MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 23 giugno 2023

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Due osservabili rappresentate dagli operatori autoaggiunti ξ ed η hanno le proprietà $\xi^2 = 1$, $\eta^2 = 1$ e $\xi\eta + \eta\xi = 0$. Dimostrare che gli autovalori di ξ ed η sono solo ± 1. Supponendo che η abbia autovalori non degeneri (e quindi che lo spazio di Hilbert abbia dimensione 2), determinare l'espressione delle matrici che rappresentano le due osservabili nella base degli autovettori di η.

[punteggio 4]

---

2 Una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\boldsymbol{r}) = (x_0 + x) f(r), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z), \qquad r = |\boldsymbol{r}|\,,$$

dove x_0 è una lunghezza costante positiva. Quali sono i possibili risultati di una misura del quadrato del momento angolare orbitale $\boldsymbol{L}$ della particella? Qual'è l'espressione delle relative probabilità?
Si ricorda che

$$Y_{0,0}(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \qquad Y_{1,0}(\theta, \phi) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4\pi}} \cos\theta, \qquad Y_{1,\pm 1}(\theta, \phi) = \mp \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}} \sin\theta e^{i\phi}$$

[punteggio 4]

---

3 Determinare la densità degli stati di singola particella per un gas di fermioni non interagenti, non relativistici, contenuti nel volume V e aventi spin 3/2.

[punteggio 4]

---

4 Un oscillatore armonico unidimensionale è descritto dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2.$$

Si considerino le due osservabili ξ e η definite al generico tempo t dalle relazioni

$$\xi = q\cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega} p \sin(\omega t),$$
$$\eta = p\cos(\omega t) + m\omega q \sin(\omega t).$$

Determinare:
1) la dipendenza dal tempo dei valori di aspettazione $\langle \xi \rangle_t$ e $\langle \eta \rangle_t$;
2) i valori dei commutatori $[\xi, H]$ e $[\eta, H]$.
3) Spiegare come i risultati 1) e 2) possono essere compatibili (suggerimento: si scrivano le equazioni del moto di Heisenberg per le osservabili ξ e η).

[punteggio 7]

5 Un sitema di tre particelle, non identiche, ciascuna di spin 1/2 è governato dall'Hamiltoniana

$$H = \frac{A}{\hbar^2} \boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2 + \frac{B}{\hbar^2} (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2) \cdot \boldsymbol{S}_3,$$

dove $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2, \boldsymbol{S}_3$ sono gli operatori di spin delle tre particelle. Indicando con $\boldsymbol{S}_{12} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2 + \boldsymbol{S}_3 = \boldsymbol{S}_{12} + \boldsymbol{S}_3$,
1) riscrivere H in termini degli operatori $\boldsymbol{S}_{12}$ e $\boldsymbol{S}$;
2) determinare gli autovettori e gli autovalori di H;
3) specificare valore e degenerazione degli autovalori per tutti i possibili valori dei corrispondenti numeri quantici (si assumano A e B incommensurabili).

[punteggio 7]

6 Un gas di N particelle identiche non interagenti di massa m è vincolato in una dimensione con Hamiltoniana di singola particella $H(q,p) = p^2/(2m) + V(q)$, dove

$$V(q) = \begin{cases} 0, & |q| < L, \\ \frac{1}{2}\alpha(|q| - L)^2, & |q| > L, \end{cases} \qquad \alpha, L > 0.$$

Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura T e le particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media per particella;
2) la probabilità che una particella abbia quantità di moto $p > 0$ trovandosi nella regione $q < L$.
Si consideri poi il caso in cui le particelle siano fermioni di spin 1/2 e la temperatura di equilibrio sia approssimabile con $T = 0$. Determinare:
3) il numero di stati di singola particella $\mathcal{N}(\epsilon)$ ad energia minore di ϵ.

[punteggio 7]

Esercizio 1.

Poiché $\eta^2 = 1$ gli autovalori di η possono essere solo ± 1:

$$\eta |v\rangle = \lambda |v\rangle \quad |v\rangle = \eta^2 |v\rangle = \lambda \eta |v\rangle = \lambda^2 |v\rangle \quad \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

e quindi $\lambda = \pm 1$

deve essere perciò (autovalori non degeneri e $\dim \mathcal{H} = 2$)

$\eta \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ nella base degli autovettori di η. Nella stessa base

posto $\xi \to \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}$ dalla relazione $\eta \xi + \xi \eta = 0$ si ha

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ -\xi_{21} & -\xi_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_{11} & -\xi_{12} \\ \xi_{21} & -\xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\xi_{11} & 0 \\ 0 & -2\xi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

cioè $\xi_{11} = \xi_{22} = 0$.

Poiché $\xi = \xi^{\dagger}$ deve essere $\xi_{12} = \overline{\xi_{21}}$ e infine poiché $\xi^2 = 1$

risulta $\begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} \\ \overline{\xi_{12}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \xi_{12} \\ \overline{\xi_{12}} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |\xi_{12}|^2 & 0 \\ 0 & |\xi_{12}|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

cioè $|\xi_{12}|^2 = 1$,

Possiamo porre $\xi_{12} = e^{i\varphi}$ $\varphi \in \mathbb{R}$ e quindi

$$\xi \to \begin{pmatrix} 0 & e^{i\varphi} \\ e^{-i\varphi} & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2

$$\begin{cases} x = r \sin\vartheta \cos\varphi \\ y = r \sin\vartheta \sin\varphi \\ z = r \cos\vartheta \end{cases}$$

abbiamo $\quad x_0 = \sqrt{4\pi}\, x_0\, Y_{00}(\vartheta,\varphi) \quad$ e

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi = r\sin\vartheta\,\frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$$

$$= \frac{r}{2}\frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{i\varphi} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8\pi}}\sin\vartheta\, e^{-i\varphi}\right)$$

$$= \frac{r}{2}\frac{\sqrt{8\pi}}{\sqrt{3}}\Big(-Y_{11}(\vartheta,\varphi) + Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)\Big)$$

Pertanto

$$\psi(\underline{r}) = (x_0+x)f(r) = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}\, r f(r)\Big(-Y_{11}(\vartheta,\varphi) + Y_{1-1}(\vartheta,\varphi)\Big) + \sqrt{4\pi}\, x_0 f(r)\, Y_{00}(\vartheta,\varphi)$$

In una misura di L^2 possiamo trovare solo i valori $\hbar^2 l(l+1)$ con $l=0$ e $l=1$ con probabilità P_0 e $P_1 = 1-P_0$ con

$$P_0 = \frac{|\langle Y_{00}|\psi\rangle|^2}{|\langle Y_{00}|\psi\rangle|^2 + |\langle Y_{1-1}|\psi\rangle|^2 + |\langle Y_{11}|\psi\rangle|^2}$$

$$= \frac{\int_0^\infty |\sqrt{4\pi}\, x_0 f(r)|^2 r^2 dr}{\int_0^\infty |\sqrt{4\pi}\, x_0 f(r)|^2 r^2 dr + 2\int_0^\infty \left|\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{3}}\, r f(r)\right|^2 r^2 dr}$$

Il numero di stati di singola particella ad energia minore di ε è

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \left(2\,\tfrac{3}{2}+1\right) \frac{1}{h^3}\int_V dq \int_0^{\sqrt{2m\varepsilon}} 4\pi p^2\,dp$$

$$= \frac{4}{h^3} V\, \frac{4}{3}\pi\,(2m\varepsilon)^{\frac{3}{2}}$$

la densità degli stati è quindi

$$\frac{d}{d\varepsilon}\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{4}{h^3} V\, \frac{4}{\cancel{3}}\pi\, \frac{\cancel{3}}{2}(2m\varepsilon)^{1/2}\, 2m$$

$$= \frac{8\pi}{h^3} V (2m)^{3/2}\sqrt{\varepsilon}$$

Esercizio 4

$$\xi = q\cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega} p \sin(\omega t)$$

$$\eta = p\cos(\omega t) + m\omega q \sin(\omega t)$$

Ricordando le relazioni di Ehrenfest (valore di aspettazione delle equazioni di Heisenberg)

$$\begin{cases} \langle \dot{q} \rangle_t = \frac{1}{m} \langle p \rangle_t \\ \langle \dot{p} \rangle_t = -\langle V'(q) \rangle_t \end{cases}$$

abbiamo $\left(V(q) = \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, \; V'(q) = m\omega^2 q \right)$

$$\langle \dot{\xi} \rangle_t = \langle \dot{q} \rangle_t \cos(\omega t) - \omega \langle q \rangle_t \sin(\omega t) - \frac{1}{m\omega} \langle \dot{p} \rangle_t \sin(\omega t) - \frac{1}{m} \langle p \rangle_t \cos(\omega t)$$

$$= \cancel{\frac{1}{m} \langle p \rangle_t \cos(\omega t)} - \cancel{\omega \langle q \rangle_t \sin(\omega t)} + \cancel{\frac{1}{m\omega} m\omega^2 \langle q \rangle_t \sin(\omega t)} - \cancel{\frac{1}{m} \langle p \rangle_t \cos(\omega t)} = 0$$

$$\langle \dot{\eta} \rangle_t = \langle \dot{p} \rangle_t \cos(\omega t) - \omega \langle p \rangle_t \sin(\omega t) + m\omega \langle \dot{q} \rangle_t \sin(\omega t) + m\omega^2 \langle q \rangle_t \cos(\omega t)$$

$$= \cancel{-m\omega^2 \langle q \rangle_t \cos(\omega t)} - \cancel{\omega \langle p \rangle_t \sin(\omega t)} + \cancel{\omega \langle p \rangle_t \sin(\omega t)} + \cancel{m\omega^2 \langle q \rangle_t \cos(\omega t)} = 0$$

Pertanto $\langle \xi \rangle_t$ e $\langle \eta \rangle_t$ sono costanti nel tempo

$$[\xi, H] = [q, H]\cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega}[p, H]\sin(\omega t)$$

$$= \left[q, \frac{1}{2m}p^2\right]\cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega}\left[p, \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\right]\sin(\omega t)$$

$$= \frac{1}{2m}\, 2i\hbar p\cos(\omega t) - \frac{1}{m\omega}\left(-\frac{1}{2}m\omega^2\, 2i\hbar q\right)\sin(\omega t)$$

$$= \frac{i\hbar}{m}\, p\cos(\omega t) + i\hbar\omega\, q\sin(\omega t)$$

$$[\eta, H] = [p, H]\cos(\omega t) + m\omega[q, H]\sin(\omega t)$$

$$= -i\hbar m\omega^2 q\cos(\omega t) + i\hbar\omega p\sin(\omega t)$$

Si osservi che $[\xi, H] \neq 0$ e $[\eta, H] \neq 0$
questo non implica che ξ e η non possono essere osservabili conservate a causa della dipendenza esplicita dal tempo.

Nello schema di Heisenberg ad esempio

$$i\hbar\dot{\xi} = [\xi, H] + i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\xi$$

$$= \frac{i\hbar}{m}\, p\cos(\omega t) + i\hbar\omega\, q\sin(\omega t)$$

$$+ i\hbar\, q(-\omega\sin(\omega t)) - i\hbar\frac{1}{m\omega}\, p\,\omega\cos(\omega t) = 0$$

Esercizio 5

Poiché $\underline{S}_1, \underline{S}_2, \underline{S}_3$ sono spin $\frac{1}{2}$ abbiamo

$$S_1^2 = S_2^2 = S_3^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2 \mathbb{1} = \frac{3}{4}\hbar^2 \mathbb{1} \quad \text{inoltre}$$

$$\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2 = \left(\underline{S}_{12}^2 - \underline{S}_1^2 - \underline{S}_2^2\right)/2$$

$$\left(\underline{S}_1 + \underline{S}_2\right) \cdot \underline{S}_3 = \left(\underline{S}^2 - \underline{S}_{12}^2 - \underline{S}_3^2\right)/2$$

pertanto

$$H = \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_{12}^2 - \frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_1^2 - \frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_2^2\right)$$

$$+ \frac{B}{2}\left(\frac{1}{\hbar^2}\underline{S}^2 - \frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_{12}^2 - \frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_3^2\right)$$

$$= \frac{A}{2}\left(\frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_{12}^2 - \frac{3}{2}\mathbb{1}\right) + \frac{B}{2}\left(\frac{1}{\hbar^2}\underline{S}^2 - \frac{1}{\hbar^2}\underline{S}_{12}^2 - \frac{3}{4}\mathbb{1}\right)$$

Gli autovettori simultanei di $S_{12}^2 \; S_3^2 \; S^2 \; S_z$, cioè gli autovettori $|s_{12}, s_3, s, m_s\rangle$, sono anche autovettori di H

$$H \, |s_{12}, s_3, s, m_s\rangle = \left[\frac{A}{2}\left(s_{12}(s_{12}+1) - \frac{3}{2}\right) + \frac{B}{2}\left(s(s+1) - s_{12}(s_{12}+1) - \frac{3}{4}\right)\right] |s_{12}, s_3, s, m_s\rangle$$

con autovalori

$$E_{s_{12},s} = \frac{A}{2}\left(s_{12}(s_{12}+1) - \frac{3}{2}\right) + \frac{B}{2}\left(s(s+1) - s_{12}(s_{12}+1) - \frac{3}{4}\right)$$

Si ha $s_{12} = 0, 1$. Per $s_{12} = 0$ $s = \frac{1}{2}$ mentre per $s_{12} = 1$ $s = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$. In ogni caso $s_3 = \frac{1}{2}$

Poiché $E_{s_{12}, s}$ non dipende dalla componente z di $\underline{S}$ (m_s) abbiamo i seguenti casi:

autovettori $|0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$

- $s_{12} = 0 \quad s = \frac{1}{2} \qquad E_{0\,\frac{1}{2}} = -\frac{3}{4}A \qquad 2s+1 = 2$ volte degenere

- $s_{12} = 1 \quad s = \frac{1}{2} \qquad E_{1\,\frac{1}{2}} = \frac{A}{4} + B \qquad 2s+1 = 2$ volte degenere

autovettori $|1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$

- $s_{12} = 1 \quad s = \frac{3}{2} \qquad E_{1\,\frac{3}{2}} = \frac{A}{4} + \frac{B}{2} \qquad 2s+1 = 4$ volte degenere

autovettori $|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle$

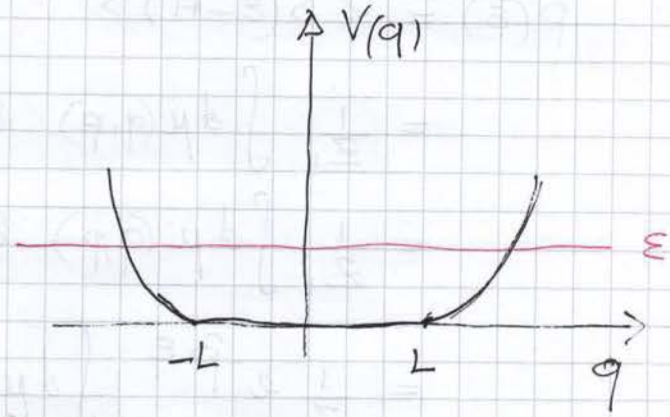
$|1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \pm\frac{3}{2}\rangle$

Esercizio 6

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + V(q) \qquad q, p \in \mathbb{R}$$

$$V(q) = \begin{cases} 0 & |q|<L \\ \frac{\alpha}{2}\left(|q|-L\right)^2 & |q|>L \end{cases}$$

$$\alpha, L > 0$$



$$Z_1 = \frac{1}{h}\int dq\, dp\, e^{-\beta H(q,p)}$$

$$= \frac{1}{h}\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\left(2\int_0^L dq\, e^{-\beta 0} + 2\int_L^{\infty} dq\, e^{-\beta\frac{\alpha}{2}(q-L)^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\left(2L + 2\int_0^{\infty} du \sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\, e^{-u^2}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\left(2L + 2\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2}{\alpha\beta}}\right)$$

$$= \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta h^2}}\, L\left(2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}\right)$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{1}{2}\log\beta + \log\left(2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha L^2}}\,\beta^{-\frac{1}{2}}\right) + \text{cost}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha L^2}}\,\frac{1}{2}\beta^{-3/2}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \frac{1}{2}\beta^{-1} + \frac{\frac{1}{2}\beta^{-1}\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}} = \frac{1}{2}\beta^{-1}\,\frac{2 + 2\sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \beta^{-1}\,\frac{1 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha\beta L^2}}} = k_B T\,\frac{1 + \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\alpha L^2}}}{2 + \sqrt{\frac{2\pi k_B T}{\alpha L^2}}}$$

$$P(p>0,\ q<L) = \langle \theta(p)\,\theta(L-q) \rangle$$

$$= \frac{1}{Z_1} \int d\mu(q,p)\, e^{-\beta H(q,p)}\, \theta(p)\, \theta(L-q)$$

$$= \frac{1}{Z_1} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{L} dq \int_0^{\infty} dp\, e^{-\beta\left(\frac{p^2}{2m} + V(q)\right)}$$

$$= \frac{1}{Z_1} \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{L} dq\ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dp\, e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}\, e^{-\beta V(q)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{L} dq\, e^{-\beta V(q)}}{\int_{-\infty}^{\infty} dq\, e^{-\beta V(q)}}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dq\, e^{-\beta V(q)} = 2L + 2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta}}$$

$$\int_{-\infty}^{L} dq\, e^{-\beta V(q)} = 2L + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta}}$$

$$P(p>0,\ q<L) = \frac{L\left(2 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}\right)}{L\left(2 + 2\sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}\right)} \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{4} \frac{2 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}$$

$$= \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha\beta L^2}}}\right) < \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \int d\mu(q,p)\ \theta\big(\varepsilon - H(q,p)\big) \quad (2s+1) \qquad s=\tfrac{1}{2}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} dp\ \theta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(q)\right)$$

$$= \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \ 2\int_0^{\sqrt{2m(\varepsilon - V(q))}} dp \quad \theta\big(\varepsilon - V(q)\big)$$

$$= \frac{2}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} dq\ \ 2\sqrt{2m(\varepsilon - V(q))}\ \ \theta\big(\varepsilon - V(q)\big)$$

$$= \frac{2}{h}\left(2\int_0^L dq\ \ 2\sqrt{2m\varepsilon} + 2\int_L^{L+\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha}}} dq\ \ 2\sqrt{2m\left(\varepsilon - \frac{\alpha}{2}(q-L)^2\right)}\right)$$

$$= \frac{8}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\left(L + \int_0^1 \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha}}\, du\, \sqrt{1-u^2}\right)$$

$$= \frac{8}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\left(L + \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha}}\ \ \frac{1}{2}\left(u\sqrt{1-u^2} + \arcsin u\right)\right)$$

$$= \frac{8}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\left(L + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha L^2}}\, L\right)$$

$$= \frac{8}{h}\sqrt{2m\varepsilon}\, L\left(1 + \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{\alpha L^2}}\right)$$