MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova A5 – 11 settembre 2023

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Si consideri una particella vincolata lungo l'asse x e che si trova in uno stato legato, non necessariamente un autostato dell'Hamiltoniana la quale non necessariamente è indipendente dal tempo, corrispondente alla funzione d'onda $\psi(x,t)$. Dimostrare che la probabilità di trovare la particella lungo l'asse $p(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx$ è costante nel tempo.

[punteggio 4]

---

2 Sia $H = p^2/2m + V(q)$ l'Hamiltoniana di un sistema fisico e $|E_k\rangle$, $k = 1, 2, 3, \dots$, gli autovettori di H relativi agli autovalori E_k (degeneri o non). Dimostrare che $\langle E_k|p|E_k\rangle = 0$.

[punteggio 4]

---

3 Un gas di fermioni, in equilibrio termico a temperatura sufficientemente bassa da poter essere approssimata con 0, ha densità degli stati di singola particella proporzionale a ϵ^α, con $\alpha > 0$, e energia media per particella $E/N = \bar{\epsilon}$. Quanto vale l'energia di Fermi ϵ_F del sistema in funzione dell'energia media $\bar{\epsilon}$?

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi tra due superfici sferiche concentriche di raggi a e b con $a < b$. Sulla particella non agisce nessun'altra forza ad eccezione di quella del vincolo. Determinare:
1) l'energia dello stato fondamentale della particella;
2) la corrispondente funzione d'onda normalizzata;
3) la variazione di energia dello stato fondamentale indotta, al primo ordine, dalla perturbazione $V(\theta) = c \cos^2 \theta$, dove c è una costante positiva e θ l'angolo misurato rispetto a un particolare asse passante per il centro delle due sfere.

[punteggio 7]

5 Una particella di spin 1/2 si trova in uno stato $|\psi\rangle$ in cui il valore di aspettazione di S_x è $\alpha\hbar/2$ e quello di S_y è $\beta\hbar/2$ con $-1 \leq \alpha, \beta \leq 1$.
1) Mostrare che deve necessariamente aversi $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$;
2) determinare il numero di stati $|\psi\rangle$ che soddisfano le precedenti condizioni nei due casi $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ e $\alpha^2 + \beta^2 < 1$;
3) calcolare le probabilità di ottenere i valori $\pm\hbar/2$ in una misura di S_z quando la particella si trova nello stato $|\psi\rangle$ corripondente al caso $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

[punteggio 7]

6 Si consideri un sistema di N atomi uguali che hanno spin 1/2 e corrispondente momento di dipolo magnetico μ. Gli atomi sono vincolati ai vertici di un reticolo rigido e pertanto devono essere considerati distinguibili. Il sistema è immerso in un campo magnetico uniforme di intensità B ed è all'equilibrio termico a temperatura T. Calcolare:
1) la funzione di partizione Z del sistema;
2) il momento magnetico totale M del sistema;
3) l'entropia S del sistema;
4) i valori limite dell'entropia per $T \to 0$ e $T \to \infty$.
Si ricordi che l'energia di interazione di un dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}$ con un campo magnetico $\boldsymbol{B}$ è $-\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Detto m la massa della particella e $V(x)$ il potenziale a cui è soggetta si ha:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x,t) + V(x)\, \psi(x,t)$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \overline{\psi(x,t)} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \overline{\psi(x,t)} + V(x)\, \overline{\psi(x,t)}$$

Moltiplicando la prima eq. per $\overline{\psi(x,t)}$ e la seconda per $\overline{\psi(x,t)}$ e sottraendo otteniamo

$$i\hbar\, \overline{\psi(x,t)} \frac{d}{dt} \psi(x,t) + i\hbar\, \psi(x,t) \frac{d}{dt} \overline{\psi(x,t)}$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\overline{\psi(x,t)} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x,t) - \psi(x,t) \frac{d^2}{dx^2} \overline{\psi(x,t)} \right]$$

Integrando rispetto a x

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x,t)}\, \psi(x,t)\, dx$$
$$= \frac{i\hbar}{2m} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx} \left(\overline{\psi(x,t)} \frac{d}{dx} \psi(x,t) - \psi(x,t) \frac{d}{dx} \overline{\psi(x,t)} \right) dx$$
$$= \frac{i\hbar}{2m} \left(\overline{\psi(x,t)} \frac{d}{dx} \psi(x,t) - \psi(x,t) \frac{d}{dx} \overline{\psi(x,t)} \right) \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty}$$

Per uno stato legato $\psi(x,t) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0$ e quindi

$$\frac{d}{dt} P(t) = 0$$

Esercizio 2

$$[H,q] = \frac{1}{2m}[p^2,q] = \frac{1}{2m}\left(p[p,q] + [p,q]p\right)$$

$$= -i\frac{\hbar}{m}p$$

Poichè $H = H^\dagger$, da $H|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle$

segue $\langle E_n|H^\dagger = \langle E_n|H = \langle E_n|E_n$

quindi

$$\langle E_n|p|E_n\rangle = i\frac{m}{\hbar}\langle E_n|[H,q]|E_n\rangle$$

$$= i\frac{m}{\hbar}\left(E_n\langle E_n|q|E_n\rangle - \langle E_n|q|E_n\rangle E_n\right)$$

$$\doteq 0$$

La proprietà vale anche per q, $\langle E_n|q|E_n\rangle = 0$,

e in ogni dimensione.

Esercizio 3

Posto $g(\varepsilon) = C\,\varepsilon^{\alpha}$ la densità degli stati di singola particella, si ha

$$\frac{E}{N} = \overline{\varepsilon} = \frac{\int_0^{\varepsilon_F} C\,\varepsilon^{\alpha}\,\varepsilon\,d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_F} C\,\varepsilon^{\alpha}\,d\varepsilon}$$

$$= \frac{C\,\varepsilon^{\alpha+2}/(\alpha+2)\Big|_0^{\varepsilon_F}}{C\,\varepsilon^{\alpha+1}/(\alpha+1)\Big|_0^{\varepsilon_F}}$$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\,\frac{\varepsilon_F^{\alpha+2}}{\varepsilon_F^{\alpha+1}} = \frac{\alpha+1}{\alpha+2}\,\varepsilon_F$$

Pertanto $\varepsilon_F = \dfrac{\alpha+2}{\alpha+1}\,\overline{\varepsilon}$

Esercizio 4

Posto $\psi_{E,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{E,l}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$

la funzione d'onda radiale ridotta $u_{E,l}(r) = r R_{E,l}(r)$ soddisfa l'eq. di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u''_{E,l}(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} u_{E,l}(r) = E\, u_{E,l}(r)$$

con $a \leq r \leq b$ e condizioni al bordo $u_{E,l}(a) = u_{E,l}(b) = 0$

Per lo stato fondamentale si ha $l=0$ e quindi

$$u''(r) + k^2 u(r) = 0 \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad u \equiv u_{E,0}$$

la soluzione generale è $u(r) = A e^{ikr} + B e^{-ikr}$

la condizione $u(a)=0$ implica

$$A e^{ika} + B e^{-ika} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A e^{2ika}$$

quindi
$$u(r) = A e^{ikr} - A e^{-ikr+2ika}$$
$$= A e^{ika}\left(e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r-a)}\right)$$
$$= \tilde{A} \sin(k(r-a))$$

la condizione $u(b)=0$ quantizza k e quindi E

$$\tilde{A} \sin(k(b-a)) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(b-a) = n\pi \quad n=1,2,\ldots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{b-a} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} \qquad n=1,2,\ldots$$

l'energia dello stato fondamentale è quindi

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

la funzione d'onda corrispondente è

$$\psi_{E_1 0 0}(\underline{r}) = R_{E_1 0}(r)\, Y_{00}(\vartheta, \varphi)$$

$$Y_{00}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad R_{E_1 0}(r) = \frac{1}{r}\tilde{A}\sin(k_1(r-a))$$

la normalizzazione è data da

$$1 = \int |\psi_{100}(r)|^2\, r^2 dr\, d\Omega$$

$$= \int_a^b \frac{1}{r^2}|\tilde{A}|^2 \sin^2(k_1(r-a))\, r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b |\tilde{A}|^2 \left(\sin^2(k_1(r-a)) + \cos^2(k_1(r-a))\right) dr$$

$$= \frac{1}{2}|\tilde{A}|^2 (b-a)$$

scelto $\tilde{A} = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$ otteniamo

$$\psi_{E_1 0 0}(r, \vartheta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, \frac{1}{r}\sin\left(\frac{\pi(r-a)}{b-a}\right)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

E_1 è un livello non degenere. Al primo ordine la perturbazione V induce una variazione

$$\Delta E_1 = \int \psi_{E_1 0 0}(r, \vartheta, \varphi)\, c\cos\vartheta\, \psi_{E_1 0 0}(r, \vartheta, \varphi)\, d^3\underline{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, c\cos^2\vartheta\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^{\pi} -d(\cos\vartheta)\, \cos^2\vartheta = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} dt\, t^2$$

$$= \frac{c}{3}$$

Esercizio 5

Siano $|\pm\rangle_z$ gli autostati di S_z : $S_z |\pm\rangle_z = \pm \frac{\hbar}{2} |\pm\rangle_z$

Nella base $|\pm\rangle_z$ abbiamo

$$|\psi\rangle = a\,|+\rangle_z + b\,|-\rangle_z \longrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Possiamo scegliere $a > 0$ e $b = |b|\, e^{i\theta}$ con $\theta \in \mathbb{R}$

La condizione di normalizzazione impone

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |a|^2 + |b|^2 = a^2 + |b|^2$$

da cui $|b| = \sqrt{1 - a^2}$

Le condizioni sui valori di aspettazione di S_x e S_y danno

$$\langle S_x \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\bar{a}\ \bar{b}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2} \left(\bar{a} b + a \bar{b}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2}\, a \sqrt{1 - a^2}\ 2\cos\theta = \frac{\hbar}{2}\,\alpha$$

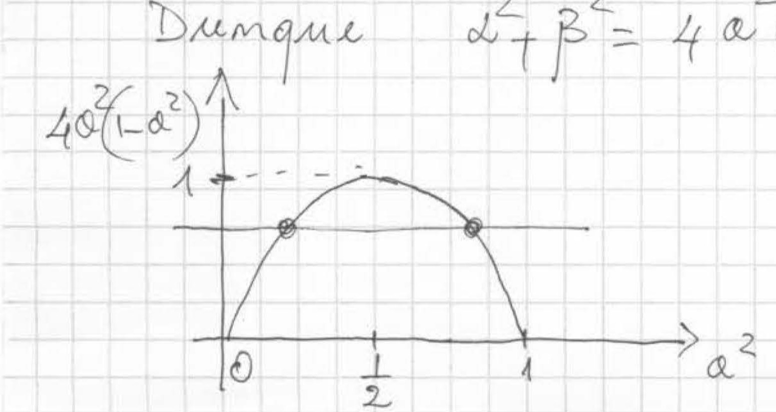
$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \left(\bar{a}\ \bar{b}\right) \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\, i \left(\bar{a} b - a \bar{b}\right)$$
$$= \frac{\hbar}{2}\, a \sqrt{1 - a^2}\ 2\sin\theta = \frac{\hbar}{2}\,\beta$$

cioè

$$\alpha^2 = a^2 (1 - a^2)\, 4\cos^2\theta$$
$$\beta^2 = a^2 (1 - a^2)\, 4\sin^2\theta$$

Si noti che $\theta = \theta(\alpha, \beta)$ è fissato in modo univoco dai valori di α e β

Dunque $\alpha^2 + \beta^2 = 4 a^2 (1 - a^2)$



Risulta $\alpha^2 + \beta^2 \leq 1$

~~Se~~ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ è ottenuto per un solo valore di a

~~Se~~ $a^2 = \frac{1}{2}$ cioè $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leq \alpha^2 + \beta^2 < 1$ è ottenuto per due valori di a

quelli soluzione dell'eq. $4a^4 - 4a^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 0$

$$a^2 = \frac{+2 \pm \sqrt{4 - 4(\alpha^2 + \beta^2)}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - (\alpha^2 + \beta^2)}}$$

Per $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ cioè $a = \sqrt{\frac{1}{2}}$ lo stato $|\psi\rangle$ è

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{i\theta}\,|-\rangle_z$$

La probabilità di misurare $S_z = \pm \frac{\hbar}{2}$ è

$$p_\pm = \left|\langle\psi|\pm\rangle_z\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Esercizio 6

$$Z = Z_1^N$$

$$Z_1 = e^{-\beta(-\mu B)} + e^{-\beta(\mu B)} \quad (*)$$

$$= e^{\beta \mu B} + e^{-\beta \mu B}$$

$N_\pm$ = numero medio di atomi con momento magnetico $\pm\mu$ i.e. con energia $\mp \mu B$

$$= \frac{N}{Z_1} e^{+\beta(\pm \mu B)}$$

$$M = \mu(N_+ - N_-) = \mu \frac{N}{Z_1}\left(e^{+\beta\mu B} - e^{-\beta\mu B}\right)$$

$$= \mu N \tanh(\beta \mu B) = \mu N \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)$$

(*) energia di un atomo $= -\underline{\mu} \cdot \underline{B} = -(\pm \mu B) = \mp \mu B$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$F = -k_B T \log Z = -k_B T N \log Z_1$$

$$S = -\frac{\partial}{\partial T}\left(-N k_B T \log\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\right)\right)$$

$$= N k_B \log\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\right)$$

$$+ N k_B T \frac{e^{\frac{\mu B}{k_B T}}\left(-\frac{\mu B}{k_B T^2}\right) - e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}\left(-\frac{\mu B}{k_B T^2}\right)}{e^{\frac{\mu B}{k_B T}} + e^{-\frac{\mu B}{k_B T}}}$$

$$= N k_B \left[\log 2 + \log\left(\cosh\left(e^{\frac{\mu B}{k_B T}}\right)\right) - \frac{\mu B}{k_B T} \tanh\left(\frac{\mu B}{k_B T}\right)\right]$$

per $T \to 0$

$$S \simeq N k_B \left[\log 2 + \log\left(\frac{e^{\frac{\mu B}{k_B T}}}{2}\right) - \frac{\mu B}{k_B T} 1 + O\left(\frac{k_B T}{\mu B}\right) \right]$$

e quindi

$$\lim_{T \to 0} S(T) = N k_B \left[\cancel{\log 2} + \cancel{\frac{\mu B}{k_B T}} - \cancel{\log 2} - \cancel{\frac{\mu B}{k_B T}} \right] = 0$$

per $T \to \infty$

$$S \simeq N k_B \left[\log 2 + \log 1 - \frac{\mu B}{k_B T} 1 \right]$$

e quindi

$$\lim_{T \to \infty} S(T) = N k_B \log 2 = k_B \log 2^N$$

$$= k_B \log(\# \text{ microstati})$$