MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2019/2020 – Prof. C. Presilla

Prova A4 – 13 luglio 2020

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | | |

| esercizio | voto |
|---|---|
| 1 | |
| 2 | |
| 3 | |
| 4 | |
| 5 | |
| 6 | |

**1** Determinare l'espressione dell'operatore unitario $U(a)$, $a \in \mathbb{R}$, che implementa la trasformazione canonica

$$U(a)qU(a)^{-1} = q - a, \qquad U(a)pU(a)^{-1} = p,$$

traslazione di posizione pari ad $a$.

[punteggio 4]]

**2** Definire a parole e mediante una formula i coefficienti di Clebsch-Gordan.

[punteggio 4]

**3** Siano $S_1$ e $S_2$ le entropie di due sistemi all'equilibrio termico a temperatura $T$ aventi Hamiltoniane $H_1$ e $H_2$. Quanto vale l'entropia $S$ del sistema composto con Hamiltoniana $H = H_1 + H_2$? Dimostrarlo.

[punteggio 4]

**4** L'Hamiltoniana di un sistema a due livelli è definita da

$$H|1\rangle = |1\rangle + \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|2\rangle, \qquad H|2\rangle = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}|1\rangle + |2\rangle,$$

dove $|1\rangle, |2\rangle$ sono gli autostati normalizzati dell'operatore autoaggiunto $\xi$ con autovalori $\pm\sqrt{2}$

$$\xi|1\rangle = \sqrt{2}|1\rangle, \qquad \xi|2\rangle = -\sqrt{2}|2\rangle.$$

Al tempo $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\psi(0)\rangle$ ottenuto subito dopo una misura dell'osservabile $\xi$ con risultato $-\sqrt{2}$. Determinare:
1) lo stato $|\psi(0)\rangle$ e il valore medio dell'energia in tale stato;
2) la probabilità di trovare il valore minimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(0)\rangle$;
3) la probabilità di trovare il valore massimo dell'energia eseguendone una misura nello stato $|\psi(t)\rangle$ al tempo $t > 0$;
4) gli istanti di tempo in cui lo stato del sistema $|\psi(t)\rangle$ ritorna uguale a quello iniziale $|\psi(0)\rangle$.

[punteggio 7]

**5** Una particella di spin 1/2 e momento magnetico $\boldsymbol{\mu} = g\boldsymbol{S}$, in presenza di un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, è descritta dall'operatore hamiltoniano

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Al tempo $t = 0$ la particella si trova nell'autostato corrispondente a $S_x = \hbar/2$. Nell'intervallo di tempo $0 \le t \le T$ il campo $\boldsymbol{B}$ è diretto luno l'asse $z$. Successivamente il campo è allineato lungo l'asse $y$. Determinare:
1) la probabilità di misurare $S_z = \hbar/2$ al tempo $t = T$;
2) la probabilità di misurare $S_x = \hbar/2$ al tempo $t = 2T$.

[punteggio 7]

**6** Si consideri un gas ideale di $N$ particelle identiche di massa $m$, vincolate sul piano $(x, y)$. L'Hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{c}{2}(x^2 + y^2) + b\sigma,$$

dove $b, c$ sono costanti positive e $\sigma = \pm 1$. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura $T$ e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) l'energia media $E(T)$ del gas;
2) il numero medio di particelle con $\sigma = +1$ contenute nella regione $\sqrt{x^2 + y^2} \le R$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Poichè $U(a)\, q\, U(a)^{-1} = q - a$ si ha

$$U(a)\, q = q\, U(a) - a\, U(a)$$

cioè $[q, U(a)] = a\, U(a)$

analogamente $[p, U(a)] = 0$

Poichè $U(a)$ commuta con $p$, $U(a)$ deve essere funzione delle sole $p$

Poichè la trasformazione è canonica deve risultare

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial p} U(a) = [q, U(a)]$$

Unendo questi tre risultati l'equazione

$$\frac{\partial}{\partial p} U(a) = -\frac{i}{\hbar} a\, U(a)$$

ha soluzione $U(a) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} a p\right)$

a meno di un inessenziale fattore di fase.

Esercizio 2

Dati due momenti angolari $\underline{J}_1$ e $\underline{J}_2$ indipendenti cioè tali che $[\underline{J}_1, \underline{J}_2]=0$ e detto

$$\underline{J} = \underline{J}_1 \otimes \mathbb{1}_2 + \mathbb{1}_1 \otimes \underline{J}_2$$

si ha che i due insiemi di operatori

$$J_1^2 \; J_{1z} \; J_2^2 \; J_{2z} \qquad e \qquad J^2 \; J_z \; J_1^2 \; J_2^2$$

sono due sistemi completi di osservabili compatibili. Pertanto i corrispondenti sistemi di autovettori

$$|j_1 \, m_1 \, j_2 \, m_2\rangle \qquad e \qquad |j \, m \, j_1 \, j_2\rangle$$

sono due sistemi ortonormali completi nello stesso spazio ed è possibile esprimere i primi in termini dei secondi e viceversa.

$$|j \, m \, j_1 \, j_2\rangle = \sum_{\substack{j_1' m_1' \\ j_2' m_2'}} |j_1' m_1' \, j_2' m_2'\rangle \langle j_1' m_1' \, j_2' m_2' | j \, m \, j_1 \, j_2\rangle$$

Poiché $\langle j_1' m_1' j_2' m_2' | j \, m \, j_1 \, j_2\rangle = 0$ se $j_1' \neq j_1$ o $j_2' \neq j_2$

e $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j \, m \, j_1 \, j_2\rangle = 0$ se $m \neq m_1 + m_2$

si ha

$$|j \, m \, j_1 \, j_2\rangle = \sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j \, m \, j_1 \, j_2\rangle$$

$$C^{jm}_{j_1 m_1 j_2 m_2} \equiv \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j \, m \, j_1 \, j_2\rangle$$

sono i coefficienti di Clebsch-Gordan

Esercizio 3

$$\rho = \rho_1 \rho_2 = \frac{e^{-\beta H}}{Z} = \frac{e^{-\beta H_1}}{Z_1} \frac{e^{-\beta H_2}}{Z_2}$$

$$Z_1 = \mathrm{tr}_1\, e^{-\beta H_1} \qquad Z_2 = \mathrm{tr}_2\, e^{-\beta H_2}$$

$$Z = Z_1 Z_2 = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}$$

$$S = \langle \log \rho \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{tr}\left( e^{-\beta H} \log \rho \right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \mathrm{tr}\left( e^{-\beta H_1} e^{-\beta H_2} \left( \log \rho_1 + \log \rho_2 \right)\right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \Big[ \mathrm{tr}_1 \left( e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) \mathrm{tr}_2 \left( e^{-\beta H_2} \right)$$

$$+ \mathrm{tr}_1 \left( e^{-\beta H_1} \right) \mathrm{tr}_2 \left( e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right) \Big]$$

$$= \frac{1}{Z_1} \mathrm{tr}_1 \left( e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) + \frac{1}{Z_2} \mathrm{tr}_2 \left( e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right)$$

$$= S_1 + S_2$$

Esercizio 4

Nella rappresentazione degli autostati di $\xi$ l'Hamiltoniana H corrisponde alla matrice

$$H \longrightarrow \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1+i}{\sqrt{2}} & 1 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di H sono le soluzioni di

$$(1-\lambda)^2 - \frac{(1-i)(1+i)}{2} = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$(1-\lambda) = \pm 1 \qquad \lambda = 1 \pm 1$$

Indichiamo gli autovalori con $E_- = 0$ ed $E_+ = 2$

Gli autovettori corrispondenti sono

$$|E_-\rangle = \alpha |1\rangle + \beta |2\rangle$$

$$\langle 1| H |E_-\rangle = E_- \langle 1|E_-\rangle \Rightarrow \alpha + \beta \frac{1-i}{\sqrt{2}} = 0$$

quindi $\alpha = -\frac{1-i}{\sqrt{2}} \beta$

Osservando che $\langle 1|2\rangle = 0$ e normalizzando $|E_-\rangle$

$$1 = \langle E_-|E_-\rangle = |\alpha|^2 + |\beta|^2$$

che insieme forniscono $1 = |\beta|^2 + |\beta|^2$

scegliendo $\beta$ reale $\Rightarrow \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \alpha = -\frac{1-i}{2}$

alternativamente: $1 = |\alpha|^2 + |\alpha|^2$

scegliendo $\alpha$ reale $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \beta = -\frac{1}{1-i} = -\frac{1+i}{2}$

Poniamo $|E_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle - \frac{1+i}{2}|2\rangle$

analogamente si trova

$$|E_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{1+i}{2}|2\rangle$$

Possiamo verificare che $\langle E_-|E_+\rangle = \frac{1}{2}\langle 1|1\rangle - \frac{|1+i|^2}{4}\langle 2|2\rangle = 0$

Invertendo queste due relazioni si ha

$$|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|E_+\rangle + |E_-\rangle\Big)$$

$$|2\rangle = \frac{1-i}{2}\Big(|E_+\rangle - |E_-\rangle\Big)$$

1) Al tempo $t=0$ lo stato del sistema è

$$|\psi(0)\rangle = |2\rangle = \frac{1-i}{2}\Big(|E_+\rangle - |E_-\rangle\Big) \qquad \langle\psi(0)|H|\psi(0)\rangle = 1$$

2) Eseguendo una misura di H troviamo il valore $E_-$ con probabilità

$$P_{E_-} = \left|\langle E_-|\psi(0)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

3) Al tempo $t>0$ lo stato è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\,\frac{1-i}{2}|E_+\rangle - e^{-\frac{i}{\hbar}E_-t}\,\frac{1-i}{2}|E_-\rangle$$

La probabilità di trovare il valore $E_+$ con una misura di H al tempo t è quindi

$$P_{E_+}(t) = \left|\langle E_+|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|e^{-\frac{i}{\hbar}E_+t}\,\frac{1-i}{2}\right|^2 = \frac{1}{2}$$

indipendente da t.

4) Dobbiamo imporre $|\psi(t)\rangle = |\psi(0)\rangle e^{i\phi}$

con $\phi \in \mathbb{R}$ fase arbitraria

$$\frac{1-i}{2}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}2t}\,|E_+\rangle - |E_-\rangle\right) = \frac{1-i}{2}\left(|E_+\rangle - |E_-\rangle\right)e^{i\phi}$$

Ciò avviene per $e^{\frac{i}{\hbar}2t} = 1$

$$t_n = 2\pi n \frac{\hbar}{2} = \pi\hbar\, n \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Si noti che $t_n$ ha le dimensioni di $\hbar$ in quanto si è assunto $H$ adimensionale.

Esercizio 5

Ricordiamo che $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x \quad S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y \quad S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ autovalori e autovettori $\pm 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \to |\pm\rangle_x$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ " $\pm 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \to |\pm\rangle_y$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ " $\pm 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to |+\rangle_z \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to |-\rangle_z$

Per $0 \le t \le T$ l'hamiltoniana è $H = -gB\frac{\hbar}{2}\sigma_z$
i cui autovalori e autovettori sono

$$H|\pm\rangle_z = E_\pm |\pm\rangle_z \qquad E_\pm = \mp gB\frac{\hbar}{2}$$

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$$

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}HT}|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(-gB\frac{\hbar}{2}\right)T}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{i}{\hbar}\left(gB\frac{\hbar}{2}\right)T}|-\rangle_z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ig\frac{B}{2}T}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ig\frac{B}{2}T}|-\rangle_z$$

La probabilità di misurare $S_z = \frac{\hbar}{2}$ a $t=T$ è

$$\left|{}_z\langle +|\psi(T)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Per $T \leq t \leq 2T$ l'hamiltoniana è

$$H = -gB\frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$H\,|\pm\rangle_y = E'_\pm\,|\pm\rangle_y \qquad E'_\pm = \mp gB\frac{\hbar}{2}$$

osservando che

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{+ig\frac{B}{2}T}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_y + |-\rangle_y\right)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-ig\frac{B}{2}T}\,\frac{1}{\sqrt{2}i}\left(|+\rangle_y - |-\rangle_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} - i\,e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|+\rangle_y$$

$$+\frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} + i\,e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|-\rangle_y$$

segue

$$|\psi(2T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(2T-T)}\,|\psi(T)\rangle$$

$$= e^{+ig\frac{B}{2}T}\,\frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} - i\,e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|+\rangle_y$$

$$+ e^{-ig\frac{B}{2}T}\,\frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} + i\,e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|-\rangle_y$$

$$= -\frac{i}{2}\left(1+i\,e^{igBT}\right)|+\rangle_y + \frac{1}{2}\left(1+i\,e^{-igBT}\right)|-\rangle_y$$

La probabilità di misurare $S_x = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t = 2T$ è

$$\left|{}_x\langle +|\psi(2T)\rangle\right|^2 = \Big|-\frac{i}{2}\left(1+i\,e^{igBT}\right){}_x\langle +|+\rangle_y$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+i\,e^{-igBT}\right){}_x\langle +|-\rangle_y\Big|^2$$

$$= \left|-\frac{i}{2}\left(1+i\,e^{igBT}\right)\frac{1}{2}(1+i) + \frac{1}{2}\left(1+i\,e^{-igBT}\right)\frac{1}{2}(1-i)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{4}\left(-i+1+1-i\right) + \frac{1}{4}e^{igBT}(+i+1) + \frac{1}{4}e^{-igBT}(i+1)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1-i) + \frac{1}{2}\cos(gBT)\,(1+i)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(1+\cos(gBT)\right) - \frac{i}{2}\left(1-\cos(gBT)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\cos(gBT)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1-\cos(gBT)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(gBT)\right)$$

Notare che questa "probabilità" è non negativa e non maggiore di 1; essa vale 1 quando

$gBT = k\pi \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

$$Z_1 = \frac{1}{h^2}\sum_{\sigma=\pm1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \, e^{-\frac{p_x^2}{2m}\beta} e^{-\frac{p_y^2}{2m}\beta} e^{-\frac{\beta c}{2}x^2} e^{-\frac{\beta c}{2}y^2} e^{-\beta b\sigma}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du \sqrt{\frac{2}{\beta c}}\right)^2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \sqrt{\frac{2m}{\beta}}\right)^2 \left(e^{+\beta b} + e^{-\beta b}\right)$$

$$= \frac{1}{h^2} \frac{2\pi m}{\beta} \frac{2\pi}{\beta c} 2\cosh(\beta b)$$

$$= \left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{2m}{c\beta^2} \cosh(\beta b)$$

$$U = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{Z_1^N}{N!} = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -N \frac{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{2m}{c}\left[-2\beta^{-3}\cosh(\beta b) + \beta^{-2}\sinh(\beta b)\, b\right]}{\left(\frac{2\pi}{h}\right)^2 \frac{2m}{c}\beta^{-2}\cosh(\beta b)}$$

$$= N\left(\frac{2}{\beta} - b\tanh(\beta b)\right)$$

$$= N\left[2k_B T - b\tanh\left(\frac{b}{k_B T}\right)\right]$$

$$P\left(\sqrt{x^2+y^2} \leq R, \sigma=1\right) = \frac{\frac{1}{h^2}\sum_\sigma \int dx \int dy \int dp_x \int dp_y \, e^{-\beta H} \delta_{\sigma,1}\, \theta(R^2 - x^2 - y^2)}{Z_1}$$

$$= \frac{\int dx \int dy \, e^{-\beta\frac{c}{2}(x^2+y^2)} \theta(R^2-(x^2+y^2))\, e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{\beta c} 2\cosh(\beta b)}$$

$$= \frac{2\pi \int_0^R r\,dr\, e^{-\beta\frac{c}{2}r^2} e^{-\beta b}}{\frac{2\pi}{\beta c} 2\cosh(\beta b)} = \frac{e^{-\beta b}\int_0^{\sqrt{\beta\frac{c}{2}R^2}} e^{-u^2} u\, du\, \frac{2}{\beta c}}{\frac{2\cosh(\beta b)}{\beta c}}$$

$$= \frac{e^{-\beta b}}{e^{\beta b} + e^{-\beta b}}\left(1 - e^{-\beta\frac{c R^2}{2}}\right)$$