MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2018/2019 – Prof. C. Presilla
Prova A5 – 10 settembre 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Sia η un operatore (necessariamente non Hermitiano) che soddisfa le relazioni

$$\eta\eta^\dagger + \eta^\dagger\eta = 1, \qquad \eta\eta = \eta^\dagger\eta^\dagger = 0.$$

Dimostrare che l'operatore $n = \eta^\dagger\eta$ ha come autovalori solo 0 e 1.

[punteggio 4]]

---

2 Una particella di spin 1/2 si trova in uno stato corrispondente allo spinore non normalizzato

$$\chi = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Determinare le probabilità di ottenere i valori $+\hbar/2$ e $-\hbar/2$ in una misura della componente x dello spin.

[punteggio 4]

---

3 Si consideri un sistema di N particelle di massa m, indistinguibili, mutuamente non interagenti, contenute in un volume V, all'equilibrio termico a temperatura T. Mostrare esplicitamente che l'energia libera $F = -k_B T \log Z_N$ risulta proporzionale a N.

[punteggio 4]

---

4 L'Hamiltoniana di un sistema a due livelli è definita da

$$H|1\rangle = |1\rangle + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|2\rangle, \qquad H|2\rangle = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|1\rangle + |2\rangle,$$

dove $|1\rangle, |2\rangle$ sono gli autostati normalizzati dell'operatore autoaggiunto ξ con autovalori $\pm\sqrt{2}$

$$\xi|1\rangle = \sqrt{2}|1\rangle, \qquad \xi|2\rangle = -\sqrt{2}|2\rangle.$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\psi(0)\rangle$ ottenuto subito dopo una misura dell'osservabile ξ con risultato $-\sqrt{2}$. Determinare:
1) lo stato $|\psi(0)\rangle$ e il valore medio dell'energia in tale stato;
2) la probabilità di trovare il valore minimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(0)\rangle$;
3) la probabilità di trovare il valore massimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$;
4) gli istanti di tempo in cui lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ ritorna uguale a quello iniziale $|\psi(0)\rangle$.

[punteggio 7]

---

5 Un pendolo di massa m e lunghezza ℓ oscilla in un piano verticale sottoposto all'accelerazione di gravità g. Esso è descritto dalla Hamiltoniana classica

$$H = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + mg\ell(1 - \cos\theta),$$

dove θ è l'angolo di deviazione dalla verticale e $\dot{\theta}$ la sua derivata rispetto al tempo. Determinare:
1) l'Hamiltoniana quantistica $H_0(q, p)$ relativa alle piccole oscillazioni, dove q e p sono gli operatori canonici $q = \ell\theta$ e $p = m\ell\dot{\theta}$;
2) gli autovalori di H_0;
3) l'Hamiltoniana $H_0(q, p) + H_1(q, p)$ che rappresenta l'approssimazione successiva a quella delle piccole oscillazioni;
4) la correzione agli autovalori di H_0 indotta, al primo ordine perturbativo, da H_1.
Si rammenta che per un oscillatore armonico quantistico di massa m e pulsazione ω, nella base degli autostati della Hamiltoniana l'operatore posizione q ha elementi di matrice

$$\langle j|q|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{k+1}\;\delta_{k,j-1} + \sqrt{k}\;\delta_{k,j+1}\right), \qquad j, k = 0, 1, 2, \ldots.$$

[punteggio 7]

---

6 Un sistema è costituito da N particelle identiche, non interagenti mutuamente, con energie di singola particella date da

$$\varepsilon_{j,m} = j\Delta + m\Gamma, \qquad j = 0, 1, \ldots, J, \quad m = \pm 1,$$

con $\Delta > 0$ e $\Gamma \geq 0$. Considerando le particelle come classiche e all'equilibrio termico a temperatura T, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) i valori limite di E per $T \to 0$ e $T \to \infty$;
3) la probabilità $P_1(j \leq 5, m = 1)$ che una data particella abbia energia $\varepsilon_{j,m}$ con $j \leq 5$ e $m = 1$.
Infine, nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, calcolare, nell'ipotesi $J \gg 1$ e $\Gamma = 0$,
4) l'energia di Fermi ϵ_F del sistema.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Per iniziare si osservi che η non può essere Hermitiano.
Se lo fosse, cioè se $\eta = \eta^\dagger$, si avrebbe

$$\eta\eta^\dagger + \eta^\dagger\eta = 2\eta^2 = 0$$

in contrasto con l'ipotesi $\eta\eta^\dagger + \eta^\dagger\eta = 1$

Si ha

$$n^2 = \eta^\dagger\eta\,\eta^\dagger\eta = \eta^\dagger\left(1 - \eta^\dagger\eta\right)\eta = \eta^\dagger\eta - \eta^\dagger\eta^\dagger\,\eta\eta = \eta^\dagger\eta = n$$

Detto $|\lambda\rangle$ un autovettore di n e λ il corrispondente autovalore, $n|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$, risulta

$$\left(n^2 - n\right)|\lambda\rangle = \left(\lambda^2 - \lambda\right)|\lambda\rangle = 0$$

Poiché $|\lambda\rangle \neq |0\rangle$ deve essere $\lambda^2 - \lambda = 0$ cioè $\lambda = 0, 1$

Esercizio 2

Lo spinore proposto ha norma $\sqrt{|1+i|^2 + 2^2} = \sqrt{6}$

pertanto lo spinore normalizzato è

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix}$$

Ricordando che

$$S_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad S_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

e osservando che

$$\chi = \frac{1+i}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \frac{2}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

si ottiene $\quad P_{S_z=+\frac{\hbar}{2}} = \left|\frac{1+i}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{1}{3} \qquad P_{S_z=-\frac{\hbar}{2}} = \left|\frac{2}{\sqrt{6}}\right|^2 = \frac{2}{3}$

Gli autostati di S_x sono

$$S_x\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = +\frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad S_x\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

Risulta $\quad \chi = a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + b\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

dove $\quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}(1+i+2) = \frac{3+i}{\sqrt{12}}$

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)\,\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1+i\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{12}}(1+i-2) = \frac{-1+i}{\sqrt{12}}$$

Quindi $\quad P_{S_x=+\frac{\hbar}{2}} = |a|^2 = \frac{5}{6} \qquad P_{S_x=-\frac{\hbar}{2}} = |b|^2 = \frac{1}{6}$

Esercizio 3

$$Z_N = \frac{1}{N!} Z_1^N$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \int_V d^3\underline{q} \int d^3\underline{p}\; e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$$

$$= \frac{V}{h^3} \left(\int_0^\infty dp_x \; e^{-\beta \frac{p_x^2}{2m}} \right)^3 \qquad u = \sqrt{\frac{\beta}{2m}}\, p_x$$

$$= \frac{V}{h^3} \left(\int_0^\infty du \; e^{-u^2} \sqrt{\frac{2m}{\beta}} \right)^3$$

$$= \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2}$$

$$F = -k_B T \log Z_N$$

$$= -k_B T N \log Z_1 + k_B T \log N!$$

$$= -k_B T N \log\left(\frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right) + k_B T \left(N \log N - N + O(\log N) \right)$$

$$= -k_B T N \left[\log\left(\frac{V}{N} \frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^{3/2} \right) + 1 \right] + O(\log N)$$

$$= k_B T N \left[\log\left(\frac{N}{V} \right) - \log\left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} - 1 \right]$$

$$= k_B T N \left[\log\left(\frac{n}{n_Q} \right) - 1 \right]$$

dove $n \equiv \frac{N}{V}$ $\quad n_Q \equiv \left(\frac{m k_B T}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2}$

Esercizio 4

Nella rappresentazione degli autostati di ξ l'Hamiltoniana H corrisponde alla matrice

$$H \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di H sono le soluzioni di

$$(1-\lambda)^2 - \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(1-\lambda) = \pm 1 \qquad \lambda = 1 \pm 1$$

Indichiamo gli autovalori con $E_- = 0$ ed $E_+ = 2$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$|E_-\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$$

$$\langle 1|H|E_-\rangle = E_-\langle 1|E_-\rangle \Rightarrow \alpha + \beta\frac{1-i}{\sqrt{2}} = 0$$

quindi $\alpha = -\frac{1-i}{\sqrt{2}}\beta$

Osservando che $\langle 1|2\rangle = 0$ e normalizzando $|E_-\rangle$

$$1 = \langle E_-|E_-\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

che insieme forniscono $1 = |\beta|^2 + |\beta|^2$

scegliendo β reale $\Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha = -\frac{1-i}{2}$

alternativamente : $1 = |\alpha|^2 + |\alpha|^2$

scegliendo α reale $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \beta = -\frac{1}{1-i} = -\frac{1+i}{2}$

Poniamo $|E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1+i}{2}|2\rangle$

analogamente si trova

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1+i}{2}|2\rangle$$

Possiamo verificare che $\langle E_-|E_+\rangle = \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle - \frac{|1+i|^2}{4}\langle 2|2\rangle = 0$

Invertendo queste due relazioni si ha

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right)$$

$$|2\rangle = \frac{1-i}{2}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)$$

1) Al tempo $t=0$ lo stato del sistema è

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle = \frac{1-i}{2}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right) \qquad \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = 1$$

2) Eseguendo una misura di H troviamo il valore E_- con probabilità

$$P_{E_-} = \left|\langle E_-|\psi(0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

3) Al tempo $t>0$ lo stato è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\,\frac{1-i}{2}|E_+\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\,\frac{1-i}{2}|E_-\rangle$$

La probabilità di trovare il valore E_+ con una misura di H al tempo t è quindi

$$P_{E_+}(t) = \left|\langle E_+|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\,\frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

indipendente da t.

4) Dobbiamo imporre $|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{i\phi}$

con $\phi \in \mathbb{R}$ fase arbitraria

$$\frac{1-i}{2}\left(e^{-\frac{i2t}{\hbar}}|E_+\rangle - |E_-\rangle\right) = \frac{1-i}{2}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)e^{i\phi}$$

Ciò avviene per $e^{\frac{i2t}{\hbar}} = 1$

$$t_n = 2\pi n \frac{\hbar}{2} = \pi\hbar n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Si noti che t_n ha le dimensioni di $\hbar$ in quanto si è assunto H adimensionale.

Esercizio 5

Usando lo sviluppo in serie di Taylor intorno a $\theta = 0$

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4 + O(\theta^6)$$

$$H_0 = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + mgl\left(1 - 1 + \frac{1}{2}\theta^2\right)$$

$$= \frac{P^2}{2m} + \frac{mg}{2l} q^2$$

$$= \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{g}{l}}$$

H_0 è l'Hamiltoniana di oscillatore armonico di massa m e pulsazione ω

Gli autovalori di H_0 sono $\quad H_0 |n\rangle = E_n^{(0)} |n\rangle$

$$E_n^{(0)} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{g}{l}} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Considerando il termine successivo nello sviluppo di $\cos\theta$ si ottiene

$$H_1 = -mgl \frac{1}{24}\theta^4 = -\frac{1}{24}\frac{mg}{l^3} q^4$$

$$= -\frac{1}{24}\frac{m\omega^2}{l^2} q^4$$

Al primo ordine perturbativo, non essendoci degenerazione, si ha $\quad E_n^{(0)} \to E_n^{(0)} + E_n^{(1)}$

$$E_n^{(1)} = \langle n | H_1 | n \rangle$$

Utilizzando la relazione

$$\langle j|q|k\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{k+1}\,\delta_{k,j-1} + \sqrt{k}\,\delta_{k,j+1}\right)$$

mediante la relazione di completezza degli autostati $|n\rangle$ di H_0 si ha

$$\langle j|q^2|k\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle j|q|n\rangle\langle n|q|k\rangle$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{n+1}\,\delta_{n,j-1} + \sqrt{n}\,\delta_{n,j+1}\right)\left(\sqrt{k+1}\,\delta_{k,n-1} + \sqrt{k}\,\delta_{k,n+1}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{j}\,\sqrt{k+1}\,\delta_{k,j-2} + \sqrt{j+1}\sqrt{k}\,\delta_{k,j+2} + \sqrt{j}\,\sqrt{k}\,\delta_{k,j} + \sqrt{j+1}\,\sqrt{k+1}\,\delta_{k,j}\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2m\omega}\left(\sqrt{(k+2)(k+1)}\,\delta_{k,j-2} + \sqrt{(k-1)k}\,\delta_{k,j+2} + (2k+1)\,\delta_{k,j}\right)$$

Utilizzando la relazione

$$\langle j | q^2 | k\rangle = \frac{\hbar}{2m\omega}\Big(\sqrt{k(k-1)}\,\delta_{k,j+2}$$

$$+\sqrt{(k+1)(k+2)}\,\delta_{k,j-2} + (2k+1)\,\delta_{j,k}\Big)$$

nonché la completezza degli autostati $|n\rangle$ di H_0 si ha:

$$\langle n| q^4 |n\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} \langle n| q^2 |k\rangle\langle k| q^2 |n\rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left|\langle n| q^2 |k\rangle\right|^2$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\Big(\sqrt{k(k-1)}\,\delta_{k,n+2}$$

$$+\sqrt{(k+1)(k+2)}\,\delta_{k,n-2} + (2\quad +1)\,\delta_{n,k}\Big)^2$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\Big[(n+2)(n+1) + (n-1)n + (2n+1)^2\Big]$$

$$= \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2}\left(6n^2 + 6n + 3\right)$$

$$= \frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}\left(2n^2 + 2n + 1\right)$$

$$E_n^{(1)} = -\frac{1}{24}\,\frac{m\omega^2}{\ell^2}\,\frac{3\hbar^2}{4m^2\omega^2}\left(2n^2 + 2n + 1\right)$$

$$= -\frac{1}{32}\,\frac{\hbar^2}{m\ell^2}\left(2n^2 + 2n + 1\right)$$

Esercizio 6

$$Z_1 = \sum_{j=0}^{J} \sum_{m=\pm 1} e^{-\beta \varepsilon_{jm}}$$

$$= \sum_{j=0}^{J} \sum_{m=\pm 1} e^{-\beta j \Delta} e^{-\beta m \Gamma}$$

$$= \sum_{j=0}^{J} \left(e^{-\beta\Delta}\right)^j \left(e^{-\beta \Gamma} + e^{\beta \Gamma}\right)$$

$$= \frac{1 - e^{-\beta\Delta(J+1)}}{1 - e^{-\beta\Delta}} \left(e^{-\beta\Gamma} + e^{\beta\Gamma}\right)$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_N = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log \frac{Z_1^N}{N!} = -N\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_1$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial\beta}\left[\log\left(1 - e^{-\beta\Delta(J+1)}\right) - \log\left(1 - e^{-\beta\Delta}\right) + \log\left(e^{-\beta\Gamma} + e^{\beta\Gamma}\right)\right]$$

$$= -N \left[\frac{\Delta(J+1)\, e^{-\beta\Delta(J+1)}}{1 - e^{-\beta\Delta(J+1)}} - \frac{\Delta e^{-\beta\Delta}}{1 - e^{-\beta\Delta}} + \frac{-\Gamma e^{-\beta\Gamma} + \Gamma e^{\beta\Gamma}}{e^{-\beta\Gamma} + e^{\beta\Gamma}}\right]$$

$$= N\left(-\frac{\Delta(J+1)}{e^{\beta\Delta(J+1)} - 1} + \frac{\Delta}{e^{\beta\Delta} - 1} - \Gamma \tanh(\beta\Gamma)\right)$$

$$\lim_{\beta\to\infty} E = -N\Gamma = N \min(\varepsilon_{jm})$$

$$\lim_{\beta\to 0} E = N\left(-\frac{\Delta(J+1)}{1 + \beta\Delta(J+1) + \dots - 1} + \frac{\Delta}{1 + \beta\Delta + \dots - 1} + 0\right)$$

$$= N\left(-\frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\beta\Delta(J+1) + \dots}\right) + \frac{1}{\beta}\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2}\beta\Delta + \dots}\right)\right)$$

$$= N\,\frac{1}{2}\Delta J = N \;\mathrm{ave}(\varepsilon_{jm})$$

$$P_1\left(j \le J, m=1\right) = \frac{\sum_{j=0}^{5} e^{-\beta(j\Delta + \Gamma)}}{\sum_{j=0}^{J} \sum_{m=\pm 1} e^{-\beta(j\Delta + m\Gamma)}}$$

$$= \frac{1}{Z_1} \frac{1-e^{-\beta\Delta 6}}{1-e^{-\beta\Delta}} e^{-\beta\Gamma}$$

$$= \frac{1-e^{-\beta\Delta 6}}{1-e^{-\beta\Delta(J+1)}} \frac{1}{1+e^{2\beta\Gamma}}$$

Posto $\Gamma=0$ e $J>>1$, il numero di stati ad energia minore di ε è

$$N(\varepsilon) = 2\sum_{j=0}^{J} \theta(\varepsilon - j\Delta)$$

$$= 2\sum_{j=0}^{\varepsilon/\Delta} 1 \qquad \text{si è assunto } J > \frac{\varepsilon}{\Delta} >> 1$$

$$= 2\left(\frac{\varepsilon}{\Delta}+1\right)$$

L'energia di Fermi è data da $N(\epsilon_F) = N$

$$N = 2\left(\frac{\varepsilon_F}{\Delta}+1\right)$$

$$\frac{\varepsilon_F}{\Delta} = \frac{N}{2} - 1$$

$$\varepsilon_F = \Delta\left(\frac{N}{2}-1\right) \simeq \Delta\frac{N}{2}$$