# MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 24 gennaio 2023

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | |

| esercizio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| voto | | | | | | |

**1** Sia $U_a$ l'operatore di traslazione della posizione di una quantità $a$, che trasforma gli operatori posizione $q$ e quantità di moto $p$ come

$$U_a \; q \; U_a^{-1} = q - a, \qquad U_a \; p \; U_a^{-1} = p.$$

Determinare la forma di $U_a$.

[punteggio 4]

---

**2** Si consideri l'equazione di Schrödinger stazionaria unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''_E(x) + V(x)\psi_E(x) = E\psi_E(x), \qquad V(x) = ax^2 - b\,|x|\,, \quad a, b > 0.$$

Disegnare qualitativamente, senza fare calcoli, la forma delle due autofunzioni $\psi_{E_0}(x)$ e $\psi_{E_1}(x)$ corrispondenti ai primi due autovalori $E_0 < E_1$. Stabilire un estremo inferiore per $E_0$ e dire in quale limite, al variare di $a$ e $b$, è possibile ottenere $\psi_{E_0}(0) \to 0$.

[punteggio 4]

---

**3** Per un gas ideale, composto da $N$ particelle identiche contenute in un volume $V$, all'equilibrio canonico a temperatura $T$ la funzione di partizione si scrive

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!},$$

dove $Z_1$ è la funzione di partizione di singola particella.
1) Spiegare (con esempi, formule, o semplicemente a parole) qual'è l'origine del termine $1/N!$;
2) Scrivere una formula che mostri come il termine $1/N!$ consenta all'energia libera $F$ di essere una quantità estensiva, cioè $F/N \to$ costante, nel limite termodinamico $V \to \infty$, $N \to \infty$, $N/V \to$ costante.

[punteggio 4]

---

**4** Due particelle identiche di massa $m$, non interagenti, sono confinate all'interno del segmento $[0, L]$. Nell'ipotesi che le due particelle siano distinguibili, determinare:
1) autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana $H$ del sistema.
Nell'ipotesi che le particelle siano fermioni indistinguibili di spin 1/2, determinare:
2) il valore e la degenerazione del livello fondamentale $E_0$ e del primo eccitato $E_1$ di $H$, specificando le relative autofunzioni (o autovettori, se si preferisce);
3) le probabilità, per ciascuno degli stati del punto 2), di avere entrambe le particelle in $[0, L/2]$;
4) la variazione dei livelli $E_0$ ed $E_1$ indotta, al primo ordine in $\lambda$, dalla perturbazione (interazione di contatto) $H' = \lambda\delta(x_1 - x_2)$, dove $x_1, x_2$ sono le posizioni delle due particelle.
Possono essere utili i seguenti integrali:

$$\int_0^{\pi/2} \sin(u)\sin(2u)\mathrm{d}u = \frac{2}{3}, \qquad \int_0^{\pi} \sin^2(u)\sin^2(2u)\mathrm{d}u = \frac{\pi}{4}, \qquad \int_0^{\pi} \sin^4(u)\mathrm{d}u = \frac{3\pi}{8},$$

[punteggio 8]

**5** Un atomo d'idrogeno (si trascuri lo spin dell'elettrone) è immerso in un campo magnetico esterno $\boldsymbol{B}$ che si accoppia con il momento angolare orbitale dell'elettrone $\boldsymbol{L}$ con Hamiltoniana $H' = -\beta\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{B}$. Scelto l'asse $z$ parallelo al $\boldsymbol{B}$ e detti $E_n^{(0)}$ e $|n, l, m\rangle$ gli autovalori e gli autostati dell'atomo d'idrogeno isolato, determinare:
1) gli autovalori e gli autostati dell'atomo in presenza del campo magnetico, studiando in particolare la modifica indotta nei livelli $2s$ e $2p$.
Sempre in presenza del campo magnetico l'atomo viene posto nello stato

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\right).$$

Calcolare:
2) il valore medio dell'energia $\langle E\rangle$ e la relativa indeterminazione $\Delta E$ nello stato $|\psi\rangle$;
3) i valori medi di $L_x$ e $L_y$ nello stato $|\psi\rangle$.
Si ricordi che

$$L_\pm|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}|l, m\pm 1\rangle$$

[punteggio 6]

**6** Un gas di $N$ particelle identiche non interagenti di massa $m$ è caratterizzato dall'Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3, \quad |\boldsymbol{q}| = r, \quad |\boldsymbol{p}| = p, \qquad V(r) = ar^3, \quad a > 0.$$

Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura $T$ e la particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media $E$ del gas;
2) l'entropia $S$ del gas;
3) il valore medio $\langle r\rangle$ della distanza delle particelle dall'origine.
Si consideri poi il caso in cui le particelle siano fermioni di spin 1/2. Determinare:
4) la densità degli stati di singola particella $G(\epsilon)$.
Può essere utile il seguente integrale:

$$\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{3}} e^{-u}\mathrm{d}u = \Gamma(4/3) \simeq 0.89$$

[punteggio 7]

Esercizio 1

Poichè $U_a q U_a^{-1} = q - a$ si ha

$U_a q = q U_a - a U_a$ cioè

$[q, U_a] = a U_a$

Analogamente poichè $U_a p U_a^{-1} = 0$ otteniamo

$[p, U_a] = 0$

Pertanto $U_a$ deve essere una funzione della sola $p$

$U_a = U_a(p)$. Segue che

Dalle relazioni di commutazione canoniche segue che

$$[q, U_a(p)] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} U_a(p)$$

cioè

$$\frac{\partial}{\partial p} U_a(p) = -\frac{i}{\hbar} a U_a(p)$$

La soluzione di questa equazione con la condizione $U_0(p) = 1$ è, a meno di un inessenziale fattore di fase,

$$U_a(p) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} a p\right)$$

in accordo con il teorema di Stone-von Neumann.

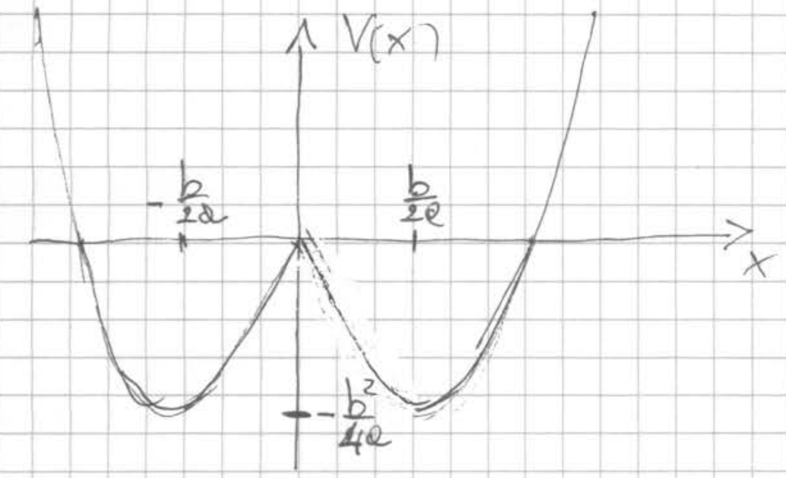
Esercizio 2

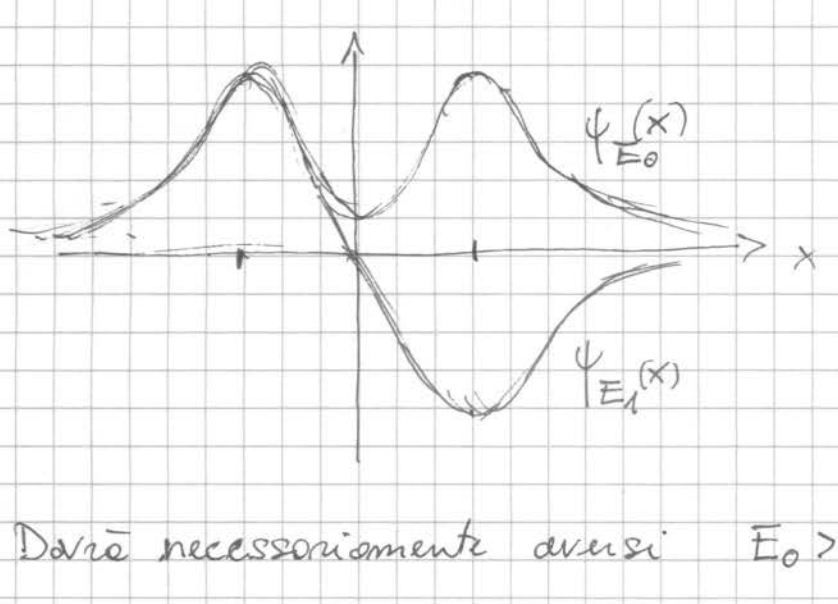
$$V(x) = a x^2 - b|x| \qquad a, b > 0$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow 2ax - b = 0 \quad \text{se } x > 0 \Rightarrow x = \frac{b}{2a}$$

$$2ax + b = 0 \quad \text{se } x < 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$$

$V(x)$ ha un max in $x = 0$ $V(0) = 0$ e due minimi in $x = \pm b/2a$ dove vale $V(\pm b/2a) = -b^2/(4a)$




Poiché $V(-x) = V(x)$ le autofunzioni sono alternativamente pari e dispari

Dovrà necessariamente aversi $E_0 > -\frac{b^2}{4a}$

$\psi_{E_0}(x)$ avrà 0 nodi con massimi in $\pm b/2a$ pari

$\psi_{E_1}(x)$ dispari avrà 1 nodo in $x = 0$

Affinché $\psi_{E_0}(0) \to 0$ la barriera che separa le due buche deve diventare "opaca" il che avviene per $b \gg a$ o $b^2 \gg a$

Esercizio 3

Affinché il valore medio quantistico dell'osservabile $\xi$

$$\langle \xi \rangle = \mathrm{tr}(\rho\, \xi) \qquad \mathrm{tr}\, \rho = 1$$

si riduca, in un opportuno limite, al valore medio classico

$$\langle \xi \rangle = \int d\mu(q,p)\ \rho(q,p)\, \xi(q,p) \qquad \int d\mu(q,p)\, \rho(q,p) = 1$$

occorre assumere la misura di integrazione $d\mu(q,p) = \dfrac{dq\, dp}{h^{dN} N!}$
con $d$ = dimensione dello spazio $N$ = # di particelle

Il fattore $1/h^{dN}$ origina dall'approssimazione delle somme sulle quantità di moto quantizzate con una integrazione sullo spazio continuo

$$\sum_p \longrightarrow \int dp \left(\frac{L}{h}\right)^{dN} \qquad L^d = \text{volume}$$

mentre il fattore $1/N!$ è il fattore di normalizzazione degli stati totalmente simmetrici/antisimmetrici con cui devono essere descritte le N particelle identiche che compongono il sistema.

L'energia libera è $F = -k_B T \log Z$
Utilizzando l'approssimazione di Stirling $N! \simeq N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}$

$$F = -k_B T \left[ \log Z_1^N - \log\left(N^N e^{-N} \sqrt{2\pi N}\right) \right]$$

$$= -k_B T N \left[ \log\left(\frac{Z_1}{N}\right) + 1 + O(\log N) \right]$$

$$\frac{F}{N} = -k_B T \left[ \log\left(\frac{Z_1}{N}\right) + 1 \right] + O\left(\frac{\log N}{N}\right)$$

Poiché $Z_1 = \int \frac{dq\, dp}{h^d} e^{-\beta H(q,p)}$

dove $H(q,p)$ è l'Hamiltoniano di singola particella deve essere $Z_1 \propto V$ con $V$ volume efficace del sistema. Pertanto $Z_1/N \to$ costante nel limite termodinamico.

Esercizio 4

Gli autovalori e le autofunzioni dell'Hamiltoniana

$$h(u) = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{du^2} \qquad 0 \leq u \leq L \qquad \text{sono}$$

$$h(u)\,\varphi(u) = E\,\varphi(u)$$

$$\varphi''(u) = -k^2\varphi(u) \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$$

$$\varphi(u) = A\sin(ku) + B\cos(ku)$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 & B = 0 \\ \varphi(L) = 0 & A\sin(kL) = 0 \qquad kL = n\pi \quad n = 1,2,3,\dots \end{cases}$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad E = E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\,n^2$$

$$\varphi(u) = \varphi_n(u) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}u\right) \quad \text{avendo scelto } A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$
$$= \langle u | n \rangle$$

L'Hamiltoniana del sistema di 2 particelle identiche è

$$H = h(x_1) + h(x_2)$$

che, indipendentemente dalla distinguibilità o meno delle particelle, ha autovalori

$$E_{n_1 n_2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_1^2 + n_2^2\right) \qquad n_1, n_2 = 1, 2, 3, \dots$$

Se le particelle sono distinguibili le corrispondenti autofunzioni sono

$$\psi_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \varphi_{n_1}(x_1)\,\varphi_{n_2}(x_2) = \langle x_1 | n_1 \rangle \langle x_2 | n_2 \rangle$$

Se le particelle sono indistinguibili le autofunzioni vanno simmetrizzate o antisimmetrizzate anche tenendo conto dei gradi di libertà di spin.

Nel caso di 2 fermioni spin 1/2, gli stati di spin $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$ possono essere

$$|S=0, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |-\rangle_z - |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$$ singoletto antisimmetrico

$$|S=1, m=1\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$$
$$|S=1, m=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |-\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$$ tripletto simmetrico
$$|S=1, m=-1\rangle = |-\rangle_z |-\rangle_z$$

Per lo stato fondamentale di H abbiamo

$$E_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(1+1)$$ non degenere

$$|E_0\rangle = |1\rangle|1\rangle \otimes |0,0\rangle$$

Per il primo eccitato

$$E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(1+4)$$ 4 volte degenere

$$|E_1^{(1)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle + |2\rangle|1\rangle\right)\otimes|0,0\rangle \equiv |1,2\rangle^{(+)}\otimes|0,0\rangle$$

$$|E_1^{(2)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle\right)\otimes|1,1\rangle \equiv |1,2\rangle^{(-)}\otimes|1,1\rangle$$

$$|E_1^{(3)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle\right)\otimes|1,0\rangle \equiv |1,2\rangle^{(-)}\otimes|1,0\rangle$$

$$|E_1^{(4)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle|2\rangle - |2\rangle|1\rangle\right)\otimes|1,-1\rangle \equiv |1,2\rangle^{(-)}\otimes|1,-1\rangle$$

Nello stato fondamentale la probabilità di trovare entrambe le particelle nella regione $[0, L/2]$ è

$$P_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Nello stato eccitato la probabilità è diversa a seconda dello stato spaziale $|1,2\rangle^{(\pm)}$

$$P_1^{(\pm)} = \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \quad \left| \langle x_1| \langle x_2 | 1\, 2\rangle^{(\pm)} \right|^2$$

$$= \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \quad \frac{1}{2} \left| \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) \pm \varphi_2(x_1)\varphi_1(x_2) \right|^2$$

$$= \int_0^{L/2} dx_1 \int_0^{L/2} dx_2 \quad \frac{1}{2}\Big( |\varphi_1(x_1)|^2 |\varphi_2(x_2)|^2 +$$

$$+ |\varphi_2(x_1)|^2 |\varphi_1(x_2)|^2 \pm 2\, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1)\, \varphi_2(x_2)\varphi_1(x_2) \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left( \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \pm 2\left( \int_0^{L/2} dx_1\, \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_1) \right)^2 \right)$$

$$= \frac{1}{4} \pm \left( \frac{2}{L} \int_0^{L/2} dx_1\, \sin\left(\frac{\pi}{L}x_1\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L}x_1\right) \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \pm \left( \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx \left( \cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{L}x\right) \right) \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \pm \left( \frac{1}{L}\, \frac{L}{3\pi} \sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right)\Big|_0^{L/2} - \frac{1}{L}\,\frac{L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\Big|_0^{L/2} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \pm \left( (-1)\frac{1}{3\pi} - \frac{1}{\pi} \right)^2$$

$$= \frac{1}{4} \pm \left( \frac{4}{3\pi} \right)^2$$

Sotto l'azione della perturbazione $\lambda\, \delta(x_1 - x_2)$ al primo ordine in $\lambda$ l'energia dello stato fondamentale non degenere diventa

$$E_0 + \langle E_0 | H' | E_0 \rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle E_0 | H' | E_0 \rangle &= \lambda \int_0^L dx_1 \int_0^L dx_2\, \delta(x_1 - x_2) \left| \varphi_1(x_1)\, \varphi_1(x_2) \right|^2 \\
&= \lambda \int_0^L dx_1\, \varphi_1(x_1)^4 \\
&= \lambda \int_0^L dx \left(\frac{2}{L}\right)^2 \sin^4\!\left(\frac{\pi x}{L}\right) \\
&= \lambda \frac{4}{\pi L} \int_0^\pi \sin^4(u)\, du \\
&= \lambda \frac{4}{\pi L}\, \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{2} \frac{\lambda}{L}
\end{aligned}$$

Poiché $E_1$ risulta degenere 4 volte la correzione al primo ordine perturbativo sarà data dai 4 autovalori della matrice $\langle E_1^{(j)} | H' | E_1^{(k)} \rangle$.
Questi elementi sono nulli se $|E_1^{(k)}\rangle$ o $|E_1^{(j)}\rangle$ è lo stato antisimmetrico $|1,2\rangle^{(-)}$ che ha la proprietà
$$\langle x_1 | \langle x_1 | 1, 2\rangle^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(x_1) - \varphi_2(x_1)\, \varphi_1(x_1) \right) = 0 .$$
L'unico elemento di matrice non nullo è

$$\begin{aligned}
\langle E_1^{(1)} | H' | E_1^{(1)} \rangle &= \lambda \int_0^L dx_1 \quad 2\, \varphi_1(x_1)^2\, \varphi_2(x_1)^2 \\
&= \lambda \int_0^L dx \left(\frac{2}{L}\right)^2 2 \sin^2\!\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin^2\!\left(\frac{2\pi x}{L}\right)^2 \\
&= \lambda \frac{8}{L\pi} \int_0^\pi du\, \sin^2(u) \sin^2(2u) \\
&= \lambda \frac{8}{\pi L}\, \frac{\pi}{4} = 2 \frac{\lambda}{L}
\end{aligned}$$

Il livello $E_1$ si splitta nel livello non degenere $E_1 + 2\frac{\lambda}{L}$ e nel livello $E_1$ 3 volte degenere

Esercizio 5

Gli autovalori e gli autovettori dell'atomo di Idrogeno sono $H_0\,|n,l,m\rangle = E_n\,|n,l,m\rangle$

$$E_n^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2\mu\, a_B^2}\,\frac{1}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad a_B \equiv \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$$

dove $\mu \simeq m_e$ è la massa efficace dell'elettrone

Il livello $E_n^{(0)}$ è $n^2$ volte degenere con autovettori

$|n,l,m\rangle \qquad l = 0, 1, \ldots, n-1 \quad -l \le m \le l$

In presenza del campo magnetico l'Hamiltoniana diventa

$H = H_0 - \beta B L_z$

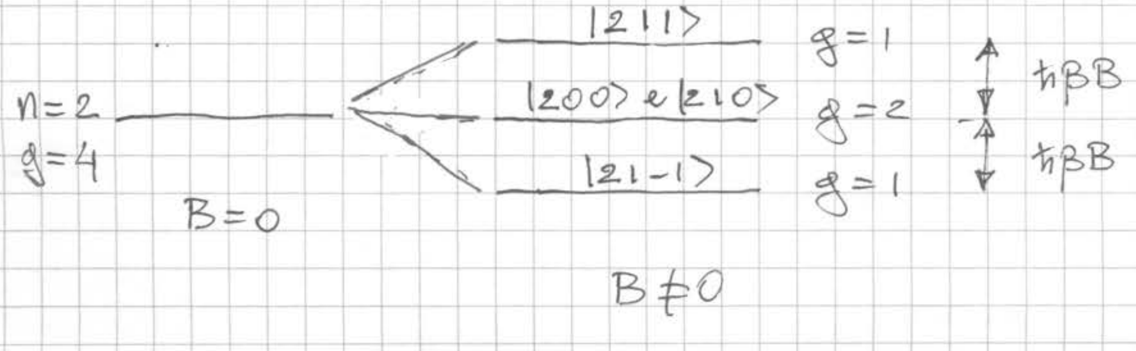
Si osservi che gli autovettori simultanei di $H_0$, $L^2$ e $L_z$ sono anche autovettori di $H$ pertanto gli autovalori di $H$ sono

$$E_{nlm} = E_n^{(0)} - \beta B \hbar m$$

Lo stato 2s rimane al valore $E_{200} = E_2^{(0)}$
non degenere

Lo stato 2p si separa nei tre livelli
$E_{21m} \qquad m = 1, 0, -1$ non degeneri uno dei quali però, $E_{210}$, coincide con $E_{200}$

Si ha quindi la seguente situazione per il livello $n=2$



$$H|\psi\rangle = H\,\frac{1}{2}\Big(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(-\hbar\beta B\,|2,1,1\rangle \quad + \hbar\beta B\;|2,1,-1\rangle\Big)$$

$$+ \frac{1}{2}\,E_n^{(0)}\Big(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\;|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\Big)$$

$$\langle E\rangle = \langle\psi|\,H|\psi\rangle$$

$$= E_n^{(0)}\;\frac{1}{4}\big(1 + 2 + 1\big) + \frac{1}{4}\big(-\hbar\beta B + \hbar\beta B\big)$$

$$= E_n^{(0)}$$

Nota de $\langle\psi|\psi\rangle = 1$

$$\langle\psi|H^2|\psi\rangle = \langle\psi|H^{\dagger}\;H|\psi\rangle = \big\|H|\psi\rangle\big\|^2$$

$$= \left\|\frac{1}{2}\big(E_n^{(0)} - \hbar\beta B\big)\,|2,1,1\rangle + \frac{E_n^{(0)}}{\sqrt{2}}|2,1,0\rangle + \frac{1}{2}\big(E_n^{(0)} + \hbar\beta B\big)\,|2,1,-1\rangle\right\|^2$$

$$= \frac{1}{4}\big(E_n^{(0)} - \hbar\beta B\big)^2 + \frac{1}{2}\big(E_n^{(0)}\big)^2 + \frac{1}{4}\big(E_n^{(0)} + \hbar\beta B\big)^2$$

$$= \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Big)\big(E_n^{(0)}\big)^2 + \Big(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\Big)\big(\hbar\beta B\big)^2$$

$$= \big(E_n^{(0)}\big)^2 + \frac{1}{2}\big(\hbar\beta B\big)^2$$

$$\Delta E^2 = \langle\psi|\,H^2|\psi\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle^2$$

$$= \frac{1}{2}\big(\hbar\beta B\big)^2$$

$$\Delta E = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\hbar\beta B$$

$$L_x = \frac{1}{2}\left(L_+ + L_-\right) \qquad L_y = \frac{1}{2i}\left(L_+ - L_-\right)$$

$$L_\pm |l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\;|l,m\pm 1\rangle$$

$$L_+|\psi\rangle = L_+ \frac{1}{2}\left(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(0 + \sqrt{2}\,\sqrt{2}\,|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,0\rangle\right)$$

$$L_-|\psi\rangle = L_- \frac{1}{2}\left(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(\sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + \sqrt{2}\,\sqrt{2}\,|2,1,-1\rangle + 0\right)$$

$$L_x|\psi\rangle = \frac{\hbar}{4}\left(2\,|2,1,1\rangle + 2\sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + 2\,|2,1,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2}\left(|2,1,1\rangle + \sqrt{2}\,|2,1,0\rangle + |2,1,-1\rangle\right)$$

$$= \hbar|\psi\rangle$$

$$\langle\psi|L_x|\psi\rangle = \hbar$$

$$L_y|\psi\rangle = \frac{\hbar}{4i}\left(2\,|2,1,1\rangle + 0\,|2,1,0\rangle - 2\,|2,1,-1\rangle\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2i}\left(|2,1,1\rangle - |2,1,-1\rangle\right)$$

$$\langle\psi|L_y|\psi\rangle = 0$$

Esercizio 6

La funzione di partizione del gas di N particelle è

$$Z = \frac{Z_1^N}{N!}$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_0^\infty 4\pi r^2 dr\, e^{-\beta a r^3}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} 4\pi\int_0^\infty \frac{d}{dr}\left(e^{-\beta a r^3}\right) dr\,\frac{-1}{3\beta a}$$

$$= \left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2}\frac{4\pi}{3\beta a}$$

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{3}{2}\log\beta - \log\beta\right)$$

$$= \frac{5}{2}N k_B T$$

Usando l'approssimazione di Stirling $N! \simeq N^N e^{-N}\sqrt{2\pi N}$
scriviamo l'energia libera come

$$F = -k_B T\log Z$$

$$= -k_B T\left(N\log Z_1 - N\log N + N + O(\log N)\right)$$

$$= -N k_B T\left(\log\frac{Z_1}{N} + 1\right) + O(\log N)$$

Pertanto l'entropia del gas vale

$$S = \frac{1}{T}(E - F)$$

$$= \frac{5}{2} N k_B + N k_B \left( \log\left( \left(\frac{2\pi m}{h^2 \beta}\right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta a N} \right) + 1 \right)$$

$$= N k_B \left[ \frac{7}{2} + \log\left( \left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta a N} \right) \right]$$

La densità di probabilità che una particella si trovi a distanza r dall'origine è data da

$$p(r) = \frac{1}{Z_1} \int \frac{dq\, dp}{h^3} e^{-\beta H(\underline{q}, \underline{p})} \delta(|\underline{q}| - r)$$

$$= \frac{1}{Z_1} \frac{1}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \int_0^\infty 4\pi u^2 du\; \delta(u - r) e^{-\beta a u^3}$$

$$= \frac{\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2} 4\pi r^2 e^{-\beta a r^3}}{\left(\frac{2\pi m}{h^2\beta}\right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\beta a}}$$

$$= 3\beta a r^2 e^{-\beta a r^3}$$

Quindi il valore medio di r è

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty dr\; r\, p(r)$$

$$= 3\beta a \int_0^\infty r^3 e^{-\beta a r^3} dr$$

$$\beta a r^3 = u \qquad r = \left(\frac{u}{\beta a}\right)^{1/3} \qquad dr = \frac{1}{3} \frac{u^{-2/3}}{(\beta a)^{1/3}} du$$

$$= 3\beta a \int_0^\infty \frac{u}{\beta a} e^{-u} \frac{du}{3(\beta a)^{1/3} u^{2/3}}$$

$$= \frac{1}{(\beta a)^{1/3}} \int_0^\infty u^{+1/3} e^{-u} du$$

$$= \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \frac{1}{(\beta a)^{1/3}}$$

Se le particelle sono fermioni spin 1/2 la densità degli stati di singola particella vale

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^3}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\ \delta\left(H(\underline{q},\underline{p}) - \varepsilon\right)$$

$$= \frac{2(4\pi)^2}{h^3}\int_0^\infty dr\ r^2 \int_0^\infty dp\ p^2\ \delta\left(f(p)\right)$$

dove $f(p) = \frac{p^2}{2m} + a r^3 - \varepsilon$

$$f(p) = 0 \Rightarrow p = \pm p_0 = \sqrt{(\varepsilon - a r^3)\,2m} > 0$$

$$\delta\left(f(p)\right) = \frac{1}{|f'(p_0)|}\delta(p-p_0) + \frac{1}{|f'(-p_0)|}\delta(p+p_0)$$

$$= \frac{m}{p_0}\left(\delta(p-p_0) + \delta(p+p_0)\right)$$

$$G(\varepsilon) = \frac{2(4\pi)^2}{h^3}\int_0^\infty dr\ r^2\ \frac{m}{p_0}\ p_0^2\ \theta\left(\varepsilon - a r^3\right)$$

$$= \frac{2(4\pi)^2}{h^3}\ m\sqrt{2m}\int_0^\infty dr\ r^2\sqrt{\varepsilon - a r^3}\ \theta(\varepsilon - a r^3)$$

$$= \frac{(2m)^{3/2}(4\pi)^2}{h^3}\int_0^{a r^3 \leq \varepsilon} dr\ r^2\sqrt{\varepsilon - a r^3}\ \theta(\varepsilon)$$

$\varepsilon - a r^3 \equiv u$

$$= \frac{(4\pi)^2(2m)^{3/2}}{h^3}\int_0^\varepsilon \frac{du}{3a}\sqrt{u}\ \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{(4\pi)^2(2m)^{3/2}}{h^3 a}\ \frac{2}{9}\ \varepsilon^{3/2}\ \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{2}{9}(4\pi)^2\frac{(2m\varepsilon)^{3/2}}{h^3 a}\ \theta(\varepsilon)$$