MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2021/2022 – Prof. C. Presilla
Prova A4 – 11 luglio 2022

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Dimostrare che le autofunzioni dell'operatore Hamiltoniano unidimensionale

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x), \qquad V(x) \in \mathbb{R},$$

possono sempre essere scelte reali.

[punteggio 4]

---

2 Sia $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_1$ e $\boldsymbol{J}_2$ operatori di momento angolare. Dimostrare che per i coefficienti di Clebsch-Gordan risulta

$$C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2} \equiv \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m \rangle = 0, \qquad \text{se } m \neq m_1 + m_2,$$

dove j_1, m_1, j_2, m_2 e j, m sono, rispettivamente, i numeri quantici di J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z} e J^2, J_z.

[punteggio 4]

---

3 Dimostrare che l'entropia di un sistema quantistico chiuso rimane costante nel tempo. Si ricordi che l'operatore matrice densità $\rho(t)$ di un generale sistema chiuso evolve nel tempo in accordo all'equazione di von Neumann

$$i\hbar\frac{\mathrm{d}\rho(t)}{\mathrm{d}t} = [H(t), \rho(t)].$$

[punteggio 4]

---

4 L'Hamiltoniana di un sistema a due livelli è definita da

$$H|1\rangle = |1\rangle + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|2\rangle, \qquad H|2\rangle = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|1\rangle + |2\rangle,$$

dove $|1\rangle, |2\rangle$ sono gli autostati normalizzati dell'operatore autoaggiunto ξ con autovalori $\pm\sqrt{2}$

$$\xi|1\rangle = \sqrt{2}|1\rangle, \qquad \xi|2\rangle = -\sqrt{2}|2\rangle.$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\psi(0)\rangle$ ottenuto subito dopo una misura dell'osservabile ξ con risultato $+\sqrt{2}$. Determinare:
1) lo stato $|\psi(0)\rangle$ e il valore medio dell'energia in tale stato;
2) la probabilità di trovare il valore minimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(0)\rangle$;
3) la probabilità di trovare il valore massimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$.

[punteggio 7]

5 Due particelle di massa m vincolate a muoversi lungo una retta sono soggette a una una forza esterna elastica di costante elastica $k > 0$ e interagiscono mutuamente mediante una seconda forza elastica attrattiva con costante elastica $0 < k_{int} \ll k$. L'Hamiltoniana del sistema è dunque

$$H = \frac{1}{2m}p_1^2 + \frac{1}{2}kq_1^2 + \frac{1}{2m}p_2^2 + \frac{1}{2}kq_2^2 + \frac{1}{2}k_{int}\,(q_1 - q_2)^2\,.$$

1) Riscrivere l'Hamiltoniana H usando le coordinate del centro di massa;
2) determinare i tre autovalori più piccoli, $E_0 < E_1 < E_2$, di H e i corrispondenti autostati $|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle$;
3) dire quale di questi tre stati è fisicamente accettabile se le particelle sono indistinguibili e hanno spin 0;
4) determinare quale valore dello spin totale può essere misurato quando il sistema si trova negli stati $|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle$ se le particelle sono indistinguibili e hanno spin 1/2.

[punteggio 7]

6 Un gas di N particelle identiche non interagenti di massa m è vincolato lungo un asse con Hamiltoniana di singola particella

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \qquad q \in \mathbb{R}, \quad p \in \mathbb{R},$$

dove

$$V(q) = \begin{cases} 0, & |q| < L, \\ \frac{1}{2}\alpha(|q| - L)^2, & |q| > L, \end{cases} \qquad \alpha > 0, \quad L > 0.$$

Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura T e possa essere descritto come un gas classico, calcolare:
1) l'energia media E/N per particella;
2) i valori limite e gli andamenti di E/N per $T \to 0$ e $T \to \infty$;
3) il numero medio di particelle contenute nella semiretta $q < L$ con quantità di moto $p > 0$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Poiché $H = H^+$ gli autovalori E sono reali e quindi

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

è una eq. differenziale a coefficienti reali.

Segue che se $\psi(x)$ è soluzione anche $\overline{\psi(x)}$ lo è.

Per la linearità dell'equazione sono soluzioni anche

$$\mathrm{Re}\,\psi(x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x) + \overline{\psi(x)}\right)$$

$$\mathrm{Im}\,\psi(x) = \frac{1}{2i}\left(\psi(x) - \overline{\psi(x)}\right)$$

Questa coppia di soluzioni reali linearmente indipendenti costituiscono, in generale, le due autofunzioni dell'equazione $H\psi = E\psi$ relative all'autovalore E.

Esercizio 2

Si ha

$$J_z \, |j_1 j_2 j m\rangle = \hbar m \, |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_{1z} \, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_1 \, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$J_{2z} \, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 \, |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Poiché $\underline{J} = \underline{J}^\dagger$ abbiamo

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_z | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$= \hbar m \, \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$= (\hbar m_1 + \hbar m_2) \, \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

e quindi

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \big(m - (m_1 + m_2) \big) = 0 .$$

Concludiamo che se $m \neq m_1 + m_2$ risulta

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = 0$$

Esercizio 3

$$S = -k_B \, tr(\rho \log \rho)$$

$$\frac{dS}{dt} = -k_B \, tr\left(\frac{d\rho}{dt} \log \rho\right) - k_B \, tr\left(\rho \, \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt}\right)$$

$$= -k_B \, tr\left(\frac{1}{i\hbar}[H, \rho] \log \rho\right) - k_B \frac{d}{dt} tr \rho$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H\rho \log \rho - \rho H \log \rho\right) - k_B \frac{d}{dt} 1$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H\rho \log \rho - H \log \rho \, \rho\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H [\rho, \log \rho]\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H \, 0\right)$$

$$= 0$$

dove si è usato $tr(ABC) = tr(BCA)$

Esercizio 4

Nella rappresentazione degli autostati di ξ l'Hamiltoniana H corrisponde alla matrice

$$H \Rightarrow \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

che ha autovalori e autovettori (si veda Es. 4 del 13.07.2020)

$$E_- = 0 \qquad |E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1+i}{2}|2\rangle$$

$$E_+ = 2 \qquad |E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1+i}{2}|2\rangle$$

da cui otteniamo

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right)$$

$$|2\rangle = \frac{1-i}{2}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)$$

Al tempo $t=0$ si ha

$$|\psi(0)\rangle = |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right) \qquad \langle\psi(0)|\psi(0)\rangle = 1$$

con $\langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = 1$

Eseguendo una misura di H stante il sistema in $|\psi(0)\rangle$ troveremo il valore $E_- = 0$ con probabilità

$$P_{E_-} = \left|\langle E_-|\psi(0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Al tempo $t>0$ si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi(0)\rangle$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|E_+\rangle + |E_-\rangle\right)$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\,\frac{1}{\sqrt{2}}|E_+\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\,\frac{1}{\sqrt{2}}|E_-\rangle$$

Una misura di H fornisce il valore E_+ con probabilità

$$p_{E_+}(t) = \left|\langle E_+|\psi(t)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Si osservi che $p_\pm(t) = p_\pm(0)$ in quanto H è una costante del moto

Esercizio 5

Con il cambio di variabili

$$q = q_1 - q_2 \qquad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

$$Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \qquad P = p_1 + p_2$$

si ha
$$p_1 = p + \frac{1}{2}P \qquad p_2 = -p + \frac{1}{2}P$$
$$q_1 = Q + \frac{1}{2}q \qquad q_2 = Q - \frac{1}{2}q$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p + \frac{1}{2}P\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-p + \frac{1}{2}P\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(Q + \frac{1}{2}q\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}k\left(Q - \frac{1}{2}q\right)^2 + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$

$$= \frac{1}{2m}\left(2p^2 + \frac{1}{2}P^2\right) + \frac{1}{2}k\left(2Q^2 + \frac{1}{2}q^2\right) + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$

introducendo $M \equiv m + m = 2m \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$

$$H = \frac{P^2}{2M} + kQ^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{k}{4}q^2 + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$

$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2 Q^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 q^2$$

dove $\Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k + 2k_{int}}{m}}$

In conclusione $H = H_{CM} + H_{rel}$ con $[H_{CM}, H_{rel}] = 0$

Gli autovalori di H sono le somme degli autovalori di H_{CM} e H_{rel} che valgono rispettivamente

$$\hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Considerando $0 < k_{int} \ll k$ si ha $\Omega < \omega < 2\Omega$ infatti

$$\omega = \Omega\sqrt{1 + \frac{2k_{int}}{k}} \simeq \Omega\left(1 + \frac{k_{int}}{k}\right)$$ e quindi

$$E_0 = \frac{\hbar}{2}(\Omega + \omega) \qquad |E_0\rangle = |0\rangle_{CM} |0\rangle_{rel}$$

$$E_1 = E_0 + \hbar\Omega \qquad |E_1\rangle = |1\rangle_{CM} |0\rangle_{rel}$$

$$E_2 = E_0 + \hbar\omega \qquad |E_2\rangle = |0\rangle_{CM} |1\rangle_{rel}$$

Se le particelle sono bosoni indistinguibili di spin 0 il vettore di stato deve essere simmetrico sotto lo scambio delle due particelle. Ogni vettore $|n\rangle_{CM}$ è simmetrico sotto lo scambio $1 \leftrightarrow 2$, invece i vettori $|n\rangle_{rel}$ sono simmetrici solo se pari cioè solo se n è pari. Concludiamo che $|E_0\rangle$ e $|E_1\rangle$ sono stati fisicamente accettabili, $|E_2\rangle$ no.

Se le particelle sono fermioni indistinguibili di spin 1/2 i vettori di stato sono il prodotto dei vettori di stato spaziali già trovati e di vettori di spin. e il vettore totale deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio delle due particelle. Ricordando che gli stati di tripletto con spin totale $S=1$ sono simmetrici mentre quello di singoletto con spin totale $S=0$ è antisimmetrico, dovremo avere

$$|E_2\rangle \otimes \sum_{s_z=-1,0,1} c_{s_z} |S=1, s_z\rangle \longrightarrow S=1$$

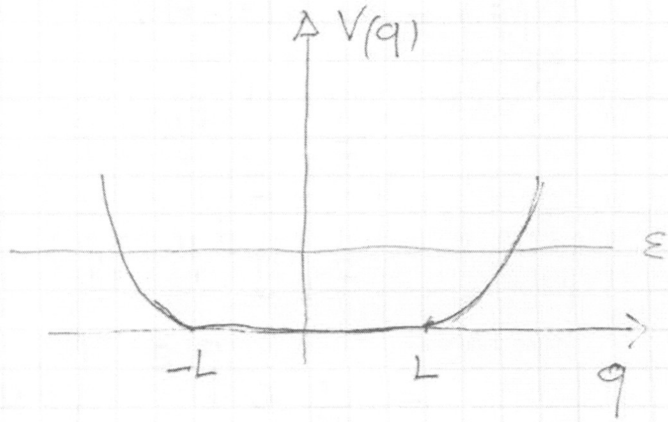
$$|E_0\rangle \otimes |S=0, s_z=0\rangle \longrightarrow S=0$$

$$|E_1\rangle \otimes |S=0, s_z=0\rangle \longrightarrow S=0$$

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \qquad q, p \in \mathbb{R}$$

$$V(q) = \begin{cases} 0 & |q|<L \\ \frac{\alpha}{2}\left(|q|-L\right)^2 & |q|>L \end{cases}$$

$$\alpha, L > 0$$



$$Z_1 = \frac{1}{h}\int dq\, dp\, e^{-\beta H(q,p)}$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\left(2\int_0^L dq\, e^{-\beta 0} + 2\int_L^\infty dq\, e^{-\beta\frac{\alpha}{2}(q-L)^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\left(2L + 2\int_0^\infty du \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\, e^{-u^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\left(2L + 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\, L\left(2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}\right)$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\log\beta + \log\left(2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha L^2}}\,\beta^{-\frac{1}{2}}\right) + \text{cost}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha L^2}}\,\frac{1}{2}\beta^{-3/2}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{\frac{1}{2}\beta^{-1}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}} = \frac{1}{2}\beta^{-1}\,\frac{2 + 2\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \beta^{-1}\,\frac{1 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}} = k_B T\,\frac{1 + \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\alpha L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\alpha L^2}}}$$

$$P(p>0,\ q<L) = \langle \theta(p)\ \theta(L-q) \rangle$$

$$= \frac{1}{Z_1} \int d\mu(q,p)\, e^{-\beta H(q,p)}\, \theta(p)\, \theta(L-q)$$

$$= \frac{1}{Z_1}\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{L} dq \int_0^{\infty} dp\, e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right)}$$

$$= \frac{1}{Z_1}\frac{1}{h} \int_{-\infty}^{L} dq\ \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\, e^{-\beta V(q)}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{\int_{-\infty}^{L} dq\, e^{-\beta V(q)}}{\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-\beta V(q)}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-\beta V(q)} = 2L + 2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{L} dq\, e^{-\beta V(q)} = 2L + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta}}$$

$$P(p>0,\ q<L) = \frac{L\left(2 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}\right)}{L\left(2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}\right)}\ \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4}\ \frac{2 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}\right) < \frac{1}{2}$$

Il numero medio di particelle aventi $p>0$ e $q<L$ è

$N \cdot P(p>0, q<L)$