MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2018/2019 – Prof. C. Presilla
Prova A4 – 15 luglio 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Un sistema unidimensionale è descritto dalla Hamiltoniana

$$H = K + V, \qquad K = ap^2, \qquad V = bq^4, \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

essendo q e p gli operatori canonici di posizione e quantità di moto. Dimostrare che in ogni autostato $|\psi\rangle$ di H risulta $\langle\psi|K|\psi\rangle = 2\langle\psi|V|\psi\rangle$.

[punteggio 4]]

---

2 Gli operatori di innalzamento e abbassamento del momento angolare, $J_\pm = J_x + \mathrm{i}J_y$, agiscono sugli autostati $|j, m\rangle$ di J^2 e J_z nel modo seguente:

$$J_\pm|j, m\rangle = c_\pm|j, m \pm 1\rangle.$$

Determinare i coefficienti $c_\pm$ assumendo la normalizzazione degli autostati di J^2 e J_z.

[punteggio 4]

---

3 Un sistema di bosoni non interagenti è a contatto con un reservoir a temperatura $T = 1/(k_B\beta)$ e potenziale chimico μ ed è caratterizzato da energie di singola particella ε_p, $p = 1, 2, 3, \dots$. Calcolare la funzione di gran partizione Z_G del sistema in termini di β, μ e delle energie ε_p.

[punteggio 4]

---

4 Una particella di spin 1/2 interagisce con un campo magnetico costante $\boldsymbol{B}$. La massa della particella è così grande da rendere trascurabile il termine cinetico e l'Hamiltoniana è

$$H = -g\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{B},$$

dove $\boldsymbol{S}$ è l'operatore di spin e g una costante positiva. Il campo magnetico è diretto lungo l'asse x e all'istante $t = 0$ una misura di S_z fornisce il valore $\hbar/2$. Determinare:
1) lo stato del sistema al tempo $t = 0$ subito dopo la misura di S_z;
2) lo stato del sistema al generico tempo $t > 0$;
3) le probabilità che una misura di S_y al tempo t fornisca i valori $\pm\hbar/2$;
4) la correzione indotta sull'energia dello stato fondamentale di H, al primo e al secondo ordine, dalla perturbazione $H_P = \lambda S_z$.

[punteggio 7]

---

5 Una particella di massa m è vincolata all'interno di un segmento unidimensionale di larghezza a. L'Hamiltoniana corrispondente è

$$h(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q), \qquad V(q) = \begin{cases} 0 & 0 \le q \le a \\ \infty & q < 0,\ q > a \end{cases} .$$

Determinare:
1) autovalori e autofunzioni di h.
Si consideri ora un sistema di tre particelle identiche di massa m e spin 1/2 vincolate all'interno dello stesso segmento e descritte dalla Hamiltoniana

$$H = \sum_{i=1}^{3} h(q_i, p_i) + \alpha \left(\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_2 \cdot \boldsymbol{S}_3 + \boldsymbol{S}_3 \cdot \boldsymbol{S}_1 \right),$$

dove $\boldsymbol{S}_i$ è lo spin della i-esima particella e α una costante negativa. Sapendo che una misura della componente z dello spin totale del sistema $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3$ fornisce con certezza il valore $+\frac{3}{2}\hbar$, determinare:
2) autofunzioni e autovalori di H;
3) l'energia dello stato fondamentale di H.

[punteggio 7]

---

6 Un sistema di N particelle identiche di massa m, non interagenti mutuamente, è vincolato a muoversi su un piano. L'Hamiltoniana di singola particella è

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + \alpha\, |\boldsymbol{q}|^4, \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2,$$

dove α è una costante positiva. Considerando le particelle come classiche e all'equilibrio termico a temperatura T, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) la distanza più probabile q_0 a cui una particella può essere trovata dal centro del piano.
Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, calcolare:
3) l'energia di Fermi ϵ_F del sistema.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Ricordando che

$$[q, f(p)] = i\hbar \frac{\partial f}{\partial p} \qquad [p, f(q)] = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial q}$$

si ha

$$\begin{aligned}[pq, H] &= [pq, K] + [pq, V] \\ &= p[q, K] + [p, V]q \\ &= p[q, a p^2] + [p, b q^4]\, q \\ &= i\hbar\, 2a\, p^2 - i\hbar\, 4b\, q^4\end{aligned}$$

Se $|\psi\rangle$ è un autostato di H

$$0 = \langle\psi|[pq, H]|\psi\rangle = 2i\hbar \langle\psi|K|\psi\rangle - 4i\hbar\langle\psi|V|\psi\rangle$$

cioè $\qquad \langle\psi|K|\psi\rangle = 2\langle\psi|V|\psi\rangle$

Esercizio 2

$$J_{\pm} |j,m\rangle = c_{\pm} |j, m\pm 1\rangle$$

le relazioni duali sono $(J_{\pm})^{\dagger} = J_{\mp}$

$$\langle j,m| J_{\mp} = \overline{c_{\pm}} \langle j, m\pm 1|$$

$$\langle j,m| J_{\mp} J_{\pm} |j,m\rangle = |c_{\pm}|^2 \langle j,m\pm 1|j,m\pm 1\rangle$$

imponendo $\langle j,m|j,m\rangle = \langle j,m\pm 1|j,m\pm 1\rangle = 1$

e usando

$$\begin{aligned} J_{\mp} J_{\pm} &= (J_x \mp i J_y)(J_x \pm i J_y) \\ &= J_x^2 + J_y^2 \pm i (J_x J_y - J_y J_x) \\ &= J^2 - J_z^2 \pm i \, i\hbar J_z \\ &= J^2 - J_z^2 \mp \hbar J_z \end{aligned}$$

si ha

$$|c_{\pm}|^2 = \hbar^2 j(j+1) - (\hbar m)^2 \mp \hbar m \hbar$$

scegliendo $c_{\pm}$ reali

$$c_{\pm} = \hbar \sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}$$

Detta n_p l'occupazione dello stato di singola particella a energia ε_p, nel caso di bosoni si ha $n_p = 0, 1, 2, \dots$

L'energia di N particelle con occupazioni $\{n_p\}$ $p = 1, 2, 3, \dots$ ammonta a

$$E(\{n_p\}) = \sum_p n_p \varepsilon_p \quad \text{con vincolo} \quad \sum_p n_p = N$$

La funzione di gran partizione è quindi

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}:\, \sum_p n_p = N} e^{-\beta\left(E(\{n_p\}) - \mu N\right)}$$

$$= \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta\left(\sum_p n_p \varepsilon_p - \mu \sum_p n_p\right)}$$

$$= \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta \sum_p (\varepsilon_p - \mu) n_p}$$

$$= \prod_p \sum_{n_p=0}^{\infty} e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu) n_p}$$

$$= \prod_p \frac{1}{1 - e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}}$$

Esercizio 4

$$H = -g\,\underline{S}\cdot\underline{B} = -gBS_x = -gB\frac{\hbar}{2}\sigma_x = -\hbar\omega\,\sigma_x$$

avendo posto $\omega = \frac{1}{2}gB$

ed essendo $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ che ha autovalori ± 1

e autovettori $|+\rangle_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad |-\rangle_x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

1) All'istante $t=0$ lo stato della particella è

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Al tempo $t>0$ si ha

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi(0)\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}t(-\hbar\omega)}\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + e^{-\frac{i}{\hbar}t(+\hbar\omega)}\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|-\rangle_x$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ i\sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

3) Ricordando che $S_y = \frac{\hbar}{2}\sigma_y$ $\qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$

$$\sigma_y|\pm\rangle_y = \pm|\pm\rangle_y$$

$$|+\rangle_y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |-\rangle_y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

si ha

$$\text{prob}\left(S_y = +\frac{\hbar}{2}\right) = \left| {}_y\langle + | \psi(t)\rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -i) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ i \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) + 2 \cos(\omega t) \sin(\omega t) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \sin(2\omega t) \right)$$

$$\text{prob}\left(S_y = -\frac{\hbar}{2}\right) = \left| {}_y\langle - | \psi(t)\rangle \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} (1, i) \begin{pmatrix} \cos(\omega t) \\ i \sin(\omega t) \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= \left| \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos(\omega t) - \sin(\omega t) \right) \right|^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \sin(2\omega t) \right)$$

4) Gli autovalori e gli autostati di H, imperturbati, sono

$$E_0^{(0)} = -\hbar\omega \qquad |E_0^{(0)}\rangle = |+\rangle_x$$

$$E_1^{(0)} = +\hbar\omega \qquad |E_1^{(0)}\rangle = |-\rangle_x$$

Il termine $H_p = \lambda S_z$ perturba $E_0^{(0)}$ in
$E_0^{(0)} + \lambda E_0^{(1)} + \lambda^2 E_0^{(2)} + \dots$

dove

$$E_0^{(1)} = \langle E_0^{(0)} | \frac{H_p}{\lambda} | E_0^{(0)} \rangle = 0$$

$$E_0^{(2)} = - \frac{\left| \langle E_1^{(0)} | \frac{H_p}{\lambda} | E_0^{(0)} \rangle \right|^2}{E_1^{(0)} - E_0^{(0)}}$$

$$= - \frac{1}{2\hbar\omega} \left| \frac{\hbar}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} (1, -1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= - \frac{\hbar^2/4}{2\hbar\omega} \left| \frac{1}{2} (1, -1) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right|^2$$

$$= - \frac{\hbar^2}{8\hbar\omega}$$

Pertanto $E_0 = -\hbar\omega - \frac{\hbar^2 \lambda^2}{8\hbar\omega} + O(\lambda^3)$

Esercizio 5

1) per $0 \le q \le a$ $\quad h\,\varphi(q) = \mathcal{E}\,\varphi(q)$ $\quad$ fornisce

$$\varphi''(q) = -\frac{2m}{\hbar^2}\,\mathcal{E}\,\varphi(q) \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2m\mathcal{E}}{\hbar^2}}$$

$$\varphi(q) = A e^{ikq} + B e^{-ikq}$$

che va risolta con condizioni al bordo

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0$$

$\varphi(0) = 0$ implica $A + B = 0$ cioè $B = -A$

$\varphi(a) = 0$ implica $A e^{ika} - A e^{-ika} = 0$

cioè $\sin(ka) = 0$ $\quad A \neq 0$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{a} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m a^2} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

$\varphi_n(q) = A \sin(k_n q)$ $\quad$ A determinato dalla normalizzazione

$$1 = \int |\varphi_n(q)|^2 dq = |A|^2 \int_0^a \sin^2\left(\frac{n\pi}{a} q\right) dq$$

$$= |A|^2 \int_0^{n\pi} \sin^2(t)\, dt\, \frac{a}{n\pi}$$

$$= |A|^2\, n \frac{\pi}{2} \frac{a}{n\pi}$$

$$= |A|^2 \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

$$\varphi_n(q) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{n\pi q}{a}\right)$$

2) Posto $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3$ si ha

$$S^2 = \underline{S} \cdot \underline{S} = S_1^2 + S_2^2 + \underline{S}_3^2 + 2\,\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 + 2\,\underline{S}_2 \cdot \underline{S}_3 + 2\,\underline{S}_3 \cdot \underline{S}_1$$

Pertanto

$$H = h(q_1 p_1) + h(q_2 p_2) + h(q_3 p_3) + \frac{\alpha}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2\right)$$

con $S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \hbar^2 \frac{3}{4}$

Poiché le misure di S_z forniscono con certezza $+\frac{3}{2}\hbar$,
il valore di S^2 deve essere $\hbar^2 \frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) = \hbar^2 \frac{15}{4}$
e quindi

$$\frac{\alpha}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2\right) = \frac{\alpha}{2}\hbar^2\left(\frac{15}{4} - \frac{9}{4}\right) = \frac{3}{4}\alpha\hbar^2$$

Le autofunzioni di H sono il prodotto
delle autofunzioni di spin e spaziale.
L'autofunzione di spin è simmetrica(*)

$$\chi_{S S_z} = \chi_{\frac{3}{2}\frac{3}{2}} = \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(1)\, \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(2)\, \chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}}(3)$$

La parte spaziale deve essere antisimmetrica(*)

$$\psi_{n_1 n_2 n_3}(q_1, q_2, q_3) = \frac{1}{\sqrt{3!}} \det\begin{pmatrix} \varphi_{n_1}(q_1) & \varphi_{n_1}(q_2) & \varphi_{n_1}(q_3) \\ \varphi_{n_2}(q_1) & \varphi_{n_2}(q_2) & \varphi_{n_2}(q_3) \\ \varphi_{n_3}(q_1) & \varphi_{n_3}(q_2) & \varphi_{n_3}(q_3) \end{pmatrix}$$

L'autovalore corrispondente è

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}\left(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2\right) + \frac{3}{4}\alpha\hbar^2$$

(*) rispetto allo scambio di qualsiasi coppia di fermioni

3) lo stato fondamentale ad energia minima è ottenuto prendendo per n_1 n_2 n_3 i 3 valori più piccoli ma diversi tra loro: $n_1=1$ $n_2=2$ $n_3=3$

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}(1+4+9) + \frac{3}{4}\alpha\hbar^2$$

$$= \hbar^2\left(\frac{7\pi^2}{ma^2} + \frac{3}{4}\alpha\right)$$

Si noti che questo stato è non degenere poiché gli stati $\varphi_{n_1 n_2 n_3}(q_1 q_2 q_3)$ non cambiano al cambiare dell'ordine di n_1, n_2, n_3. Detto in altri termini non posso sapere quale particella sta in quale stato.

Esercizio 6

1) $$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^2}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\, e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\, e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}}\int_0^{\infty} 2\pi dq\, q\, e^{-\beta\alpha q^4}$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^2 2\pi\int_0^{\infty}\frac{du}{2\sqrt{\alpha\beta}}e^{-u^2} \qquad \sqrt{\alpha\beta}\, q^2 = u$$

$$= \frac{1}{h^2}\frac{2\pi m}{\beta}\, 2\pi\,\frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{\alpha\beta}}$$

$$= \frac{\pi^{5/2} m}{h^2\alpha^{1/2}}\,\beta^{-3/2}$$

$$E = -N\left(-\frac{3}{2}\frac{1}{\beta}\right) = \frac{3}{2}N k_B T$$

2) la probabilità di trovare 4 particella a distanza q dall'origine del piano π.

$$P(q) = \text{costante}\quad q\, e^{-\beta\alpha q^4}$$

questa funzione ha un massimo nel punto q_0 dato da $P'(q_0) = 0$

$$e^{-\beta\alpha q_0^4}\left(1 - 4\beta\alpha q_0^4\right) = 0$$

$$q_0 = \left(\frac{1}{4\beta\alpha}\right)^{1/4} = \left(\frac{k_B T}{4\alpha}\right)^{1/4}$$

3) Sia $N(E)$ il numero di particelle a energia minore di E. Per fermioni a spin 1/2 a $T=0$ si ha

$$N(E) = \frac{2}{h^2}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\ \theta\left(E - H(\underline{q},\underline{p})\right)$$

$$= \frac{2}{h^2}\int_0^{(E/\alpha)^{1/4}} 2\pi q\, dq \int_0^{\sqrt{(E-\alpha q^4)2m}} 2\pi p\, dp$$

$$= \frac{2}{h^2}\int_0^{(E/\alpha)^{1/4}} dq\, 2\pi q\, \pi\, 2m\left(E - \alpha q^4\right)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(E\frac{q^2}{2} - \alpha\frac{q^6}{6}\right)\Bigg|_0^{(E/\alpha)^{1/4}}$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\frac{1}{2}\frac{E^{3/2}}{\alpha^{1/2}} - \frac{\alpha}{6}\frac{E^{3/2}}{\alpha^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\ \frac{1}{3}\frac{E^{3/2}}{\alpha^{1/2}}$$

L'energia di Fermi è data dalla relazione

$$N(e_F) = N$$

$$e_F = \left(\frac{3h^2\alpha^{1/2}N}{8\pi^2 m}\right)^{2/3}$$

Alternativamente

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^2} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; \delta\left(\varepsilon - H(\underline{q},\underline{p})\right)$$

$$= \frac{2}{h^2} \int d\underline{q} \int_0^\infty 2\pi p \, dp \; \delta\Big(\underbrace{\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - \alpha|\underline{q}|^4}_{f(p)}\Big)$$

$f(p) = 0 \qquad p = \pm p_0 \qquad p_0 = \sqrt{2m(\varepsilon - \alpha|\underline{q}|^4)}$

$f'(p_0) = \frac{p_0}{m} \qquad\qquad p_0 \in \mathbb{R}$ se $\varepsilon > \alpha|\underline{q}|^4$

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^2} \int_0^\infty 2\pi q \, dq \; \frac{m}{\sqrt{2m(\varepsilon - \alpha q^4)}} \; 2\pi \sqrt{2m(\varepsilon - \alpha|q|^4)} \; \theta(\varepsilon - \alpha q^4)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^{(\varepsilon/\alpha)^{1/4}} q \, dq = \frac{8\pi^2 m}{h^2} \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2} = \frac{4\pi^2 m}{h^2} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/2}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon G(\varepsilon')\, d\varepsilon' = \frac{4\pi^2 m}{h^2} \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{2}{3} \varepsilon^{3/2} = \frac{8\pi^2 m}{3h^2} \frac{\varepsilon^{3/2}}{\alpha^{1/2}}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N$$

$$\frac{8\pi^2 m}{3h^2 \alpha^{1/2}} \varepsilon_F^{3/2} = N$$

$$\varepsilon_F = \left(N \frac{3h^2 \alpha^{1/2}}{8\pi^2 m}\right)^{2/3}$$