MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 14 febbraio 2023

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Si consideri il vettore di stato $|A\rangle$ normalizzato, $\langle A|A\rangle = 1$, e l'operatore non necessariamente autoaggiunto ξ. Dimostrare che

$$\langle A|\xi^\dagger \xi|A\rangle \geq \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\langle A|\xi|A\rangle.$$

[punteggio 4]

2 Un sistema quantistico di N particelle è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \sum_{k=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_k^2}{2m} + V(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N), \qquad \boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{p}_k \in \mathbb{R}^3.$$

Dimostrare che vale la formula

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{q}_k \cdot \boldsymbol{p}_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\boldsymbol{p}_k^2}{m} - \sum_{k=1}^{N} \boldsymbol{q}_k \cdot \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{q}_k} V(\boldsymbol{q}_1, \ldots, \boldsymbol{q}_N).$$

[punteggio 4]

3 Si consideri lo stesso sistema dell'Esercizio 2 e si supponga che esso si trovi in uno stato di equilibrio statistico. Utilizzando la formula dell'Esercizio 2, determinare il valore medio dell'energia cinetica del sistema in relazione al valore medio di una opportuna funzione del potenziale (teorema del viriale quantistico). Si ricavi la relazione tra i valori medi di energia cinetica e potenziale nel caso specifico $N = 1$ e $V(\boldsymbol{q}) = C/\,|\boldsymbol{q}|$.

[punteggio 4]

4 Una particella di massa m, vincolata in una dimensione, è soggetta al potenziale

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > a/2, \\ -\lambda\delta(x), & |x| \leq a/2, \end{cases} \qquad \lambda, a > 0.$$

Determinare:
1) le condizioni di raccordo in $x = 0$ di una generica soluzione dell'equazione di Schrödinger stazionaria;
2) tutti gli autovalori con energia $E < 0$ e le corrispondenti autofunzioni discutendone il loro numero al variare dei parametri λ e a.

[punteggio 7]

---

5 Due particelle distinguibili aventi entrambe spin 1/2 si trovano in uno stato del tipo

$$|\psi_0\rangle = a|-+\rangle_z + b|+-\rangle_z = a|-\rangle_{1_z}|+\rangle_{2_z} + b|+\rangle_{1_z}|-\rangle_{2_z},$$

con a, b generiche costanti e dove $|\pm\rangle_{1_z}$ e $|\pm\rangle_{2_z}$ sono gli autostati degli operatori di spin S_{1_z} e S_{2_z} con autovalori $\pm\hbar/2$. Determinare:
1) le costanti a e b tali che

a) $|\psi_0\rangle$ è normalizzato;

b) la probabilità di misurare $S_{2_z} = \hbar/2$ vale 1/3;

c) la probabilità di misurare $S^2 = 2\hbar^2$, dove $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, vale 1/2.

Supponendo che le due particelle interagiscano con Hamiltoniana $H = (\omega/\hbar)\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2$ e al tempo $t = 0$ il sistema si trovi in uno dei due stati $|\psi_0^\pm\rangle$ trovati al punto 1), determinare:
2) i valori di aspettazione $\langle\psi_0^\pm(t)|S_{1_z}|\psi_0^\pm(t)\rangle$ al tempo $t > 0$;
Al tempo $t = \pi/\omega$ si effettua una misura di S^2 ottenendo come risultato $2\hbar^2$. Quindi il sistema viene lasciato evolvere per un ulteriore tempo δ. Determinare:
3) i risultati e le relative probabilità ottenibili in una misura di S_{1_x} effettuata a questo istante di tempo.

[punteggio 7]

---

6 Un gas di N particelle identiche non interagenti di massa m è vincolato in una dimensione con Hamiltoniana di singola particella $H(q,p) = p^2/(2m) + V(q)$, dove

$$V(q) = \begin{cases} \infty, & q < 0, \\ V_0 q/L, & 0 \leq q < L, \\ 0, & L \leq q \leq 2L, \\ \infty, & q > 2L, \end{cases} \qquad V_0, L > 0.$$

Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura T e le particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media E del gas;
2) la probabilità $p_{[0,L]}$ che una particella si trovi nell'intervallo $[0, L]$ e il valore di tale probabilità nel limite $T \to \infty$.
Si consideri poi il caso in cui le particelle siano fermioni di spin 1/2 e la temperatura di equilibrio sia approssimabile con $T = 0$. Determinare:
3) l'energia totale del gas quando l'energia di Fermi vale $V_0/2$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Si considerino i due vettori

$$\xi|A\rangle \qquad\qquad |A\rangle\langle A|\xi|A\rangle$$

Dalla disuguaglianza di Cauchy - Schwarz

$$|\langle u|v\rangle|^2 \leq \langle u|u\rangle \ \langle v|v\rangle$$

abbiamo

$$\left|\langle A|\xi^\dagger|A\rangle\langle A|\xi|A\rangle\right|^2 \leq \langle A|\xi^\dagger\xi|A\rangle\ \langle A|A\rangle\left|\langle A|\xi|A\rangle\right|^2$$

Poiché $\langle A|A\rangle = 1$ risulta

$$\langle A|\xi^\dagger\xi|A\rangle \geq \left|\langle A|\xi^\dagger|A\rangle\right|^2$$

$$= \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\ \overline{\langle A|\xi^\dagger|A\rangle}$$

$$= \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\ \langle A|\xi|A\rangle$$

Alternativamente, sia $\{|A_i\rangle\}_{i=1}^{\infty}$ una BON nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ su cui agisce ξ, tale che $|A_1\rangle = |A\rangle$. Dalla relazione di completezza $\mathbb{1} = \sum_{i=1}^{\infty} |A_i\rangle\langle A_i|$ abbiamo

$$\langle A|\xi^\dagger\xi|A\rangle = \langle A|\xi^\dagger\sum_{i=1}^{\infty}|A_i\rangle\langle A_i|\ \xi|A\rangle$$

$$= \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\langle A|\xi|A\rangle + \sum_{i=1}^{\infty}\left|\langle A_i|\xi|A\rangle\right|^2$$

$$\geq \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\ \langle A|\xi|A\rangle$$

Alternativamente, si calcoli la norma quadrata del vettore $\xi|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle\,|A\rangle$ e si osservi che $\|\cdot\|^2 \geq 0$

$$\left\| \xi|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle\,|A\rangle \right\|^2$$

$$= \langle A|\xi^\dagger \xi|A\rangle + \cancel{\langle A|A\rangle |\langle A|\xi|A\rangle|^2}$$

$$- \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\langle A|\xi|A\rangle - \cancel{\overline{\langle A|\xi|A\rangle}\,\langle A|\xi|A\rangle}$$

$$= \langle A|\xi^\dagger \xi|A\rangle - \langle A|\xi^\dagger|A\rangle\langle A|\xi|A\rangle \geq 0$$

Esercizio 2

Nello schema di Heisenberg l'evoluzione temporale di un operatore ξ è data da

$$i\hbar \frac{d}{dt}\xi = [\xi, H]$$

Ricordando che $\underline{p}_k = -i\hbar \nabla_{\underline{q}_k}$ abbiamo

$$\begin{aligned}[\underline{q}_k \cdot \underline{p}_k, H] &= \underline{q}_k \cdot [\underline{p}_k, H] + [\underline{q}_k, H] \cdot \underline{p}_k \\ &= \underline{q}_k \cdot \left(-i\hbar \nabla_{\underline{q}_k} H\right) + \left(i\hbar \nabla_{\underline{p}_k} H\right) \cdot \underline{p}_k \\ &= -i\hbar\, \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}_k} V(\underline{q}_1, \dots \underline{q}_N) + i\hbar \frac{1}{m} \underline{p}_k \cdot \underline{p}_k\end{aligned}$$

Segue che

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \underline{p}_k\right) &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{k=1}^{N} [\underline{q}_k \cdot \underline{p}_k, H] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{\underline{p}_k \cdot \underline{p}_k}{m} - \sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}_k} V(\underline{q}_1, \dots, \underline{q}_N)\end{aligned}$$

Esercizio 3

In uno stato di equilibrio statistico il sistema è descritto da un operatore matrice densità stazionario

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = 0$$

Segue che i valori medi delle osservabili sono costanti nel tempo

$$\langle \xi \rangle_t = \mathrm{tr}\left(\rho(t)\, \xi\right) = \mathrm{tr}\left(\rho(t_0)\, \xi\right)$$

Dalla formula

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \underline{P}_k\right) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\underline{P}_k \cdot \underline{P}_k}{m} - \sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}_k} V(\underline{q}_1 \cdots \underline{q}_N)$$

abbiamo prendendo il valore medio di entrambi i membri

$$\frac{d}{dt}\langle \sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \underline{P}_k \rangle = 0 = \langle \sum_{k=1}^{N} \frac{\underline{P}_k^2}{m} \rangle - \langle \sum_{k=1}^{N} \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}_k} V \rangle$$

$$\langle \sum_{k=1}^{N} \frac{\underline{P}_k^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \langle \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}_k} V \rangle$$

Nel caso $N=1$ e con potenziale $V(\underline{q}) = \frac{C}{|\underline{q}|}$ si ha

$$\langle \frac{P^2}{2m} \rangle = \frac{1}{2} \langle \underline{q}_k \cdot \nabla_{\underline{q}}\, C \left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right)^{-\frac{1}{2}} \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \langle C \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{2 q_x q_x + 2 q_y q_y + 2 q_z q_z}{\left(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2\right)^{3/2}} \rangle$$

$$= -\frac{1}{2} \langle V(\underline{q}) \rangle$$

L'energia cinetica è la metà, cambiata di segno, dell'energia potenziale.

Esercizio 4

L'equazione di Schrödinger stazionaria 1D

$$\psi_E''(x) = \frac{2m}{\hbar^2}\left(V(x) - E\right)\psi_E(x)$$

integrata due volte tra $x_0 < 0$ e $x > 0$ fornisce

$$\begin{cases} \psi_E'(x) - \psi_E'(x_0) = \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x_0}^{x}\left(V(y) - E\right)\psi_E(y)\,dy \\ \psi_E(x) - \psi_E(x_0) = (x - x_0)\psi_E'(x_0) + \frac{2m}{\hbar^2}\int_{x_0}^{x} dz \int_{x_0}^{z} dy \left(V(y) - E\right)\psi_E(y) \end{cases}$$

Prendendo i limiti $x_0 \to 0^-$ e $x \to 0^+$ otteniamo

$$\begin{cases} \psi_E'(0^+) - \psi_E'(0^-) = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}\psi_E(0) \\ \psi_E(0^+) - \psi_E(0^-) = 0 \end{cases}$$

Per $E < 0$ la soluzione può essere scritta come

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A e^{\kappa x} + A' e^{-\kappa x} & -\frac{a}{2} < x < 0 \\ B e^{\kappa x} + B' e^{-\kappa x} & 0 < x < \frac{a}{2} \end{cases}$$

dove $\kappa \equiv \frac{\sqrt{-2mE}}{\hbar} > 0$ e $\psi_E(x) = 0$ per $|x| > \frac{a}{2}$

Le costanti $A\ A'\ B\ B'$ vanno determinate con le condizioni

$$\begin{cases} A e^{-\frac{a}{2}\kappa} + A' e^{\kappa\frac{a}{2}} = 0 \\ B e^{\kappa\frac{a}{2}} + B' e^{-\kappa\frac{a}{2}} = 0 \\ A + A' = B + B' \\ \kappa(B - B') - \kappa(A - A') = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}(A + A') \end{cases}$$

Poichè $V(-x) = V(x)$ cioè $[H, P] = 0$ P = operatore parità
le autofunzioni di autovalori non degeneri (nel nostro caso tutte, anche quelle per $E \geq 0$) sono necessariamente pari o dispari.

$\underline{\psi_E \text{ pari}}$ $A = B'$ $A' = B$ il sistema si riduce a

$$\begin{cases} A e^{-\kappa \frac{a}{2}} + B e^{\kappa \frac{a}{2}} = 0 \\ 2\kappa (B - A) = -\lambda \frac{2m}{\hbar^2}(A + B) \end{cases}$$

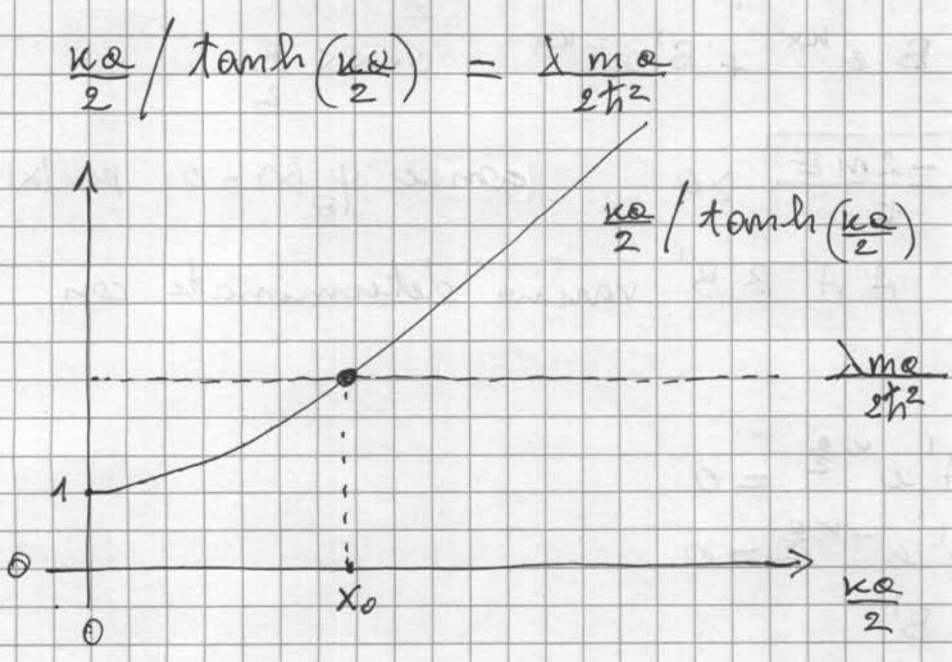
Deve aversi $A \neq 0$ altrimenti dalla prima eq. $A = B = 0$

$$\begin{cases} B = -A e^{-\kappa a} \\ -2\kappa A \left(e^{-\kappa a} + 1\right) = -\lambda \frac{2m}{\hbar^2} A \left(1 - e^{-\kappa a}\right) \end{cases}$$

$$2\kappa \left(e^{-\kappa a} + 1\right) = \lambda \frac{2m}{\hbar^2} \left(1 - e^{-\kappa a}\right)$$

$$2\kappa \cosh\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = \lambda \frac{2m}{\hbar^2} \sinh\left(\frac{\kappa a}{2}\right)$$

$$\frac{\kappa a}{2} \Big/ \tanh\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = \frac{\lambda m a}{2\hbar^2}$$



$\forall a, \lambda$ si ha 1 soluzione e 1 soltanto con $\kappa = \frac{2x_0}{a} \equiv \kappa_0$
ed energia $E_0 = \frac{\hbar^2 \kappa_0^2}{2m}$ ammesso che $\frac{\lambda m a}{2\hbar^2} > 1$

la corrispondente autofunzione è

$$\psi_{E_0}(x) = A\left(e^{-\kappa|x|} - e^{\kappa(|x|-a)}\right) \qquad |x| \le \frac{a}{2}$$

$$1 = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} |\psi_{E_0}(x)|^2 dx = 2|A|^2 \int_0^{\frac{a}{2}} \left(e^{-\kappa x} - e^{\kappa(x-a)}\right)^2 dx$$

$$= 2|A|^2 \left(\frac{e^{-2\kappa x}}{-2\kappa} + \frac{e^{2\kappa(x-a)}}{2\kappa} - 2e^{-\kappa a}\right)\Bigg|_0^{\frac{a}{2}}$$

$$= 2|A|^2 \left(\frac{\cancel{e^{-\kappa a}} - 1}{-2\kappa} + \frac{\cancel{e^{-\kappa a}} - e^{-2\kappa a}}{2\kappa} - 2e^{-\kappa a}\frac{a}{2}\right)$$

$$= \cancel{2}|A|^2 \frac{1 - e^{-2\kappa a} - 2e^{-\kappa a}\kappa a}{\cancel{2}\kappa}$$

$$A = \sqrt{\frac{\kappa}{1 - e^{-2\kappa a} - 2\kappa a e^{-\kappa a}}}$$

<u>ψ_E dispari</u> $\quad B' = -A \quad A' = -B \quad$ il sistema si riduce a

$$\begin{cases} A e^{-\kappa\frac{a}{2}} - B e^{\kappa\frac{a}{2}} = 0 \\ A - B = B - A \\ \kappa(B+A) - \kappa(A+B) = -\lambda\frac{2m}{\hbar^2}(A-B) \end{cases}$$

segue $A = B$ dalla seconda eq. mentre dalla prima abbiamo

$A \sinh\left(\frac{\kappa a}{2}\right) = 0$ che, dovendo essere $A \neq 0$, fornisce

$\kappa = 0$ la quale corrisponde a $\psi_E(x) \equiv 0$

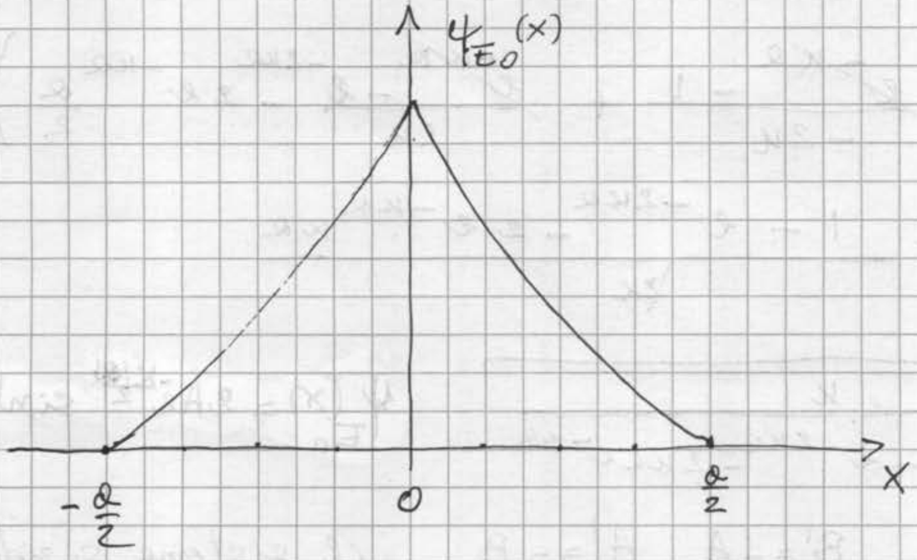
In conclusione, non abbiamo autostati dispari con $E<0$.

Se $\frac{\lambda m a}{2\hbar^2} > 1$ si ha 1 solo autostato pari

Se $\frac{\lambda m a}{2\hbar^2} < 1$ nessun autostato

$$\psi_{E_0}(x) = \sqrt{\frac{4\kappa e^{-\kappa a}}{1 - e^{-2\kappa a} - 2\kappa a e^{-\kappa a}}}\ \sinh\left(\kappa\left(|x| - \frac{a}{2}\right)\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\kappa}{\sinh(\kappa a) - \kappa a}}\ \sinh\left(\kappa\left(|x| - \frac{a}{2}\right)\right)$$



Esercizio 5

$$|\psi_0\rangle = a\,|-\rangle_z|+\rangle_z + b\,|+\rangle_z|-\rangle_z = a\,|-+\rangle_z + b\,|+-\rangle_z$$

$$1 = \langle\psi_0|\psi_0\rangle = |a|^2 + |b|^2$$

$$\text{prob}_{S_{2z}=\frac{\hbar}{2}} = |\langle++|\psi_0\rangle|^2 + |\langle+-|\psi_0\rangle|^2 = |a|^2 = \frac{1}{3}$$

scegliamo $a = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi} \qquad \phi \in \mathbb{R}$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|-+\rangle_z + \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi}\,|+-\rangle_z$$

$\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$ passando alla base di $S^2\, S_z\, S_1^2\, S_2^2$

$|s\, m\rangle$ con $0 \le s \le 1$ cioè $s = 0, 1$ e $-s \le m \le s$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\,0\rangle\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\,e^{i\phi}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\,0\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{6}}\,e^{i\phi}\right)|1,0\rangle + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}} + \sqrt{\frac{2}{6}}\,e^{i\phi}\right)|0,0\rangle$$

$$\text{prob}_{S^2=2\hbar^2} = \left|\frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\,e^{i\phi}\right|^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3}\cos\phi = \frac{1}{2}$$

$$\cos\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

$$e^{\pm i\frac{\pi}{2}} = \pm i$$

Abbiamo due stati $|\psi_0^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|-+\rangle_z \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}\,|+-\rangle_z$

ovvero $|\psi_0^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 \pm i\sqrt{2}\right)|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{6}}\left(1 \mp i\sqrt{2}\right)|0,0\rangle$

$$H = \frac{\omega}{\hbar}\,\underline{S}_1\cdot\underline{S}_2 = \frac{\omega}{2\hbar}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) = \frac{\omega}{2\hbar}\,S^2 - \frac{3}{4}\hbar\omega\,\mathbb{1}$$

$$H\,|1,0\rangle = \frac{\hbar\omega}{4}\,|1,0\rangle \qquad H\,|0,0\rangle = -\frac{3}{4}\hbar\omega\,|0,0\rangle$$

$$|\psi_0^\pm(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi_0^\pm\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt6}\left(1\pm i\sqrt2\right) e^{-\frac{i}{\hbar}\frac14\hbar\omega t}\,|1,0\rangle$$

$$- \frac{1}{\sqrt6}\left(1\mp i\sqrt2\right) e^{+\frac{i}{\hbar}\frac34\hbar\omega t}\,|0,0\rangle$$

$$= e^{\frac{i3}{4}\omega t}\left[\frac{1}{\sqrt6}\left(1\pm i\sqrt2\right)e^{-i\omega t}\,|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt6}\left(1\mp i\sqrt2\right)|0,0\rangle\right]$$

$$|\psi_0^\pm\left(\tfrac{\pi}{\omega}\right)\rangle = e^{i\frac{3\pi}{4}}\left[-\frac{1}{\sqrt6}\left(1\pm i\sqrt2\right)|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt6}\left(1\mp i\sqrt2\right)|0,0\rangle\right]$$

$$= -e^{i\frac{3\pi}{4}}\left[\frac{1}{\sqrt6}\left(1\pm i\sqrt2\right)\left(\frac{1}{\sqrt2}|+-\rangle + \frac{1}{\sqrt2}|-+\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt6}\left(1\mp i\sqrt2\right)\left(\frac{1}{\sqrt2}|+-\rangle - \frac{1}{\sqrt2}|-+\rangle\right)\right]$$

$$= -e^{-\frac{i3\pi}{4}}\left(\frac{1}{\sqrt3}|+-\rangle \pm i\sqrt{\frac23}\,|-+\rangle\right)$$

$$\langle\psi_0^\pm(t)|\,S_{1z}\,|\psi_0^\pm(t)\rangle = \frac13\frac{\hbar}{2} - \frac23\frac{\hbar}{2} = -\frac{\hbar}{6}$$

Dopo misure a $t=\frac{\pi}{\omega}$ di S^2 con risultato $2\hbar^2$ lo stato del sistema è

$$|\psi_0^\pm\left(\tfrac{\pi}{\omega}\right)\rangle_{a.m} = -e^{i\frac{3\pi}{4}}\frac{1}{\sqrt6}\left(1\pm i\sqrt2\right)|1,0\rangle\,\frac{1}{\text{normalizzazione}}$$

$$= |1,0\rangle$$

$$|\psi(\delta)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}H\delta}\,|\psi_0^\pm\left(\tfrac{\pi}{\omega}\right)\rangle_{a.m.} = e^{-\frac{i}{\hbar}H\delta}\,|1,0\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar\omega\delta}{4}}\,|1,0\rangle = e^{-\frac{i}{4}\omega\delta}\,|1,0\rangle$$

$$= e^{-i\frac{\omega}{4}\delta} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |-\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z \right)$$

$$= e^{-\frac{i\omega\delta}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(|+\rangle_x + |-\rangle_x\right) |-\rangle_z + \frac{1}{2}\left(|+\rangle_x - |-\rangle_x\right) |+\rangle_z \right]$$

$$= e^{-\frac{i\omega\delta}{4}} \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[|+\rangle_x \left(|-\rangle_z + |+\rangle_z\right) + |-\rangle_x \left(|-\rangle_z - |+\rangle_z\right) \right]$$

$$\text{prob}_{S_x=\frac{\hbar}{2}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \text{prob}_{S_x=-\frac{\hbar}{2}}$$

Esercizio 6

Funzione di partizione per N particelle $Z = \frac{Z_1^N}{N!}$

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int dq \int dp\, e^{-\beta H(q,p)}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_0^L dq\, e^{-\beta V_0 \frac{q}{L}} + \int_L^{2L} dq\, e^{-\beta 0}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dp\, e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{L}{\beta V_0} e^{-\beta V_0 \frac{q}{L}}\Big|_L^0 + L\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{L}{\beta V_0} - \frac{L}{\beta V_0}e^{-\beta V_0} + L\right)$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{2\pi m}\ \beta^{-1/2}\ \frac{L}{\beta V_0}\left(1 - e^{-\beta V_0} + \beta V_0\right)$$

$$= \frac{\sqrt{2\pi m}}{h V_0}\ \beta^{-3/2}\left(1 + \beta V_0 - e^{-\beta V_0}\right)$$

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{3}{2}\log\beta + \log\left(1+\beta V_0 - e^{-\beta V_0}\right)\right)$$

$$= N\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{V_0 + V_0 e^{-\beta V_0}}{1+\beta V_0 - e^{-\beta V_0}}\right)$$

$$\lim_{\beta\to\infty} E(\beta) = N\left(\frac{3}{2}\cdot 0 - \frac{V_0}{\infty}\right) = 0$$

Per $\beta \to 0$ $\quad E(\beta) \simeq N\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{V_0 + V_0(1-\beta V_0+\cdots)}{1+\beta V_0 - (1-\beta V_0+\cdots)}\right)$

$$= N\left(\frac{3}{2}\frac{1}{\beta} - \frac{2V_0}{2\beta V_0}\right) = N\,\frac{1}{2}k_B T$$

La probabilità che una particella sia nell'intervallo $[0,L]$ è

$$P_{[0,L]} = \frac{1}{Z_1}\int \frac{dq\,dp}{h}\, e^{-\beta H(q,p)}\ \mathbb{1}_{[0,L]}(q)$$

$$= \frac{1}{Z_1}\frac{1}{h}\int_0^L e^{-\beta V(q)}\,dq \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{\frac{L}{\beta V_0}\left(1-e^{-\beta V_0}\right)}{\frac{L}{\beta V_0}\left(1-e^{-\beta V_0}\right)+L}$$

$$= \frac{1}{1+\beta V_0\left(1-e^{-\beta V_0}\right)^{-1}}$$

$$\lim_{\beta\to 0} P_{[0,L]}(\beta) = \frac{1}{1+\frac{\beta V_0}{1-\left(1-\beta V_0+\cdots\right)}} = \frac{1}{1+\frac{\beta V_0}{\beta V_0}} = \frac{1}{2}$$

Per calcolare l'energia media del gas fermionico determiniamo prima la densità degli stati di singola particella.

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h}\int dq\int dp\ \delta\left(H(q,p)-\varepsilon\right)$$

$$= \frac{2}{h}\left[\int_0^L dq\int_{-\infty}^{+\infty} dp\ \delta\left(f(p)\right) + \int_L^{2L} dq\int_{-\infty}^{+\infty} dp\ \delta\left(\tilde{f}(p)\right)\right]$$

dove $f(p) = \frac{p^2}{2m} + V_0\frac{q}{L} - \varepsilon \qquad \tilde{f}(p) = \frac{p^2}{2m} - \varepsilon$

$f(p) = 0 \Rightarrow p = \pm p_0 \qquad p_0 = \sqrt{\left(\varepsilon - V_0\frac{q}{L}\right)2m} > 0$

$\tilde{f}(p) = 0 \Rightarrow p = \pm \tilde{p}_0 \qquad \tilde{p}_0 = \sqrt{\varepsilon\, 2m} > 0$

$$\delta\big(f(p)\big) = \frac{1}{|f'(p_0)|}\,\delta(p-p_0) + \frac{1}{|f'(-p_0)|}\,\delta(p+p_0)$$

$$= \frac{m}{p_0}\Big(\delta(p-p_0) + \delta(p+p_0)\Big)$$

$$\delta\big(\tilde{f}(p)\big) = \frac{m}{\tilde{p}_0}\Big(\delta(p-\tilde{p}_0) + \delta(p+\tilde{p}_0)\Big)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h}\left(\int_0^L dq\ \frac{2m}{p_0}\,\theta\!\left(\varepsilon - V_0\frac{q}{L}\right) + \int_L^{2L} dq\ \frac{2m}{\tilde{p}_0}\ \theta(\varepsilon)\right)$$

$$= \frac{2}{h}\left(\int_0^{\min(L,\,L\frac{\varepsilon}{V_0})} dq\ \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{\varepsilon - V_0\frac{q}{L}}} + \int_L^{2L} dq\ \frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{2L\sqrt{2m}}{h\sqrt{\varepsilon}}\,\theta(\varepsilon) + \frac{2}{h}\sqrt{2m}\,\theta(\varepsilon)\begin{cases}\displaystyle\int_0^L \frac{dq}{\sqrt{\varepsilon - V_0\frac{q}{L}}} & \varepsilon > V_0\\[2ex] \displaystyle\int_0^{L\frac{\varepsilon}{V_0}} \frac{dq}{\sqrt{\varepsilon - V_0\frac{q}{L}}} & \varepsilon < V_0\end{cases}$$

$$= \frac{2L}{h}\frac{\sqrt{2m}}{\sqrt{\varepsilon}}\,\theta(\varepsilon) + \frac{2L}{h}\frac{\sqrt{2m}}{V_0}\,\theta(\varepsilon)\begin{cases}\sqrt{\varepsilon} - \sqrt{\varepsilon - V_0} & \varepsilon > V_0\\[1ex] \sqrt{\varepsilon} & \varepsilon < V_0\end{cases}$$

$$E = \int^{\varepsilon_F = \frac{V_0}{2}} \varepsilon \, G(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\frac{V_0}{2}} \varepsilon \quad \frac{2L\sqrt{2m}}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{V_0}\right) d\varepsilon$$

$$= \frac{2L\sqrt{2m}}{h}\left(\frac{2}{3}\varepsilon^{3/2}\Big|_0^{\frac{V_0}{2}} + \frac{1}{V_0}\,\frac{2}{5}\varepsilon^{5/2}\Big|_0^{\frac{V_0}{2}}\right)$$

$$= \frac{2L\sqrt{2m}}{h}\left(\frac{2}{3}\left(\frac{V_0}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{V_0}\,\frac{2}{5}\left(\frac{V_0}{2}\right)^{5/2}\right)$$

$$= \frac{2L\sqrt{2m}\,V_0^{3/2}}{h}\left(\frac{2}{3\cdot 2\sqrt{2}} + \frac{2}{5\cdot 4\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{L\sqrt{m}\,V_0^{3/2}}{h}\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{13}{15}\,\frac{\sqrt{m}\,V_0^{3/2}L}{h}$$

Si noti che il numero di particelle per $\varepsilon_F = V_0/2$ è

$$N = \int^{\varepsilon_F = \frac{V_0}{2}} G(\varepsilon)\,d\varepsilon = \int_0^{\frac{V_0}{2}} \frac{2L\sqrt{m}}{h}\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\sqrt{\varepsilon}}{V_0}\right) d\varepsilon$$

$$= \frac{2L\sqrt{m}}{h}\left(2\,\varepsilon^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{V_0}\,\frac{2}{3}\,\varepsilon^{3/2}\right)\Big|_0^{\frac{V_0}{2}} = \frac{14}{3}\,\frac{L\sqrt{m}}{h}\sqrt{V_0}$$

Pertanto

$$E = \frac{13}{15}\left(\frac{14}{3}\,\frac{L\sqrt{m}}{h}\sqrt{V_0}\right)\frac{3}{14}\,V_0$$

$$= \frac{13}{70}\,V_0\,N = \frac{13}{35}\,\varepsilon_F\,N$$