MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2020/2021 – Prof. C. Presilla

Prova A2 – 17 febbraio 2021

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\boldsymbol{r}) = (x^2 + y^2) f(r), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z), \qquad r = |\boldsymbol{r}|\,.$$

Quali sono i possibili risultati di una misura di L_z, terza componente del momento angolare orbitale $\boldsymbol{L}$ della particella?

[punteggio 4]]

---

2 Due osservabili, rappresentate dagli operatori ξ ed η autoaggiunti, anticommutano, cioè $\xi\eta + \eta\xi = 0$, e inoltre $\xi^2 = \eta^2 = 1$. Supponendo che η abbia autovalori non degeneri (ovvero che lo spazio di Hilbert abbia dimensione 2), determinare l'espressione delle matrici che rappresentano le due osservabili nella base degli autovettori di η.

[punteggio 4]

---

3 A partire dalla formula di Sakur-Tetrode per l'entropia di un gas ideale di N particelle contenute in un volume V all'equilibrio microcanonico a energia E,

$$S = k_{\mathrm{B}} N \log \left(\frac{V}{N} \left(\frac{4\pi m E}{3 N h^2} \right)^{3/2} e^{5/2} \right),$$

e considerando che all'equilibrio canonico a temperatura T c'è una precisa relazione tra E e T, ricavare la seguente formula per il potenziale chimico del gas ideale all'equilibrio canonico

$$\mu = k_{\mathrm{B}} T \log \left(n \lambda^3 \right), \qquad n \equiv N/V, \qquad \lambda \equiv h/\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}.$$

[punteggio 4]

---

4 Lo spazio di Hilbert di un sistema quantistico è rappresentato da tre stati ortonormali $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ e l'Hamiltoniana del sistema vale

$$H = \hbar\omega_1 \left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3|\right) + \hbar\omega_2 \left(|1\rangle\langle 1| + |3\rangle\langle 3| + |1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|\right) + \hbar\omega_3 |2\rangle\langle 2|,$$

con $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ numeri positivi incommensurabili.
1) Determinare autovalori e autovettori normalizzati di H, esprimendo quest'ultimi in termini dei vettori di base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$;
Si consideri l'operatore

$$M = \mu_1 |1\rangle\langle 1| + \mu_2 |2\rangle\langle 2| + \mu_3 |3\rangle\langle 3|,$$

con μ_1, μ_2, μ_3 numeri reali tutti diversi tra loro. All'istante $t = 0$ il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle$ tale che una misura di M fornisce con certezza il valore μ_1.
2) Determinare i possibili risultati di una misura di H stante il sistema nello stato $|\psi\rangle$ e le relative probabilità di occorrenza.
3) Si calcoli la probabilità $P(t)$ di ottenere μ_3 come risultato di una misura di M al tempo $t > 0$.
4) Stabilire il più piccolo tempo t_0 in cui $P(t)$ risulta massima.

[punteggio 7]

---

5 Due particelle identiche di massa m e spin 1 sono vincolate in una dimensione con Hamiltoniana

$$H = H_1(q_1, p_1) + H_2(q_2, p_2) + \frac{2\alpha}{\hbar^2} \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2, \qquad H_j(q_j, p_j) = \frac{p_j^2}{2m} + V(q_j), \quad j = 1, 2,$$

dove $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ sono gli operatori di spin delle due particelle, $\alpha = \hbar^2\pi^2/(2mL^2)$ con $L > 0$ e

$$V(q) = \begin{cases} 0, & 0 < q < L, \\ \infty, & q < 0,\ q > L. \end{cases}$$

Determinare:
1) autovalori e autovettori di H;
2) energia, degenerazione e autovettori corrispondenti dello stato fondamentale;
3) del primo stato eccitato;
4) del secondo stato eccitato;
5) del terzo stato eccitato.

[punteggio 7]

---

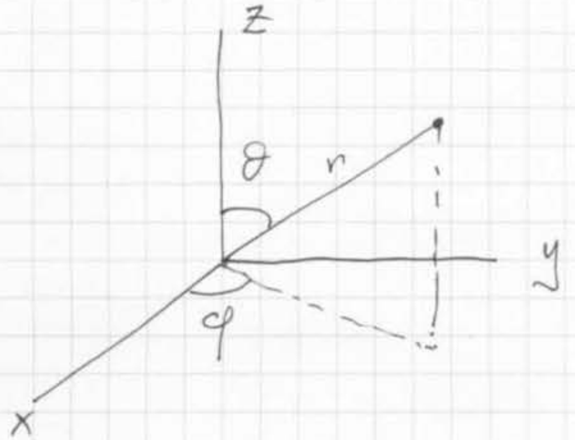
6 Un gas ideale costituito da N particelle identiche di massa m è vincolato lungo l'asse x con Hamiltoniana di singola particella

$$H(x, p_x) = \frac{p_x^2}{2m} + V(x), \qquad V(x) = \begin{cases} -\frac{V_0 x}{\lambda\gamma} & x < 0, \\ \frac{V_0 \gamma x}{\lambda} & x > 0, \end{cases}$$

dove V_0, γ, λ sono costanti positive. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare:
1) l'energia media E del gas;
2) il valore di γ per il quale l'entropia S del gas assume valore minimo;
3) la posizione media delle particelle $\langle x\rangle$ per tale valore di γ.
4) Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 determinare, a temperatura $T = 0$ e per un arbitrario valore di γ, l'energia di Fermi ϵ_F.

[punteggio 7]

Esercizio ①



$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta$$

Risulta
$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \sin^2\theta \cos^2\varphi + r^2 \sin^2\theta \sin^2\varphi \\ &= r^2 \sin^2\theta \\ &= r^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \frac{r^2}{3}(1 - 3\cos^2\theta) + \frac{2}{3} r^2 \\ &= -\frac{r^2}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} \sqrt{\frac{5}{16\pi}}(3\cos^2\theta - 1) + \frac{2}{3} r^2 \sqrt{4\pi} \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \\ &= \frac{2}{3} r^2 \sqrt{4\pi}\, Y_{00}(\theta,\varphi) - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 Y_{20}(\theta,\varphi) \end{aligned}$$

dove $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ sono le armoniche sferiche autofunzioni contemporanee di L^2 e L_z

$$L^2 Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1) Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$
$$L_z Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar m Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

In definitiva

$$\psi(\underline{r}) = \frac{2}{3}\sqrt{4\pi}\, r^2 f(r) Y_{00}(\theta,\varphi) - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{16\pi}{5}} r^2 f(r) Y_{20}(\theta,\varphi)$$

In una misura di L_z possiamo trovare solo il valore $\hbar \cdot 0$

Se misurassimo L^2 troveremmo il valore $\hbar^2 0$ con probabilità

$$P_0 = \frac{\frac{16\pi}{9}\int_0^\infty r^4 f(r)^2 dr}{\frac{16\pi}{9}\int_0^\infty r^4 f(r)^2 dr + \frac{16\pi}{45}\int_0^\infty r^4 f(r)^2 dr} = \frac{5}{6}$$ o il valore $\hbar^2 \cdot 6$

con probabilità $1 - P_0 = \frac{1}{6}$

Esercizio 2

Poiché $\eta^2 = 1$ gli autovalori di η possono essere solo ± 1:

$$\eta|v\rangle = \lambda|v\rangle \quad |v\rangle = \eta^2|v\rangle = \lambda\,\eta|v\rangle = \lambda^2|v\rangle \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

e quindi $\lambda = \pm 1$

deve essere perciò (autovalori non degeneri e $\dim \mathcal{H} = 2$)

$\eta \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base degli autovettori di η. Nella stessa base

posto $\xi \to \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$ dalla relazione $\eta\xi + \xi\eta = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ -\xi_{21} & -\xi_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11} & -\xi_{12} \\ \xi_{21} & -\xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_{11} & 0 \\ 0 & -2\xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\xi_{11} = \xi_{22} = 0$.

Poiché $\xi = \xi^\dagger$ deve essere $\xi_{12} = \overline{\xi_{21}}$ e infine poiché $\xi^2 = 1$

risulta $\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} \\ \overline{\xi_{12}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} \\ \overline{\xi_{12}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\xi_{12}|^2 & 0 \\ 0 & |\xi_{12}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

cioè $|\xi_{12}|^2 = 1$,

Possiamo porre $\xi_{12} = e^{i\varphi}$ $\varphi \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\xi \to \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio (3)

All'equilibrio microcanonico

$$S = k_B N \log\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2} e^{5/2}\right)$$

Il potenziale chimico per equilibrio tra due sottosistemi che si scambiano particelle e siano globalmente in equilibrio microcanonico è dato da:

$$\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial N}\right)_{E,V}$$

$$= -T\left[k_B \log\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2} e^{5/2}\right) + k_B N\left(-\frac{5}{2}\frac{1}{N}\right)\right]$$

$$= -k_B T \log\left(\frac{V}{N}\left(\frac{4\pi m E}{3h^2 N}\right)^{3/2}\right)$$

In questa formula T è la temperatura di equilibrio tra i due sottosistemi. Se uno dei due sottosistemi è un reservoir a temperatura T e l'altro sottosistema è in equilibrio canonico, abbiamo dal teorema di equipartizione

$E/N = \frac{3}{2} k_B T$ (gas ideale 3D)

Allora $$\frac{3h^2 N}{4\pi m E} = \frac{3h^2}{4\pi m \frac{3}{2} k_B T} = \frac{h^2}{2\pi m k_B T} = \lambda^2$$

e concludiamo

$$\mu = -k_B T \log\left(\left(\frac{N}{V}\lambda^3\right)^{-1}\right) = k_B T \log\left(\frac{N}{V}\lambda^3\right)$$

Alternativamente, si osservi che all'equilibrio canonico l'entropia è uguale a quella calcolata all'equilibrio microcanonico con E pari al valore medio $E = \frac{3}{2} k_B T N$:

$$S = k_B N \log\left(\frac{V}{N}\left(\frac{2\pi m k_B T}{h^2}\right)^{3/2} e^{5/2}\right).$$

Il potenziale chimico può essere calcolato dalla relazione

$\mu = \left(\frac{\partial F}{\partial N}\right)_{T,V}$ dove F è l'energia libera canonica

$$F = E - TS$$

$$= \frac{3}{2} N k_B T - k_B T N \log\left(\frac{V}{N} \frac{1}{\lambda^3} e^{5/2}\right)$$

$$= N k_B T \left[\frac{3}{2} + \log\left(\frac{N}{V} \lambda^3 e^{-5/2}\right)\right]$$

Quindi

$$\mu = k_B T \left[\frac{3}{2} + \log\left(\frac{N}{V} \lambda^3 e^{-5/2}\right)\right] + N k_B T \frac{1}{N}$$

$$= k_B T \left[\frac{3}{2} + \log\left(\frac{N}{V} \lambda^3\right) - \frac{5}{2} + 1\right]$$

$$= k_B T \log\left(n \lambda^3\right).$$

Esercizio (4)

Nella base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ H è rappresentato dalla matrice

$$H \rightarrow \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 & 0 & \hbar\omega_2 \\ 0 & \hbar\omega_3 & 0 \\ \hbar\omega_2 & 0 & \hbar\omega_1 + \hbar\omega_2 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$\det(H - \lambda \mathbb{1}) = 0$

Poiché scambiando due righe o due colonne di una matrice il suo determinante cambia segno, l'equazione è equivalente a

$$\det \begin{pmatrix} \hbar(\omega_1+\omega_2) - \lambda & \hbar\omega_2 & 0 \\ \hbar\omega_2 & \hbar(\omega_1+\omega_2) - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \hbar\omega_3 - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

che ha soluzioni

$\lambda = \hbar\omega_3 \qquad \lambda = \hbar(\omega_1 + \omega_2) \pm \hbar\omega_2$

Gli autovalori di H sono quindi

$E_1 = \hbar\omega_1 \qquad E_2 = \hbar\omega_1 + 2\hbar\omega_2 \qquad E_3 = \hbar\omega_3$

Posto $|E_1\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$ si ha

$$\begin{cases} \hbar(\omega_1+\omega_2)\, a + \hbar\omega_2\, c = \hbar\omega_1\, a \\ \hbar\omega_3\, b = \hbar\omega_1\, b \\ \hbar\omega_2\, a + \hbar(\omega_1+\omega_2)\, c = \hbar\omega_1\, c \end{cases}$$

dalla seconda equazione abbiamo $b=0$, dalla prima (o dalla terza) $a + c = 0$. Dunque $|E_1\rangle = a(|1\rangle - |3\rangle)$

Normalizzando $|E_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |3\rangle)$

Analogamente, posto $|E_2\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$ si ha

$$\begin{cases} \hbar(\omega_1+\omega_2)\, a + \hbar\omega_2\, c = \hbar(\omega_1+2\omega_2)\, a \\ \hbar\omega_3\, b = \hbar(\omega_1+2\omega_2)\, b \\ \hbar\omega_2\, a + \hbar(\omega_1+\omega_2)\, c = \hbar(\omega_1+2\omega_2)\, c \end{cases}$$

Di nuovo $b=0$ dalla seconda equazione, mentre $c=a$ dalla prima o dalla terza. Quindi $|E_2\rangle = a(|1\rangle + |3\rangle)$ che normalizzata dà $|E_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle + |3\rangle)$.

Infine, ponendo $|E_3\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle + c|3\rangle$ abbiamo

$$\begin{cases} \hbar(\omega_1+\omega_2)\, a + \hbar\omega_2\, c = \hbar\omega_3\, a \\ \hbar\omega_3\, b = \hbar\omega_3\, b \\ \hbar\omega_2\, a + \hbar(\omega_1+\omega_2)\, c = \hbar\omega_3\, c \end{cases}$$

Dalla prima equazione troviamo $c = a\,(\omega_3 - \omega_1 - \omega_2)/\omega_2$ che sostituita nella terza dà $a = a\,(\omega_3-\omega_1-\omega_2)^2/\omega_2^2$ cioè $a=c=0$. Segue $|E_3\rangle = |2\rangle$ normalizzato

Nella base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ l'operatore M è diagonale e il suo autostato corrispondente all'autovalore μ_1 è $|1\rangle$.
Quindi $|\psi\rangle = |1\rangle$ stato del sistema al tempo $t=0$
Risulta pertanto

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} |E_i\rangle\langle E_i|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{3} |E_i\rangle\langle E_i|1\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle$$

Una misura di H stante il sistema nello stato $|\psi\rangle$ può fornire i valori

E_1 con probabilità $\frac{1}{2} = |\langle E_1|\psi\rangle|^2$

E_2 〃 〃 $\frac{1}{2} = |\langle E_2|\psi\rangle|^2$

Al tempo $t>0$ lo stato è

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi\rangle$$
$$= \sum_{k=1}^{3} e^{-\frac{i}{\hbar}E_k t}|E_k\rangle\langle E_k|\psi\rangle$$
$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_1 t}\frac{1}{\sqrt{2}}|E_1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_2 t}\frac{1}{\sqrt{2}}|E_2\rangle$$
$$= e^{-i\omega_1 t}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle - |3\rangle\right) + e^{-i(\omega_1+2\omega_2)t}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle + |3\rangle\right)$$
$$= e^{-i\omega_1 t}\left(\frac{1}{2}|1\rangle\left(1+e^{-2i\omega_2 t}\right) - \frac{1}{2}|3\rangle\left(1-e^{-2i\omega_2 t}\right)\right)$$

Una misura di M al tempo t può fornire il risultato μ_3 con probabilità

$$P(t) = \left|\langle 3|\psi,t\rangle\right|^2 = \left|-\frac{1}{2}\left(1-e^{-2i\omega_2 t}\right)\right|^2$$
$$= \frac{1}{4}\left(1+1-e^{-2i\omega_2 t}-e^{2i\omega_2 t}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left(1-\cos(2\omega_2 t)\right)$$

La probabilità $P(t)$ ha massimi che valgono 1 ai tempi t_n

$2\omega_2 t_n = (2n+1)\pi \qquad n = 0, 1, 2, \dots$

Quindi $t_0 = \frac{\pi}{2\omega_2}$

Esercizio 5

Poniamo $H = H_{space} + H_{spin}$

$H_{space} = H_1(p_1, q_1) + H_2(q_2, p_2) \qquad H_j = \frac{p_j^2}{2m} + V(q_j)$

$H_{spin} = \frac{2\alpha}{\hbar^2} \underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 \qquad \alpha \equiv \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$

Poichè $[H_{space}, H_{spin}] = 0$ gli autostati di H sono stati prodotto degli autostati di H_{space} e H_{spin}.
Poichè le particelle sono bosoni identici gli autostati ammissibili di H devono essere simmetrici per scambio delle due particelle. Questo vuol dire che possiamo avere il prodotto di autostati di H_{space} simmetrici con autostati di H_{spin} simmetrici oppure il caso in cui entrambi gli stati fattore di H_{space} e H_{spin} sono antisimmetrici.

Poiché $[H_1, H_2] = 0$ gli autostati di H_{space} sono stati prodotto (simmetrizzati o antisimmetrizzati) degli autostati di H_1 e H_2.

Gli autovalori di H_1 sono $E_{n_1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n_1^2 = \alpha n_1^2 \quad n_1 = 1, 2, \dots$

e i corrispondenti autovettori $|n_1\rangle$ hanno funzione d'onda

$$\varphi_{n_1}(q_1) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(n_1 \pi \frac{q_1}{L}\right) = \langle q_1 | n_1 \rangle$$

Pertanto gli autovalori di H_{space} sono

$$E_{n_1 n_2} = \alpha\left(n_1^2 + n_2^2\right) \qquad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

e i rispettivi autovettori non simmetrizzati/antisimm. sono $|n_1 n_2\rangle = |n_1\rangle |n_2\rangle$

Lo stato di energia minimo è $E_{11} = 2\alpha$ con $|11\rangle = |1\rangle|1\rangle$ simmetrico per scambio delle due particelle.

Il primo stato eccitato ha energia $E_{12} = E_{21} = 5\alpha$ a cui corrisponde uno stato simmetrico e uno antisimmetrico

$$|12\rangle^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle + |2\rangle|1\rangle\right)$$

$$|12\rangle^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle\right)$$

La situazione è analoga per gli stati successivi.

Il secondo eccitato ha energia $E_{22} = 8\alpha$ con autovettore $|22\rangle = |2\rangle|2\rangle$ simmetrico.

Il terzo eccitato ha energia $E_{13} = E_{31} = 10\alpha$ con autovettori simmetrico e antisimmetrico dati da

$$|13\rangle^{(S)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|3\rangle + |3\rangle|1\rangle\right)$$

$$|13\rangle^{(A)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|3\rangle - |3\rangle|1\rangle\right)$$

Per quanto riguarda lo spin si osservi che

$$2\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = S^2 - S_1^2 - S_2^2 \qquad \text{con } S_1^2 = S_2^2 = \hbar^2\, 1(1+1) = 2\hbar^2$$

$$H_{spin} = \frac{2\alpha}{2\hbar^2}\left(S^2 - 2\hbar^2 - 2\hbar^2\right) = \alpha\left(\frac{S^2}{\hbar^2} - 4\right) \qquad S = \hbar^2 s(s+1)$$

I possibili valori di s sono $s = 0, 1, 2$ $\quad |s_1 - s_2| \leq s \leq s_1 + s_2$

con $s_1 = s_2 = 1$

Indichiamo con $|s, m\rangle$ gli autostati di $S_1^2\ S_2^2\ S^2\ S_z$

questi stati sono autovettori di H_{spin} con autovalori

$$E_s = \alpha\left(s(s+1) - 4\right)$$

$E_0 = -4\alpha \qquad |s=0\ m=0\rangle$

$E_1 = -2\alpha \qquad |s=1\ m\rangle \qquad m = -1, 0, 1$

$E_2 = 2\alpha \qquad |s=2\ m\rangle \qquad m = -2, -1, 0, 1, 2$

Per capire la simmetria sotto scambio delle particelle degli stati $|s\, m\rangle$ occorre riscriverli in termini degli autovettori $|m_1\, m_2\rangle$ di $S_1^2\, S_{1z}\, S_2^2\, S_{2z}$

Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordon si ha

$$(S)\quad \left\{ |s=0\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\,|m_1=1\ m_2=-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\,|m_1=0\ m_2=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|m_1=-1\ m_2=1\rangle \right.$$

$$(A)\quad \begin{cases} |s=1\ m=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=0\ m_2=-1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=-1\ m_2=0\rangle \\ |s=1\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=1\ m_2=-\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=-1\ m_2=1\rangle \\ |s=1\ m=1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=1\ m_2=0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=0\ m_2=1\rangle \end{cases}$$

$$(S)\quad \begin{cases} |s=2\ m=-2\rangle = |m_1=-1\ m_2=-1\rangle \\ |s=2\ m=-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=0\ m_2=-1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|m_1=-1\ m_2=0\rangle \\ |s=2\ m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\,|m_1=1\ m_2=-1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\,|m_1=0\ m_2=0\rangle + \frac{1}{\sqrt{6}}\,|m_1=-1\ m_2=1\rangle \\ |s=2\ m=1\rangle = |s=2\ m=-1\rangle \\ |s=2\ m=2\rangle = |s=2\ m=-2\rangle \end{cases}$$

Gli stati con s pari sono simmetrici quelli con s dispari antisimmetrici

Facciamo una tabella degli autostati ammissibili di $H = H_{spaz} + H_{spin}$ e delle relative energie e degenerazioni di spin

$\|11\rangle \otimes \|s=0\ m=0\rangle$	$2\alpha - 4\alpha = -2\alpha$	$g=1$
$\|11\rangle \otimes \|s=2\ m\rangle$	$2\alpha + 2\alpha = 4\alpha$	$g=5$
$\|12\rangle^{(S)} \otimes \|s=0\ m=0\rangle$	$5\alpha - 4\alpha = \alpha$	$g=1$
$\|12\rangle^{(S)} \otimes \|s=2\ m\rangle$	$5\alpha + 2\alpha = 7\alpha$	$g=5$
$\|12\rangle^{(A)} \otimes \|s=1\ m\rangle$	$5\alpha - 2\alpha = 3\alpha$	$g=3$
$\|22\rangle \otimes \|s=0\ m=0\rangle$	$8\alpha - 4\alpha = 4\alpha$	$g=1$
$\|22\rangle \otimes \|s=2\ m\rangle$	$8\alpha + 2\alpha = 10\alpha$	$g=5$
$\|13\rangle^{(S)} \otimes \|s=0\ m=0\rangle$	$10\alpha - 4\alpha = 6\alpha$	$g=0$
$\|13\rangle^{(S)} \otimes \|s=2\ m\rangle$	$10\alpha + 2\alpha = 12\alpha$	$g=5$
$\|13\rangle^{(A)} \otimes \|s=1\ m\rangle$	$10\alpha - 2\alpha = 8\alpha$	$g=3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Il livello fondamentale ha energia $E_0 = -2\alpha$ risulta non degenere e lo stato corrispondente è

$$|\psi_0\rangle = |11\rangle \otimes |s=0\ m=0\rangle$$

Il primo livello ecatato ha energia $E_1 = \alpha$ risulta non degenere e lo stato corrispondente è

$$|\psi_1\rangle = |12\rangle^{(S)} \otimes |s=0\ m=0\rangle$$

Il secondo livello eccitato ha energia $E_2 = 3\alpha$ risulta 3 volte degenere e gli stati corrispondenti sono

$$|\psi_{2,m}\rangle = |12\rangle^{(A)} \otimes |s=1\ m\rangle \qquad m=-1,0,1$$

Il terzo livello eccitato ha energia $\mathcal{E}_3 = 4\alpha$ risulta 6 volte degenere e gli stati corrispondenti sono

$$|\psi^{(s=2)}_{3,m}\rangle = |1\,1\rangle \otimes |s=2, m\rangle \qquad m = -2,-1,0,1,2$$

$$|\psi^{(s=0)}_{3}\rangle = |2,2\rangle \otimes |s=0, m=0\rangle$$

Esercizio 6

$$Z_1 = \frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m} + V(x)\right)}$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2m\pi}{\beta}\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{0} dx \, e^{+\beta \frac{V_0}{\gamma\lambda} x} + \int_{0}^{\infty} dx \, e^{-\beta \frac{\gamma V_0}{\lambda} x}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\frac{\beta V_0}{\gamma\lambda}} + \frac{-1}{-\beta\frac{\gamma V_0}{\lambda}}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{2\pi m}\,\frac{\lambda}{V_0}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)\beta^{-3/2}$$

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1 = N\,\frac{3}{2\beta}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{2}k_B T$$

Stesso risultato dal teorema di equipartizione

$$\left\langle \frac{p_x^2}{2m}\right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \qquad \langle V(x)\rangle = k_B T \qquad \left\langle \frac{p_x^2}{2m} + V(x)\right\rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

$$S = \frac{E}{T} - \frac{F}{T} \qquad \frac{E}{T} = \frac{3}{2}k_B N$$

$$\frac{F}{T} = -k_B \log Z_N = -N k_B \log Z_1$$

$$S = N k_B\left(\frac{3}{2} + \log\left(\frac{\sqrt{2\pi m}}{h}\,\frac{\lambda}{V_0}\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)(k_B T)^{3/2}\right)\right)$$

$$= N k_B\left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\log(k_B T) + \log\left(\frac{\sqrt{2\pi m}\,\lambda}{h V_0}\right) + \log\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right)\right)$$

$$\frac{dS}{d\gamma} = N k_B \frac{d}{d\gamma}\log\left(\gamma+\frac{1}{\gamma}\right) = N k_B \frac{1-\frac{1}{\gamma^2}}{\gamma+\frac{1}{\gamma}} = N k_B \frac{\gamma^2-1}{\gamma^3+\gamma}$$

$$\frac{dS}{d\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 1 \qquad \left.\frac{d^2S}{d\gamma^2}\right|_{\gamma=1} > 0$$

L'entropia ha un minimo per $\gamma = 1$

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x \; \frac{\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \, e^{-\beta H(x,p_x)}}{Z_1} \, dx$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{0} x \, e^{+\frac{\beta V_0}{\gamma\lambda} x} \, dx + \int_{0}^{\infty} x \, e^{-\frac{\beta V_0 \gamma}{\lambda} x} \, dx}{\frac{\lambda}{\beta V_0}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)}$$

$$= \frac{\beta V_0}{\lambda\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)} \left(\frac{\gamma\lambda}{V_0} \frac{\partial}{\partial\beta} \int_{-\infty}^{0} e^{\frac{\beta V_0}{\gamma\lambda} x} dx - \frac{\lambda}{V_0\gamma} \frac{\partial}{\partial\beta} \int_{0}^{\infty} e^{-\frac{\beta V_0 \gamma}{\lambda} x} dx \right)$$

$$= \frac{\beta V_0}{\lambda\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)} \left(\frac{\gamma\lambda}{V_0} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\gamma\lambda}{\beta V_0}\right) - \frac{\lambda}{V_0\gamma} \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\lambda}{\beta\gamma V_0}\right) \right)$$

$$= \frac{\lambda}{V_0\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)} \left(-\gamma^2 \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2}\frac{1}{\beta^2} \right)$$

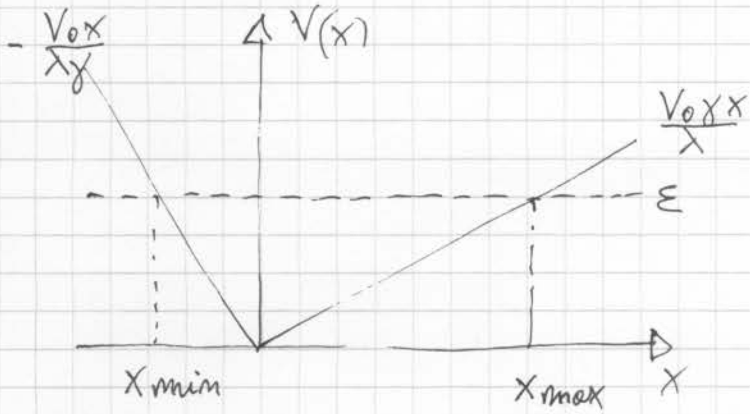
$$= \frac{\lambda}{V_0 \cancel{\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)}} \frac{1}{\beta^2} \cancel{\left(\frac{1}{\gamma} + \gamma\right)} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)$$

$$= \frac{\lambda}{\beta^2 V_0} \left(\frac{1}{\gamma} - \gamma\right)$$

$\langle x \rangle > 0$ se $\gamma < 1$ $\qquad$ $\langle x \rangle < 0$ se $\gamma > 1$

$\langle x \rangle = 0$ per $\gamma = 1$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \, \theta\big(\varepsilon - H(x, p_x)\big)$$



Per ε fissato e dovendo risultare $V(x) \leq \varepsilon$ si ha $x_{min} \leq x \leq x_{max}$

$$-\frac{V_0 x_{min}}{\lambda\gamma} = \varepsilon \Rightarrow x_{min} = -\frac{\lambda\gamma\varepsilon}{V_0}$$

$$\frac{V_0 \gamma x_{max}}{\lambda} = \varepsilon \Rightarrow x_{max} = \frac{\lambda\varepsilon}{V_0\gamma}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2}{h}\left(\int_{x_{min}}^{0} dx \int_{-\sqrt{(\varepsilon - V(x))2m}}^{\sqrt{(\varepsilon - V(x))2m}} dp_x + \int_{0}^{x_{max}} dx \int_{-\sqrt{(\varepsilon - V(x))2m}}^{\sqrt{(\varepsilon - V(x))2m}} dp_x\right)$$

$$= \frac{4}{h}\left(\int_{x_{min}}^{0} dx \sqrt{(\varepsilon - V(x))2m} + \int_{0}^{x_{max}} dx \sqrt{(\varepsilon - V(x))2m}\right)$$

$$= \frac{4}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\left(\int_{x_{min}}^{0} dx \sqrt{1 + \frac{V_0}{\lambda\gamma\varepsilon}x} + \int_{0}^{x_{max}} dx \sqrt{1 - \frac{V_0\gamma}{\lambda\varepsilon}x}\right)$$

utilizzando $\int dx\,(a+bx)^{1/2} = \frac{2}{3b}(a+bx)^{3/2}$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{4}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\left[\frac{2}{3}\frac{\lambda\gamma\varepsilon}{V_0}\left(1 - \left(1 - \frac{V_0}{\lambda\gamma\varepsilon}\frac{\lambda\gamma\varepsilon}{V_0}\right)^{3/2}\right) + \frac{2}{3}\frac{-\lambda\varepsilon}{V_0\gamma}\left(\left(1 - \frac{V_0\gamma}{\lambda\varepsilon}\frac{\lambda\varepsilon}{V_0\gamma}\right)^{3/2} - 1\right)\right]$$

$$= \frac{4}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\,\frac{2}{3}\frac{\lambda\varepsilon}{V_0}\left[\gamma(1 - 0) - \frac{1}{\gamma}(0 - 1)\right]$$

$$= \frac{8}{3h}\sqrt{2m}\,\frac{\lambda}{V_0}\,\varepsilon^{3/2}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)$$

Dalla relazione $\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N$ otteniamo

$$\varepsilon_F = \left(\frac{3Nh V_0}{8\lambda\sqrt{2m}\left(\gamma + \frac{1}{\gamma}\right)}\right)^{2/3}$$