MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2017/2018 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 14 febbraio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Siano ξ ed η due operatori autoaggiunti e $|A\rangle$ un vettore normalizzato. Dimostrare che

$$\Delta\xi\Delta\eta \geq \frac{1}{2}\left|\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle\right|,$$

dove $(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2$ e $(\Delta\eta)^2 = \langle A|\eta^2|A\rangle - \langle A|\eta|A\rangle^2$.

[punteggio 4]

---

2 Dimostrare che le autofunzioni dell'operatore hamiltoniano unidimensionale

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + V(x)$$

possono sempre essere scelte reali.

[punteggio 4]

---

3 L'operatore densità ρ di un sistema quantistico evolve nel tempo secondo l'equazione di von Neumann

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = [H,\rho].$$

Dimostrare che l'entropia del sistema rimane costante nel tempo.

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m è vincolata a muoversi lungo l'asse x soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| \leq L/2 \\ \infty & |x| > L/2 \end{cases} .$$

All'istante $t = 0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{L}} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) \right) \theta(x + L/2)\theta(-x).$$

Determinare:
1) i possibili risultati di una misura di energia a $t = 0$;
2) le probabilità che vengano misurati, sempre a $t = 0$, valori di energia corrispondenti ai primi tre autovalori dell'operatore hamiltoniano;
3) la densità di probabilità di posizione della particella al tempo $t > 0$.

[punteggio 7]

5 Una particella di spin 1/2 e momento magnetico $\boldsymbol{\mu} = g\boldsymbol{S}$, in presenza di un campo magnetico $\boldsymbol{B}$, è descritta dall'operatore hamiltoniano

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}.$$

Al tempo $t = 0$ la particella si trova nell'autostato corrispondente a $S_x = \hbar/2$. Nell'intervallo di tempo $0 \leq t \leq T$ il campo $\boldsymbol{B}$ è diretto luno l'asse z. Successivamente il campo è allineato lungo l'asse y. Determinare:
1) la probabilità di misurare $S_z = \hbar/2$ al tempo $t = T$;
2) la probabilità di misurare $S_x = \hbar/2$ al tempo $t = 2T$.

[punteggio 7]

6 Si consideri un gas ideale di N particelle di massa m, vincolate all'interno di una sfera di raggio R. L'hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + mgr,$$

essendo r la distanza dal centro della sfera e g l'accelerazione di gravità, assunta costante. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare, al primo ordine nell'approssimazione $R \gg k_{\mathrm{B}}T/(mg)$:
1) la pressione $P(r)$ del gas alla distanza r dal centro della sfera;
2) l'energia media E del gas.
Considerando invece le N particelle come fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, calcolare
3) l'energia di Fermi ϵ_{F} del gas.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Introduciamo $\alpha \equiv \xi + it\eta$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$\alpha^\dagger \equiv \xi - it\eta$

Si consideri un sistema ortonormale completo di vettori $\{|S_i\rangle\}$ tale che $|S_1\rangle = |A\rangle$. Si ha

$$\langle A|\alpha^\dagger \alpha|A\rangle = \sum_i \langle A|\alpha^\dagger|S_i\rangle\langle S_i|\alpha|A\rangle$$

$$= \langle A|\alpha^\dagger|A\rangle\langle A|\alpha|A\rangle + \sum_{i>1} \langle A|\alpha^\dagger|S_i\rangle\langle S_i|\alpha|A\rangle$$

$$\geq \langle A|\alpha^\dagger|A\rangle\langle A|\alpha|A\rangle$$

in quanto $\langle A|\alpha^\dagger|S_i\rangle\langle S_i|\alpha|A\rangle = |\langle S_i|\alpha|A\rangle|^2 \geq 0$

$$\langle A|\xi^2 + t^2\eta^2 + it[\xi,\eta]|A\rangle \geq \langle A|\xi - it\eta|A\rangle\langle A|\xi + it\eta|A\rangle$$

da cui

$$t^2(\Delta\eta)^2 + t\, i\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle + (\Delta\xi)^2 \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

deve allora essere

$$\left(i\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle\right)^2 - 4(\Delta\xi)^2(\Delta\eta)^2 \leq 0$$

$$\Delta\xi\,\Delta\eta \geq \frac{1}{2}\left|\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle\right|$$

Si noti che $[\xi,\eta]^\dagger = -[\xi,\eta]$ quindi $\langle A|[\xi,\eta]|A\rangle$ è immaginario puro.

Esercizio 2

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\psi(x) = E\,\psi(x)$$

Poichè $H = H^{\dagger}$ $E \in \mathbb{R}$ quindi si ha una eq. differenziale a coefficienti reali

Segue che se $\psi(x)$ è soluzione anche $\overline{\psi(x)}$ lo è

Per la linearità dell'equazione, anche

$$\mathrm{Re}\,\psi(x) = \left(\psi(x) + \overline{\psi(x)}\right)/2$$

$$\mathrm{Im}\,\psi(x) = \left(\psi(x) - \overline{\psi(x)}\right)/2i$$

sono soluzioni

Questa coppia di soluzioni reali linearmente indipendenti sono le due autofunzioni dell'equazione $H\psi = E\psi$.

Esercizio 3

$$S = -k_B \, tr\left(\rho \log \rho\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = -k_B \, tr\left(\frac{d\rho}{dt} \log \rho\right) - k_B \, tr\left(\cancel{\rho} \frac{1}{\cancel{\rho}} \frac{d\rho}{dt}\right)$$

$$= -k_B \, tr\left(\frac{1}{i\hbar}[H, \rho] \log \rho\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H\rho \log \rho - \rho H \log \rho\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H\rho \log \rho - H \log \rho \, \rho\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H[\rho, \log \rho]\right)$$

$$= -\frac{k_B}{i\hbar} tr\left(H \cdot 0\right) = 0$$

Esercizio 4

Autovalori e autofunzioni della buca unidimensionale di profondità infinita $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ sono

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) & n \text{ pari} \\ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Nota bene tutte le funzioni sono limitate al supporto compatto $\left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]$.

All'istante $t=0$ la funzione d'onda della particella è

$$\psi(x,0) = \begin{cases} \varphi_1(x) - \varphi_3(x) & -\frac{L}{2} \leq x \leq 0 \\ 0 & 0 < x \leq \frac{L}{2} \end{cases}$$

Si osservi che $\psi(x,0)$ è normalizzata a 1.
Risolviamo $\psi(x,0)$ in serie di Fourier del sistema completo $\{\varphi_n(x)\}$

$$\psi(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

Se n è pari

$$c_n = \int_{-L/2}^{0} \frac{2}{L} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right)\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \sin(nu)\left(\cos(u) - \cos(3u)\right) du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(\sin((n+1)u) + \sin((n-1)u)\right) du$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(\sin((n+3)u) + \sin((n-3)u)\right) du$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((n+1)u)}{n+1} + \frac{\cos((n-1)u)}{n-1} \right) \Bigg|_{0}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$- \frac{1}{\pi} \left(\frac{\cos((n+3)u)}{(n+3)} + \frac{\cos((n-3)u)}{n-3} \right) \Bigg|_{0}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n+3} + \frac{1}{n-3}\right)$$

$$= \frac{2n}{\pi}\left(\frac{1}{n^2-9} - \frac{1}{n^2-1}\right)$$

Se n ē dispari e $n \neq 1$ $n \neq 3$

$$c_n = \int_{-L/2}^{0} \frac{2}{L} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{2} x\right)\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(nu)\left(\cos(u) - \cos(3u)\right) du$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(\cos((n+1)u) + \cos((n-1)u)\right) du$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(\cos((n+3)u) + \cos((n-3)u)\right) du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n+1)u)}{n+1} + \frac{\sin((n-1)u)}{n-1}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin((n+3)u)}{n+3} + \frac{\sin((n-3)u)}{n-3}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$= 0$$

Se $n=1$

$$c_1 = \frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(1+\cos(2u)\right) du$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(u + \frac{\sin(2u)}{2}\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \frac{1}{2}$$

Se $n=3$

$$c_3 = -\frac{2}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1}{2}\left(1+\cos(6u)\right) du$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left(u + \frac{\sin(6u)}{6}\right)_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = -\frac{1}{2}$$

Segue che i possibili risultati di una misura di energia a $t=0$ sono i valori

E_1, E_3, E_n $n = 2, 4, 6, \ldots$

I valori E_1, E_2, E_3 sono misurati con probabilità

$$P_1 = P_3 = \frac{1}{4} \qquad P_2 = |c_2|^2 = \left(\frac{-32}{15\pi}\right)^2$$

Al tempo $t>0$ la funzione d'onda del sistema è

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(x)$$

$$= c_1 e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t} \psi_1(x) + c_3 e^{-\frac{i}{\hbar}E_3 t} \psi_3(x)$$

$$+ \sum_{n>0 \text{ pari}} c_n e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t} \psi_n(x)$$

La densità di probabilità di posizione è

$$|\psi(x,t)|^2 = \left| \frac{1}{2} e^{-i\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}t} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right.$$

$$+ \frac{1}{2} e^{-i\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}9t} \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right)$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} e^{-i\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}(2k)^2 t} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{2k\pi}{L}x\right) \right|^2$$

dove $c_{2k} = \frac{4k}{\pi}\left(\frac{1}{(2k)^2-9} - \frac{1}{(2k)^2-1}\right) \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

Si osservi che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

$|\psi(x,t)|^2 dx$ = probabilità di trovare la particella in $[x, x+dx]$

Esercizio 5

Ricordiamo che $S_x = \frac{\hbar}{2}\sigma_x$ $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ $S_z = \frac{\hbar}{2}\sigma_z$

$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ autovalori e autovettori ± 1 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \to |\pm\rangle_x$

$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ " ± 1 $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} \to |\pm\rangle_y$

$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ " ± 1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \to |+\rangle_z$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \to |-\rangle_z$

Per $t \leq T$ l'hamiltoniana è $H = -gB\frac{\hbar}{2}\sigma_z$ i cui autovalori e autovettori sono

$$H|\pm\rangle_z = E_\pm |\pm\rangle_z \qquad E_\pm = \mp gB\frac{\hbar}{2}$$

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$$

$$|\psi(T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}HT}|\psi(0)\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(-gB\frac{\hbar}{2}\right)T}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{i}{\hbar}\left(gB\frac{\hbar}{2}\right)T}|-\rangle_z$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{ig\frac{B}{2}T}|+\rangle_z + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-ig\frac{B}{2}T}|-\rangle_z$$

La probabilità di misurare $S_z = \frac{\hbar}{2}$ a $t = T$ è

$$\left|{}_z\langle +|\psi(T)\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$

Per $T \leq t \leq 2T$ l'hamiltoniana è

$$H = -gB\frac{\hbar}{2}\sigma_y$$

i cui autovalori e autovettori sono

$$H|\pm\rangle_y = E'_\pm |\pm\rangle_y \qquad E'_\pm = \mp gB\frac{\hbar}{2}$$

osservando che

$$|\psi(T)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{+ig\frac{B}{2}T} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_y + |-\rangle_y\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ig\frac{B}{2}T} \frac{1}{\sqrt{2}i}\left(|+\rangle_y - |-\rangle_y\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} - i e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|+\rangle_y$$

$$+ \frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} + i e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|-\rangle_y$$

segue

$$|\psi(2T)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H(2T-T)}|\psi(T)\rangle$$

$$= e^{+ig\frac{B}{2}T}\frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} - i e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|+\rangle_y$$

$$+ e^{-ig\frac{B}{2}T}\frac{1}{2}\left(e^{+ig\frac{B}{2}T} + i e^{-ig\frac{B}{2}T}\right)|-\rangle_y$$

$$= -\frac{i}{2}\left(1+ie^{igBT}\right)|+\rangle_y + \frac{1}{2}\left(1+ie^{-igBT}\right)|-\rangle_y$$

La probabilità di misurare $S_x = \frac{\hbar}{2}$ al tempo $t = 2T$ è

$$\left|{}_x\langle +|\psi(2T)\rangle\right|^2 = \left| -\frac{i}{2}\left(1+ie^{igBT}\right)\,{}_x\langle +|+\rangle_y \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(1+ie^{-igBT}\right)\,{}_x\langle +|-\rangle_y \right|^2$$

$$= \left| -\frac{i}{2}\left(1+ie^{igBT}\right)\frac{1}{2}(1+i) + \frac{1}{2}\left(1+ie^{-igBT}\right)\frac{1}{2}(1-i)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{4}\left(-i+1+1+i\right) + \frac{1}{4}e^{igBT}\left(+i+1\right) + \frac{1}{4}e^{-igBT}(i+1)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1-i) + \frac{1}{2}\cos(gBT)\,(1+i)\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(1+\cos(gBT)\right) - \frac{i}{2}\left(1-\cos(gBT)\right)\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(1+\cos(gBT)\right)^2 + \frac{1}{4}\left(1-\cos(gBT)\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(1+\cos^2(gBT)\right)$$

Notare che questa "probabilità" è non negativa e non maggiore di 1; essa vale 1 quando

$gBT = k\pi \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$

Esercizio 6

$$P(\underline{q}) = N k_B T \frac{e^{-\beta V(\underline{q})}}{\int e^{-\beta V(\underline{q})} d^3\underline{q}}$$

$$P(\cancel{z}) = N k_B T \frac{e^{-\beta m g r}}{\int_0^R e^{-\beta m g r} 4\pi r^2 dr}$$

$\beta m g r = u$

$$= N k_B T \frac{e^{-\beta m g r}}{\int_0^{\beta m g R} e^{-u} u^2 du \frac{4\pi}{(\beta m g)^3}}$$

$\beta m g R \gg 1$

$$\simeq N k_B T \frac{(\beta m g)^3}{4\pi} \frac{e^{-\beta m g r}}{2!}$$

$$= \frac{N (m g)^3}{8\pi} \beta^2 e^{-\beta m g r}$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_0^R 4\pi r^2 dr \int dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+mgr\right)}$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_0^R 4\pi r^2 dr\, e^{-\beta m g r}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{h^3}\, 4\pi \int_0^{\beta m g R} e^{-u} u^2 du\, \frac{1}{(\beta m g)^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$\beta m g R \gg 1$

$$\simeq \frac{4\pi}{h^3}\, \frac{2!}{(\beta m g)^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1^N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= N\left(3\beta^{-1} + \frac{3}{2}\beta^{-1}\right)$$

$$= N\,\frac{9}{2}\,k_B T$$

$\mathcal{N}(\varepsilon) =$ numero di particelle con energia $\leq \varepsilon$

$$= \frac{2}{h^3} \int d^3q \int d^3p \ \Theta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - mgr\right)$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^{\varepsilon/mg} 4\pi r^2 dr \int_0^{\sqrt{(\varepsilon - mgr)2m}} 4\pi p^2 dp$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^{\varepsilon/mg} 4\pi r^2 dr \ \frac{4}{3}\pi \left((\varepsilon - mgr)2m\right)^{3/2}$$

$$(\varepsilon - mgr)2m = u$$

$$= \frac{2}{h^3} 4\pi \frac{4}{3}\pi \int_0^{\varepsilon 2m} u^{3/2} \left(\varepsilon - \frac{u}{2m}\right)^2 \frac{1}{m^2 g^2} \frac{du}{2m^2 g}$$

$$= \frac{16\pi^2}{3h^3 m^4 g^3} \int_0^{2m\varepsilon} u^{3/2} \left(\varepsilon - \frac{u}{2m}\right)^2 du$$

$$= \frac{16\pi^2}{3h^3 m^4 g^3} \left(\varepsilon^2 \frac{2}{5} (2m\varepsilon)^{5/2} - \frac{\varepsilon}{m} \frac{2}{7} (2m\varepsilon)^{7/2} + \frac{1}{4m^2} \frac{2}{9} (2m\varepsilon)^{9/2} \right)$$

$$= \frac{16\pi^2}{3h^3 m^4 g^3} \left(\frac{2}{5} - \frac{4}{7} + \frac{2}{9}\right) (2m)^{5/2} \varepsilon^{9/2}$$

$$= C \varepsilon^{9/2}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N \qquad \varepsilon_F = \left(\frac{N}{C}\right)^{2/9}$$