+\beta+2 \\ 2 = 2\alpha+\gamma+4 \\ -2 = -\alpha-2 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \beta &= -1 \\ \gamma &= -2 \\ \alpha &= 0 \end{aligned}$$

Quindi $H_{spin} = \frac{3\pi^2}{4} \frac{1}{m l^2} \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$

Detto μ la massa ridotta $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$

e posto $q = q_1 - q_2$ $\quad p = \frac{m p_1 - m p_2}{m+m} = \frac{p_1 - p_2}{2}$

l'Hamiltoniana nel sistema di riferimento del centro di massa è H_{cm}

$$H = H_{cm} + \frac{P^2}{2M} \qquad M = m+m \qquad P = p_1 + p_2$$

$$H_{cm} = \frac{p^2}{2\mu} + V(q) + \frac{3\hbar^2}{4} \frac{1}{m l^2} \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$$

$$= H_{spaziale} + H_{spin}$$

$H_{spaziale}$ è l'Hamiltoniana di una particella di massa μ in una buca rettangolare di larghezza l e profondità infinita. I corrispondenti autovalori sono

$$E_n = E_1 n^2 \qquad E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2\mu l^2} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{m l^2} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Posto $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$ e notando che
$$\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{1}{2}\left(S^2 - 2\hbar^2 - 2\hbar^2\right)$$
possiamo riscrivere
$$H_{spin} = \frac{3}{4}\,\frac{\hbar^2\pi^2}{m\ell^2}\,\frac{1}{2\hbar^2}\left(S^2 - 4\hbar^2\right)$$
$$= \frac{3}{8}\,E_1\left(\frac{S^2}{\hbar^2} - 4\right)$$

con $S^2 = \hbar^2\, s(s+1)$ e $s = 0, 1, 2$

Pertanto $E_{spin}(s) = \frac{3}{8}E_1\left(s(s+1) - 4\right) \quad s = 0, 1, 2$

Esplicitamente $E_{spin}(0) = -\frac{3}{2}E_1$
$$E_{spin}(1) = -\frac{3}{4}E_1$$
$$E_{spin}(2) = \frac{3}{4}E_1$$

Poiché le particelle sono bosoni identici, gli stati fisicamente realizzati sono solo quelli totalmente simmetrici per scambio delle due particelle.

Gli stati spaziali con n dispari sono pari in q cioè simmetrici per scambio delle coordinate spaziali delle due particelle, viceversa gli stati con n pari sono antisimmetrici.

Gli stati di spin con $s=2$ e $s=0$ sono simmetrici per scambio delle due particelle ed hanno degenerazione 5 e 1 rispettivamente.
Lo stato $s=1$ con degenerazione 3 è antisimmetrico

In conclusione

stato fondamentale	$n=1$	$s=0$	$E = -\frac{1}{2} E_1$	deg $= 1$
primo eccitato	$n=1$	$s=2$	$E = \frac{7}{4} E_1$	deg $= 5$
secondo eccitato	$n=2$	$s=1$	$E = \frac{13}{4} E_1$	deg 3
terzo eccitato	$n=3$	$s=0$	$E = \frac{15}{2} E_1$	deg 1

Gli autostati corrispondenti sono del tipo $|n\rangle \otimes |s, s_z\rangle$ con $|n\rangle$ stato spaziale e $|s, s_z\rangle$ stato di spin.

Esprimendo $|s, s_z\rangle$ in termini di $|s_{1z}\, s_{2z}\rangle$ mediante le tabelle di Clebsch-Gordan

$$|s=0\ s_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(|s_{1z}=1\ s_{2z}=-1\rangle - |s_{1z}=0\ s_{2z}=0\rangle + |s_{1z}=-1, s_{2z}=1\rangle\Big)$$

otteniamo la correzione

$$\langle 0\,0| \otimes \langle 1| \, H' \, |1\rangle \otimes |0\,0\rangle$$

$$= \langle 0\,0| \, \varepsilon\left(S_{1z}^2 + S_{2z}^2\right) |0\,0\rangle$$

$$= \varepsilon\left(\langle 0\,0| S_{1z}^2 |0\,0\rangle + \langle 0\,0| S_{2z}^2 |0\,0\rangle\right)$$

$$= 2\varepsilon \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\langle 1,-1| - \langle 0,0| + \langle -1,1|\right) \frac{\hbar^2}{\sqrt{3}}\left(|1,-1\rangle + |-1,1\rangle\right)$$

$$= 2\varepsilon\left(\frac{\hbar^2}{3} + \frac{\hbar^2}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}\varepsilon\hbar^2$$

Esercizio 6

$$Z_1 = \frac{1}{h^2} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{A}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \; e^{-\beta c \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + m^2c^2}}$$

$$= \frac{A}{h^2} \int_0^{\infty} \pi 2p\, dp \; e^{-\beta c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}}$$

$$= \frac{A}{h^2} \int_{mc^2}^{\infty} \pi \frac{2x\,dx}{c^2} \; e^{-\beta x} \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \\ 2x\,dx = c^2 2p\,dp \end{cases}$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2c^2} \left(x \, \frac{e^{-\beta x}}{-\beta} \Bigg|_{mc^2}^{\infty} - \int_{mc^2}^{\infty} \frac{e^{-\beta x}}{-\beta} dx \right)$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2c^2} \left(mc^2 \frac{e^{-\beta mc^2}}{\beta} + \frac{e^{-\beta x}}{-\beta^2} \Bigg|_{mc^2}^{\infty} \right)$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2c^2} \left(\frac{mc^2}{\beta} e^{-\beta mc^2} + \frac{1}{\beta^2} e^{-\beta mc^2} \right)$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2c^2} \left(\frac{mc^2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2} \right) e^{-\beta mc^2}$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1$$

$$= mc^2 - \frac{-\frac{mc^2}{\beta^2} - 2\frac{1}{\beta^3}}{\frac{mc^2}{\beta} + \frac{1}{\beta^2}}$$

$$= mc^2 + \frac{mc^2 + 2/\beta}{1 + \beta mc^2}$$

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!} \qquad N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N} \quad \text{Stirling}$$

$$F = -k_B T \log Z$$
$$= -k_B T \left(N \log Z_1 - N \log N + N + O(\log N) \right)$$
$$= -N k_B T \left(\log\left(\frac{Z_1}{N}\right) + 1 \right) + O(\log N)$$

$$S = \frac{1}{T}(E - F)$$
$$= \frac{N}{T} \left(mc^2 + \frac{mc^2 + 2k_B T}{1 + \frac{mc^2}{k_B T}} + k_B T \right.$$
$$\left. + k_B T \left(-\frac{mc^2}{k_B T} + \log\left(\frac{2A\pi}{h^2 c^2} \left(mc^2 k_B T + (k_B T)^2 \right) \right) \right) \right)$$

$$= N k_B \left[\cancel{\frac{mc^2}{k_B T}} - \cancel{\frac{mc^2}{k_B T}} + 1 + \frac{mc^2 + 2k_B T}{mc^2 + k_B T} \right.$$
$$\left. + \log\left(\frac{2\pi A\, k_B T}{h^2 c^2} \left(mc^2 + k_B T \right) \right) \right]$$

$$= N k_B \left[1 + \frac{2 + \beta mc^2}{1 + \beta mc^2} + \log\left(\frac{2A\pi}{h^2 \beta^2 c^2} \left(1 + \beta mc^2 \right) \right) \right]$$

$$N(\epsilon) = \frac{2}{h^2} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \quad \theta\left(\epsilon - c\sqrt{p^2 + m^2c^2}\right)$$

$$= \frac{2A}{h^2} \int_0^\infty 2\pi p\, dp \quad \theta\left(\epsilon - \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}\right)$$

$$x > 0$$
$$x^2 = c^2p^2 + m^2c^4$$
$$2x\, dx = c^2 2p\, dp$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2} \int_{mc^2}^\infty \frac{2x\, dx}{c^2} \quad \theta(\epsilon - x)$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2} \quad \frac{x^2}{c^2}\Big|_{mc^2}^{\epsilon} \quad \theta(\epsilon - mc^2)$$

$$= \frac{2A\pi}{h^2} \quad \frac{\epsilon^2 - m^2c^4}{c^2} \quad \theta(\epsilon - mc^2)$$

$$N = N(\epsilon_F) = \frac{2A\pi}{h^2c^2}\left(\epsilon_F^2 - m^2c^2\right) \quad \theta\left(\epsilon_F - mc^2\right)$$

$$\epsilon_F = \sqrt{\frac{N}{2A\pi} h^2c^2 + m^2c^2}$$

$$= \sqrt{\frac{h^2c^2}{2\pi} \frac{N}{A} + (mc^2)^2}$$

$$= mc^2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{2m^2c^2\pi} \frac{N}{A}}$$