MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2018/2019 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 13 febbraio 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Siano $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3)$ e $\boldsymbol{p} = (p_1, p_2, p_3)$ gli operatori posizione e impulso nello spazio $\mathbb{R}^3$ e $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ una funzione sufficientemente regolare. Calcolare il commutatore $[\boldsymbol{p}, f(\boldsymbol{q})]$.

[punteggio 4]]

2 Sia $\psi(\boldsymbol{x}, t)$ la funzione d'onda di un sistema fisico descritto dalla Hamiltoniana $H = |\boldsymbol{p}|^2/2m + V(\boldsymbol{x}, t)$. La densità di probabilità $\rho(\boldsymbol{x}, t) = |\psi(\boldsymbol{x}, t)|^2$ varia nel tempo come descritto dalla cosiddetta equazione di continuità. Derivare tale equazione stabilendo formula e significato fisico della densità di corrente di probabilità $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}, t)$.

[punteggio 4]

3 Scrivere la definizione di temperatura per un sistema termodinamico e, aiutandosi con un grafico qualitativo, spiegare cosa significa la presenza di temperature negative. In quali sistemi è possibile avere temperature negative?

[punteggio 4]

4 Un sistema, il cui spazio di Hilbert ha dimensione 3, è descritto dalla Hamiltoniana

$$H = -\hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Nello stesso spazio è definita l'osservabile

$$\xi = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

All'istante $t = 0$ viene eseguita una misura di ξ trovando il valore 0. Sia $|\psi(0)\rangle$ lo stato del sistema subito dopo tale misura. Determinare:
1) lo stato del sistema al tempo $t > 0$;
2) i possibili risultati di una misura di ξ al tempo t e le rispettive probabilità;
3) il valore di aspettazione di ξ al tempo t;
4) la variazione al primo ordine perturbativo dell'energia dello stato fondamentale di H e del corrispondente autostato, quando ad H viene aggiunta la perturbazione $H_p = \epsilon\hbar\omega\xi$.

[punteggio 7]

---

5 Due particelle di spin 1/2, non identiche, sono descritte dalla Hamiltoniana

$$H = \frac{J^2}{2I} + \alpha J_z,$$

dove $J = |\boldsymbol{J}|$ e $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_k = \boldsymbol{L}_k + \boldsymbol{S}_k$ somma dei momenti angolare orbitale, $\boldsymbol{L}_k$, e di spin, $\boldsymbol{S}_k$, della particella $k = 1, 2$. All'istante $t = 0$ la particella 1 si trova nello stato di momento angolare orbitale $l_1 = 1$ e momento angolare totale $j_1 = 1/2$ e $j_{1z} = 1/2$ mentre la particella 2 in quello di momento angolare orbitale $l_2 = 1$ e momento angolare totale $j_2 = 3/2$ e $j_{2z} = -1/2$. Nella notazione standard, l_k, j_k, j_{kz} sono i numeri quantici di L_k^2, J_k^2, J_{kz}, $k = 1, 2$. Determinare:
1) lo stato del sistema delle due particelle al tempo $t > 0$;
2) i possibili risultati di una misura di J_{2z} al tempo t e le rispettive probabilità;
3) il primo tempo t_1 al quale lo stato del sistema torna a coincidere con lo stato al tempo $t = 0$;
4) i possibili risultatidi una misura di S_{2z} al tempo $t = 0$ e le rispettive probabilità;

[punteggio 7]

---

6 Si consideri un sistema di N fermioni identici di spin 1/2, non mutuamente interagenti, vincolati a muoversi in un piano. La Hamiltoniana di singola particella è

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \qquad p = |\boldsymbol{p}|, \quad r = |\boldsymbol{q}|, \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$$

dove

$$V(r) = \begin{cases} V_0 r/R, & 0 \le r \le R, \\ +\infty, & r > R, \end{cases}$$

con V_0 costante positiva. Calcolare:
1) l'energia media classica all'equilibrio termico a temperatura T, $E_{\rm cl}(T)$;
2) il valore limite di $E_{\rm cl}(T)$ per $T \to 0$ e la sua espressione asintotica per $k_B T \gg V_0$;
3) l'energia cinetica media classica all'equilibrio termico a temperatura T, $\langle p^2/2m \rangle$;
4) il numero N di fermioni tale che, a temperatura $T = 0$, si ha $\epsilon_F = V_0$, dove ϵ_F è l'energia di Fermi del sistema.

[punteggio 7]

---

34. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND *d* FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for −8/15 read $-\sqrt{8/15}$.

Notation:

		J	J	…
		M	M	…
m_1	m_2	Coefficients		
m_1	m_2			
⋮	⋮			

1/2×1/2

		1
		+1
+1/2	+1/2	1

		1	0
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		1
		−1
−1/2	−1/2	1

1×1/2

		3/2
		+3/2
+1	+1/2	1

		3/2	1/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	1/3	2/3
0	+1/2	2/3	−1/3

		3/2	1/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	2/3	1/3
−1	+1/2	1/3	−2/3

		3/2
		−3/2
−1	−1/2	1

2×1

		3
		+3
+2	+1	1

		3	2
		+2	+2
+2	0	1/3	2/3
+1	+1	2/3	−1/3

		3	2	1
		+1	+1	+1
+2	−1	1/15	1/3	3/5
+1	0	8/15	1/6	−3/10
0	+1	2/5	−1/2	1/10

		3	2	1
		0	0	0
+1	−1	1/5	1/2	3/10
0	0	3/5	0	−2/5
−1	+1	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1
		−1	−1	−1
0	−1	2/5	1/2	1/10
−1	0	8/15	−1/6	−3/10
−2	+1	1/15	−1/3	3/5

		3	2
		−2	−2
−1	−1	2/3	1/3
−2	0	1/3	−2/3

		3
		−3
−2	−1	1

1×1

		2
		+2
+1	+1	1

		2	1
		+1	+1
+1	0	1/2	1/2
0	+1	1/2	−1/2

		2	1	0
		0	0	0
+1	−1	1/6	1/2	1/3
0	0	2/3	0	−1/3
−1	+1	1/6	−1/2	1/3

		2	1
		−1	−1
0	−1	1/2	1/2
−1	0	1/2	−1/2

		2
		−2
−1	−1	1

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

2×1/2

		5/2
		+5/2
+2	+1/2	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/5	4/5
+1	+1/2	4/5	−1/5

		5/2	3/2
		+1/2	+1/2
+1	−1/2	2/5	3/5
0	+1/2	3/5	−2/5

		5/2	3/2
		−1/2	−1/2
0	−1/2	3/5	2/5
−1	+1/2	2/5	−3/5

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1	−1/2	4/5	1/5
−2	+1/2	1/5	−4/5

		5/2
		−5/2
−2	−1/2	1

3/2×1/2

		2
		+2
+3/2	+1/2	1

		2	1
		+1	+1
+3/2	−1/2	1/4	3/4
+1/2	+1/2	3/4	−1/4

		2	1
		0	0
+1/2	−1/2	1/2	1/2
−1/2	+1/2	1/2	−1/2

		2	1
		−1	−1
−1/2	−1/2	3/4	1/4
−3/2	+1/2	1/4	−3/4

		2
		−2
−3/2	−1/2	1

3/2×1

		5/2
		+5/2
+3/2	+1	1

		5/2	3/2
		+3/2	+3/2
+3/2	0	2/5	3/5
+1/2	+1	3/5	−2/5

		5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2
+3/2	−1	1/10	2/5	1/2
+1/2	0	3/5	1/15	−1/3
−1/2	+1	3/10	−8/15	1/6

		5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2
+1/2	−1	3/10	8/15	1/6
−1/2	0	3/5	−1/15	−1/3
−3/2	+1	1/10	−2/5	1/2

		5/2	3/2
		−3/2	−3/2
−1/2	−1	3/5	2/5
−3/2	0	2/5	−3/5

		5/2
		−5/2
−3/2	−1	1

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$

$$d^j_{m',m} = (-1)^{m-m'} d^j_{m,m'} = d^j_{-m,-m'}$$

2×3/2

		7/2
		+7/2
+2	+3/2	1

		7/2	5/2
		+5/2	+5/2
+2	+1/2	3/7	4/7
+1	+3/2	4/7	−3/7

		7/2	5/2	3/2
		+3/2	+3/2	+3/2
+2	−1/2	1/7	16/35	2/5
+1	+1/2	4/7	1/35	−2/5
0	+3/2	2/7	−18/35	1/5

		7/2	5/2	3/2	1/2
		+1/2	+1/2	+1/2	+1/2
+2	−3/2	1/35	6/35	2/5	2/5
+1	−1/2	12/35	5/14	0	−3/10
0	+1/2	18/35	−3/35	−1/5	1/5
−1	+3/2	4/35	−27/70	2/5	−1/10

		7/2	5/2	3/2	1/2
		−1/2	−1/2	−1/2	−1/2
+1	−3/2	4/35	27/70	2/5	1/10
0	−1/2	18/35	3/35	−1/5	−1/5
−1	+1/2	12/35	−5/14	0	3/10
−2	+3/2	1/35	−6/35	2/5	−2/5

		7/2	5/2	3/2
		−3/2	−3/2	−3/2
0	−3/2	2/7	18/35	1/5
−1	−1/2	4/7	−1/35	−2/5
−2	+1/2	1/7	−16/35	2/5

		7/2	5/2
		−5/2	−5/2
−1	−3/2	4/7	3/7
−2	−1/2	3/7	−4/7

		7/2
		−7/2
−2	−3/2	1

3/2×3/2

		3
		+3
+3/2	+3/2	1

		3	2
		+2	+2
+3/2	+1/2	1/2	1/2
+1/2	+3/2	1/2	−1/2

		3	2	1
		+1	+1	+1
+3/2	−1/2	1/5	1/2	3/10
+1/2	+1/2	3/5	0	−2/5
−1/2	+3/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2	1	0
		0	0	0	0
+3/2	−3/2	1/20	1/4	9/20	1/4
+1/2	−1/2	9/20	1/4	−1/20	−1/4
−1/2	+1/2	9/20	−1/4	−1/20	1/4
−3/2	+3/2	1/20	−1/4	9/20	−1/4

		3	2	1
		−1	−1	−1
+1/2	−3/2	1/5	1/2	3/10
−1/2	−1/2	3/5	0	−2/5
−3/2	+1/2	1/5	−1/2	3/10

		3	2
		−2	−2
−1/2	−3/2	1/2	1/2
−3/2	−1/2	1/2	−1/2

		3
		−3
−3/2	−3/2	1

$$d^1_{0,0} = \cos\theta \qquad d^{1/2}_{1/2,1/2} = \cos\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}$$

$$d^{1/2}_{1/2,-1/2} = -\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^1_{1,0} = -\frac{\sin\theta}{\sqrt{2}}$$

$$d^1_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}$$

2×2

		4
		+4
+2	+2	1

		4	3
		+3	+3
+2	+1	1/2	1/2
+1	+2	1/2	−1/2

		4	3	2
		+2	+2	+2
+2	0	3/14	1/2	2/7
+1	+1	4/7	0	−3/7
0	+2	3/14	−1/2	2/7

		4	3	2	1
		+1	+1	+1	+1
+2	−1	1/14	3/10	3/7	1/5
+1	0	3/7	1/5	−1/14	−3/10
0	+1	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−1	+2	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2	1	0
		0	0	0	0	0
+2	−2	1/70	1/10	2/7	2/5	1/5
+1	−1	8/35	2/5	1/14	−1/10	−1/5
0	0	18/35	0	−2/7	0	1/5
−1	+1	8/35	−2/5	1/14	1/10	−1/5
−2	+2	1/70	−1/10	2/7	−2/5	1/5

		4	3	2	1
		−1	−1	−1	−1
+1	−2	1/14	3/10	3/7	1/5
0	−1	3/7	1/5	−1/14	−3/10
−1	0	3/7	−1/5	−1/14	3/10
−2	+1	1/14	−3/10	3/7	−1/5

		4	3	2
		−2	−2	−2
0	−2	3/14	1/2	2/7
−1	−1	4/7	0	−3/7
−2	0	3/14	−1/2	2/7

		4	3
		−3	−3
−1	−2	1/2	1/2
−2	−1	1/2	−1/2

		4
		−4
−2	−2	1

$$d^{3/2}_{3/2,3/2} = \frac{1+\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$d^{3/2}_{3/2,1/2} = -\sqrt{3}\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2$$

$$d^{3/2}_{3/2,-1/2} = \sqrt{3}\frac{1-\cos\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,1} = -\frac{1+\cos\theta}{2}\sin\theta$$

$$d^{3/2}_{3/2,-3/2} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,0} = \frac{\sqrt{6}}{4}\sin^2\theta \qquad d^2_{1,1} = \frac{1+\cos\theta}{2}(2\cos\theta-1)$$

$$d^{3/2}_{1/2,1/2} = \frac{3\cos\theta-1}{2}\cos\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-1} = -\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta \qquad d^2_{1,0} = -\sqrt{\frac{3}{2}}\sin\theta\cos\theta$$

$$d^{3/2}_{1/2,-1/2} = -\frac{3\cos\theta+1}{2}\sin\frac{\theta}{2} \qquad d^2_{2,-2} = \left(\frac{1-\cos\theta}{2}\right)^2 \qquad d^2_{1,-1} = \frac{1-\cos\theta}{2}(2\cos\theta+1) \qquad d^2_{0,0} = \left(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\right)$$

Figure 34.1: The sign convention is that of Wigner (*Group Theory*, Academic Press, New York, 1959), also used by Condon and Shortley (*The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, New York, 1953), Rose (*Elementary Theory of Angular Momentum*, Wiley, New York, 1957), and Cohen (*Tables of the Clebsch-Gordan Coefficients*, North American Rockwell Science Center, Thousand Oaks, Calif., 1974). The coefficients here have been calculated using computer programs written independently by Cohen and at LBNL.

Esercizio ①

Usando la regola di quantizzazione

$$[\cdot,\cdot] = i\hbar [\cdot,\cdot]_{PB}$$

e calcolando

$$[p_k, f(\underline{q})]_{PB} = \sum_{j=1}^{3} \left(\frac{\partial p_k}{\partial q_j} \frac{\partial f(\underline{q})}{\partial p_j} - \frac{\partial p_k}{\partial p_j} \frac{\partial f(\underline{q})}{\partial q_k} \right)$$

$$= - \sum_{j=1}^{3} \delta_{k,j} \frac{\partial f(\underline{q})}{\partial q_k}$$

$$= - \frac{\partial f(\underline{q})}{\partial q_k}$$

Otteniamo

$$[p_k, f(\underline{q})] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_k} f(\underline{q})$$

Segue $$[\underline{p}, f(\underline{q})] = -i\hbar \nabla_{\underline{q}} f(\underline{q})$$

Analogamente

$$[\underline{q}, f(\underline{p})] = i\hbar \nabla_{\underline{p}} f(\underline{p})$$

Esercizio 2

Vale l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\underline{x},t) = H\,\psi(\underline{x},t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \psi(\underline{x},t) + V(\underline{x},t)\,\psi(\underline{x},t)$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \overline{\psi(\underline{x},t)} = H\,\overline{\psi(\underline{x},t)} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \overline{\psi(\underline{x},t)} + V(\underline{x},t)\,\overline{\psi(\underline{x},t)}$$

Segue

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{x},t) = \left(\frac{\partial}{\partial t}\psi(\underline{x},t)\right)\overline{\psi(\underline{x},t)} + \psi(\underline{x},t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\overline{\psi(\underline{x},t)}\right)$$

$$= \left(-\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\psi(\underline{x},t) + \frac{V}{i\hbar}\psi(\underline{x},t)\right)\overline{\psi(\underline{x},t)}$$

$$+\,\psi(\underline{x},t)\left(+\frac{\hbar}{2mi}\nabla^2\overline{\psi(\underline{x},t)} - \frac{V}{i\hbar}\overline{\psi(\underline{x},t)}\right)$$

$$= -\frac{\hbar}{2mi}\left(\left(\nabla^2\psi(\underline{x},t)\right)\overline{\psi(\underline{x},t)} - \psi(\underline{x},t)\left(\nabla^2\overline{\psi(\underline{x},t)}\right)\right)$$

$$= -\underline{\nabla}\cdot\frac{\hbar}{2mi}\left(\overline{\psi(\underline{x},t)}\,\underline{\nabla}\psi(\underline{x},t) - \psi(\underline{x},t)\,\underline{\nabla}\,\overline{\psi(\underline{x},t)}\right)$$

$$= -\underline{\nabla}\cdot\underline{j}(\underline{x},t)$$

dove $\underline{j}(\underline{x},t) = \frac{\hbar}{2mi}\left(\overline{\psi(\underline{x},t)}\,\nabla\psi(\underline{x},t) - \psi(\underline{x},t)\,\nabla\,\overline{\psi(\underline{x},t)}\right)$

è la densità di corrente di probabilità

Integrando l'equazione di continuità su un volume Ω definito dalla superficie chiusa Σ e usando il teorema della divergenza di Gauss, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \rho(\underline{x},t)\,d^3\underline{x} = -\int_\Omega \underline{\nabla}\cdot\underline{j}(\underline{x},t)\,d^3\underline{x} = -\int_\Sigma d\underline{\Sigma}\cdot\underline{j}(\underline{x},t)$$

Esercizio 3

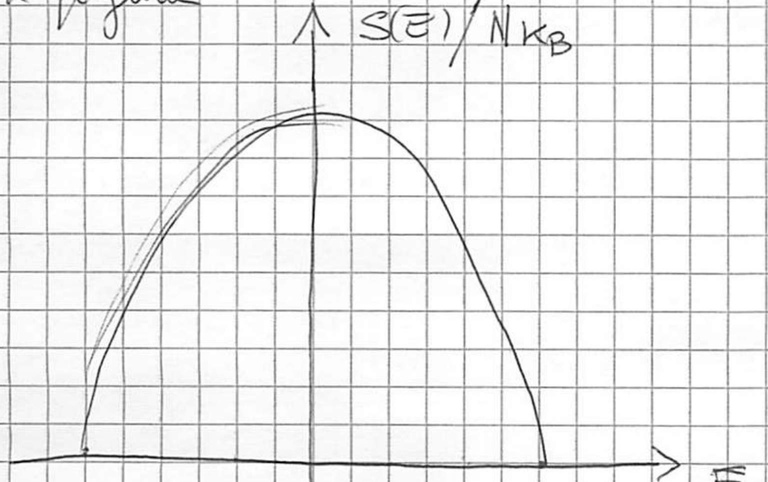
Si definisce

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial}{\partial E} S(E)$$

dove S è l'entropia del sistema. Dunque la temperatura è una misura dell'aumento del numero di microstati a energia E al crescere di E.

Se l'Hamiltoniano del sistema H ha, come spesso accade, un limite inferiore ~~ma~~ nessun limite superiore, $S(E)$ cresce con E in modo monotono e $T > 0$

Se invece H ha un limite superiore, ad esempio come nei sistemi di spin, $S(E)$ ha un andamento come in figura



e per $E > 0$ si ha $T < 0$

Esercizio 4

L'operatore H è già in rappresentazione diagonale i suoi autovalori e autovettori sono:

$$E_1 = -\hbar\omega \qquad |1\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$E_2 = 0 \qquad |2\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$E_3 = \hbar\omega \qquad |3\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Gli autovalori dell'operatore ξ (tra questi deve sicuramente esserci 0) sono le soluzioni di

$$\det\begin{pmatrix}2-\lambda & 0 & 2\\ 0 & -1-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 2-\lambda\end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(-1-\lambda)(2-\lambda) - 2(-1-\lambda)2 = 0$$

$$(-1-\lambda)\left((2-\lambda)^2 - 4\right) = 0 \qquad \lambda = -1 \quad \lambda = 0 \quad \lambda = 4$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2x+2z = -x\\ -y = -y\\ 2x+2z = -z\end{cases} \qquad \begin{matrix}x=0\\y=1\\z=0\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2x+2z = 0\\ -y = 0\\ 2x+2z = 0\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt2}\\y=0\\z=-\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \qquad \begin{cases}2x+2z = 4x\\ -y = 4y\\ 2x+2z = 4z\end{cases} \qquad \begin{cases}x=\frac{1}{\sqrt2}\\y=0\\z=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$$

Ricapitolando autovalori e autovettori di ξ

$\xi_1 = -1 \qquad |\xi_1\rangle = |2\rangle$

$\xi_2 = 0 \qquad |\xi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right)$

$\xi_3 = 4 \qquad |\xi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)$

$|\psi(0)\rangle = |\xi_2\rangle$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}|1\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t}|3\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{i\omega t}|1\rangle - e^{-i\omega t}|3\rangle\right)$$

2) una misura di ξ al tempo t fornisce

$\xi_1 = -1 \qquad \text{prob} = |\langle\xi_1|\psi(t)\rangle|^2 = 0$

$\xi_2 = 0 \qquad \text{prob} = |\langle\xi_2|\psi(t)\rangle|^2 = \cos^2(\omega t)$

$\xi_3 = 4 \qquad \text{prob} = |\langle\xi_3|\psi(t)\rangle|^2 = \sin^2(\omega t)$

3) $\langle\xi\rangle_t = \langle\psi(t)|\xi|\psi(t)\rangle$

$$= \langle\psi(t)|\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k|\xi_k\rangle\langle\xi_k|\right)|\psi(t)\rangle$$

$$= -1\cdot 0 + 0\cdot\cos^2(\omega t) + 4\sin^2(\omega t)$$

$$= 4\sin^2(\omega t)$$

4) Al primo ordine in ε si ha

$$E_1^{(1)} = E_1 + \Delta \qquad E_1 = -\hbar\omega$$

$$\Delta = \langle 1 | \varepsilon \hbar\omega \xi | 1 \rangle = \varepsilon \hbar\omega \langle 1 | \left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k | \xi_k \rangle \langle \xi_k | \right) | 1 \rangle$$

$$= \varepsilon \hbar\omega \; \xi_3 \; \langle 1 | \xi_3 \rangle \langle \xi_3 | 1 \rangle$$

$$= 2 \varepsilon \hbar\omega$$

$$E_1 = -\hbar\omega \, (1 - 2\varepsilon)$$

$$|1\rangle^{(1)} = |1\rangle - \sum_{j \neq 1} \frac{\langle j | H_p | 1 \rangle}{E_j - E_1} |j\rangle$$

$$= |1\rangle - \frac{\langle 2 | \left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k | \xi_k \rangle \langle \xi_k | \right) | 1 \rangle}{E_2 - E_1} \varepsilon \hbar\omega |2\rangle - \frac{\langle 3 | \left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k | \xi_k \rangle \langle \xi_k | \right) | 1 \rangle}{E_3 - E_1} \varepsilon \hbar\omega |3\rangle$$

$$= |1\rangle - \frac{\varepsilon \hbar\omega}{2\hbar\omega} \langle 3 | \xi_3 | \xi_3 \rangle \langle \xi_3 | 1 \rangle \; |3\rangle$$

$$= |1\rangle - \frac{\varepsilon}{2} \, 4 \, \frac{1}{2} \, |3\rangle$$

$$= |1\rangle - \varepsilon |3\rangle \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\varepsilon \end{pmatrix}$$

Si osservi che $\quad \left\| |1\rangle^{(1)} \right\|^2 = {}^{(1)}\langle 1 | 1 \rangle^{(1)} = 1 + O(\varepsilon^2)$

Esercizio 5

Al tempo $t=0$ la particella 1 si trova nello stato

$$|l_1=1, s_1=\frac{1}{2}, j_1=\frac{1}{2}, j_{1z}=\frac{1}{2}\rangle$$

e la particella 2 nello stato

$$|l_2=1, s_2=\frac{1}{2}, j_2=\frac{3}{2}, j_{2z}=-\frac{1}{2}\rangle$$

Poiché le particelle non sono identiche, lo stato del sistema è il prodotto dei due stati sopra indicati.
Omettendo i numeri quantici $l_1\, s_1\, l_2\, s_2$, si ha

$$|\psi(0)\rangle = |j_1=\frac{1}{2}\ j_{1z}=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j_{2z}=-\frac{1}{2}\rangle$$

Per la forma di H conviene scrivere $|\psi(0)\rangle$ in termini degli autostati di J^2 e J_z. Dalla tabella dei coefficienti di Clebsh-Gordon

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=2\ j_z=0\rangle$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=1\ j_z=0\rangle$$

dove j e j_z sono i numeri quantici di J^2 e J_z

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 6}{2I}t}|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=2\ j_z=0\rangle$$
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 2}{2I}t}|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=1\ j_z=0\rangle$$
$$= e^{-i\frac{\hbar t}{I}}\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(e^{-i\omega t}|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=2\ j_z=0\rangle$$
$$-|j_1=\frac{1}{2}\ j_2=\frac{3}{2}\ j=1\ j_z=0\rangle\Big) \qquad \omega=\frac{2\hbar}{I}$$

2) Esprimendo gli autostati di $J_1^2\, J_2^2\, J^2\, J_z$ in termini degli autostati di $J_1^2\, J_{1z}\, J_2^2\, J_{2z}$ si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{\hbar t}{I}} \frac{1}{\sqrt{2}} \Big[e^{-i\omega t}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}} |j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} |j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle \Big)$$

$$- \Big(\frac{1}{\sqrt{2}} |j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} |j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle \Big) \Big]$$

$$= e^{-i\frac{\hbar t}{I}} \Big[|j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=-\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle \Big(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} - \frac{1}{2} \Big)$$

$$|j_1=\tfrac{1}{2}\; j_{1z}=\tfrac{1}{2}\; j_2=\tfrac{3}{2}\; j_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle \Big(\frac{1}{2} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} \Big) \Big]$$

Una misura di J_{2z} fornisce

$J_{2z} = \frac{\hbar}{2}$ $\quad$ $\text{prob} = \left| \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} - 1\right)\right|^2 = \sin^2\!\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(\omega t)\right)$

$J_{2z} = -\frac{\hbar}{2}$ $\quad$ $\text{prob} = \left| \frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t} + 1\right)\right|^2 = \cos^2\!\left(\frac{\omega t}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(\omega t)\right)$

3) Si ha $|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle$, modulo una fattore di fase, quando $\omega t = 2\pi n \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Pertanto $t_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi I}{\hbar}$

4) Lo stato iniziale della particella 2

$$|l_2 = 1 \quad s_2 = \frac{1}{2} \quad j_2 = \frac{3}{2} \quad j_{2z} = -\frac{1}{2}\rangle$$

è un autostato di $L_2^2 \, S_2^2 \, J_2^2 \, J_{2z}$ che può essere scritto in termini degli autostati di $L_2^2 \, L_{2z} \, S_2^2 \, S_{2z}$

$$|l_2 = 1 \quad s_2 = \frac{1}{2} \quad j_2 = \frac{3}{2} \quad j_{2z} = -\frac{1}{2}\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}} \, |l_2 = 1 \quad l_{2z} = 0 \quad s_2 = \frac{1}{2} \quad s_{2z} = -\frac{1}{2}\rangle$$

$$+ \sqrt{\frac{1}{3}} \, |l_2 = 1 \quad l_{2z} = -1 \quad s_2 = \frac{1}{2} \quad s_{2z} = \frac{1}{2}\rangle$$

Una misura di S_{2z} in questo stato fornisce

$S_{2z} = \frac{\hbar}{2}$ prob $= \frac{1}{3}$

$S_{2z} = -\frac{\hbar}{2}$ prob $= \frac{2}{3}$

Esercizio 6

1) $$E_d(T) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z(N) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z(1)$$

$$Z(1) = \frac{1}{h^2}\int_0^R 2\pi r\,dr \int_{\mathbb{R}} dp_x \int_{\mathbb{R}} dp_y\, e^{-\beta H}$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^R 2\pi r\,dr\, \frac{2\pi m}{\beta} e^{-\beta\frac{V_0 r}{R}}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{2\pi m}{\beta}2\pi \int_0^R dr\, \frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{-\beta\frac{V_0}{R}r}\right)\frac{-R}{V_0}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{4\pi^2 m}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\int_0^R e^{-\beta\frac{V_0}{R}r}dr\, \frac{-R}{V_0}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{4\pi^2 m}{\beta}\frac{\partial}{\partial\beta}\left.\frac{e^{-\beta\frac{V_0}{R}r}}{-\frac{\beta V_0}{R}}\right|_0^R \frac{-R}{V_0}$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{4\pi^2 m}{\beta}\frac{R^2}{V_0^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\beta^{-1}\left(e^{-\beta V_0}-1\right)$$

$$= \frac{4\pi^2 m}{h^2\beta}\frac{R^2}{V_0^2}\left[-\beta^{-2}\left(e^{-\beta V_0}-1\right)-\beta^{-1}V_0 e^{-\beta V_0}\right]$$

$$= \frac{4\pi^2 m R^2}{h^2 V_0^2}\frac{1}{\beta^3}\left(1-\beta V_0 e^{-\beta V_0}-e^{-\beta V_0}\right)$$

$$= \frac{4\pi^2 m R^2}{h^2 V_0^2}\frac{1}{\beta^3}\left(1-e^{-\beta V_0}(1+\beta V_0)\right)$$

$$E_d(T) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\mathrm{cost} - 3\log\beta + \log\left(1-e^{-\beta V_0}(1+\beta V_0)\right)\right)$$

$$= N\left(\frac{3}{\beta} - \frac{+e^{-\beta V_0}V_0(1+\beta V_0) - V_0 e^{-\beta V_0}}{1-e^{-\beta V_0}(1+\beta V_0)}\right)$$

$$= N\left(3k_BT - \frac{V_0^2}{k_BT}\frac{e^{-V_0/k_BT}}{1-e^{-V_0/k_BT}(1+V_0/k_BT)}\right)$$

2) $\lim_{T \to 0} E_{cl}(T) = 0$ minimo potenziale

per $k_B T \gg V_0$

$$\frac{E_{cl}(T)}{N} \simeq 3k_BT - \frac{1 - \frac{V_0}{k_BT} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)^2 + \dots}{1 - \left(1 - \frac{V_0}{k_BT} + \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)^2 + \dots\right)\left(1 + \frac{V_0}{k_BT}\right)} \frac{V_0^2}{k_BT}$$

$$= 3k_BT - \frac{V_0^2}{k_BT} \frac{1 - \frac{V_0}{k_BT} + \dots}{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)^2 + \dots\right)}$$

$$= 3k_BT - \frac{V_0^2}{k_BT} \frac{1 - \frac{V_0}{k_BT} + \dots}{\frac{1}{2}\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)^2 \left(1 + \dots\right)}$$

$$= 3k_BT - \frac{V_0^2}{k_BT} \, 2\left(\frac{k_BT}{V_0}\right)^2 \left(1 + \dots\right)$$

$$= 3k_BT - 2k_BT + O\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)$$

$$= k_BT + O\left(\frac{V_0}{k_BT}\right)$$ moto libero in 2D

3) $$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \frac{1}{Z(1)} \frac{1}{h^2} \int_0^R 2\pi r\,dr \int_0^\infty 2\pi p\,dp\,\frac{p^2}{2m} e^{-\beta H}$$

$$= \frac{\frac{\pi}{m}\int_0^\infty dp\; p^3 e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}}{\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\; e^{-\beta\frac{p_x^2+p_y^2}{2m}}}$$

$$u \equiv \frac{\beta}{2m} p^2$$

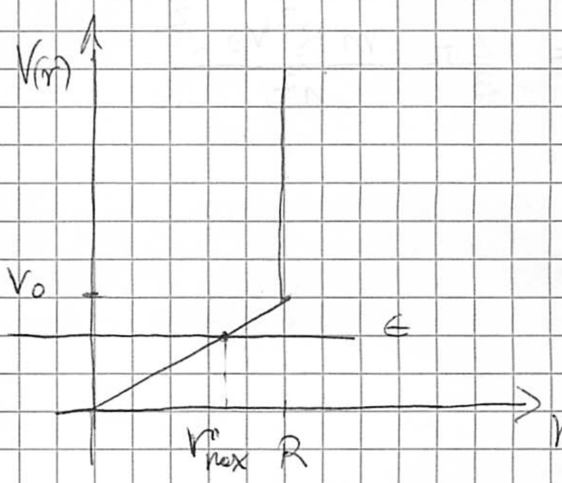
$$= \frac{\frac{\pi}{m}\int_0^\infty e^{-u}\, u\, \frac{2m}{\beta}\, du\, \frac{m}{\beta}}{\frac{2\pi m}{\beta}}$$

$$= \frac{\frac{2\pi m}{\beta^2}\, 1!}{\frac{2\pi m}{\beta}} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

4) $$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{2}{h^2} \int d\underline{q} \int d\underline{p}\; \theta(\epsilon - H)$$

$$\frac{p^2}{2m} + V(r) \le \epsilon$$

$$p \le \sqrt{2m(\epsilon - V(r))}$$



$$r_{max}(\epsilon) = \begin{cases} R\frac{\epsilon}{V_0} & 0 \le \epsilon < V_0 \\ R & \epsilon \ge V_0 \end{cases}$$

$$\mathcal{N}(\epsilon) = \frac{2}{h^2} \int_0^{r_{max}(\epsilon)} 2\pi r\,dr \int_0^{\sqrt{2m(\epsilon - V(r))}} 2\pi p\,dp$$

$$= \frac{2}{h^2} \int_0^{r_{max}(\epsilon)} 2\pi r\,dr\; \pi\, 2m(\epsilon - V(r))$$

$$= \frac{2}{h^2} 4\pi^2 m \int_0^{r_{max}(\epsilon)} dr \, r \left(\epsilon - V_0 \frac{r}{R}\right)$$

$$= \frac{2}{h^2} 4\pi^2 m \left(\epsilon \frac{r^2}{2} - \frac{V_0}{R} \frac{r^3}{3}\right) \Bigg|_0^{r_{max}(\epsilon)}$$

$$= \frac{2}{h^2} 4\pi^2 m \left[\left(\frac{\epsilon}{2} \frac{R^2 \epsilon^2}{V_0^2} - \frac{V_0}{3R} \frac{R^3 \epsilon^3}{V_0^3}\right) \theta(V_0 - \epsilon) \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\epsilon}{2} R^2 - \frac{V_0}{3R} R^3\right) \theta(\epsilon - V_0) \right]$$

$$= \frac{2}{h^2} 4\pi^2 m \left[\frac{1}{6} \frac{\epsilon^3 R^2}{V_0^2} \theta(V_0 - \epsilon) + R^2 \left(\frac{\epsilon}{2} - \frac{V_0}{3}\right) \theta(\epsilon - V_0) \right]$$

$\mathcal{N}(\epsilon_F) = N$ per $\epsilon_F = V_0$ $\quad \mathcal{N}(\epsilon_F) = \frac{2}{h^2} 4\pi^2 m \frac{1}{6} R^2 V_0$

$$N = \frac{4}{3}\pi \frac{m V_0 \pi R^2}{h^2}$$