MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2021/2022 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 24 giugno 2022

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Si consideri una osservabile ξ con autovalori ξ_i e corrispondenti autovettori $|\xi_i^{(k_i)}\rangle$, dove k_i è l'indice di degenerazione di ξ_i. In base al postulato di von Neumann, quando ξ viene misurata in un sistema che si trova nello stato $|A\rangle$ e il risultato della misura è ξ_i, allora lo stato del sistema subito dopo la misura è $|B\rangle = ...$ Specificare l'espressione di $|B\rangle$ e dimostrare che il raggio di $|B\rangle$ è unico ($|B\rangle$ è unico a meno di un fattore moltiplicativo).

[punteggio 4]

2 Una particella si trova in uno stato descritto dalla seguente funzione d'onda

$$\psi(\boldsymbol{r}) = C \sin\left(\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\hbar}\right), \qquad \boldsymbol{p}, \boldsymbol{r} \in \mathbb{R}.$$

Possiamo dire che si tratta di una particella libera?

[punteggio 4]

3 L'entropia di un sistema di N particelle classiche identiche di massa m, non interagenti mutuamente, contenute in un volume V e all'equilibrio termico con un reservoir a temperatura T è espressa dalla formula di Sakur-Tetrode

$$S = N k_{\mathrm{B}} \left(\log\left(\frac{V}{N\lambda^3}\right) + \frac{5}{2}\right), \qquad \lambda = \frac{h}{\sqrt{2\pi m k_{\mathrm{B}} T}}.$$

In base a questa formula $\lim_{T\to 0} S(T) = -\infty$. Spiegare perché questo risultato è inaccettabile e individuare la causa di tale comportamento errato.

[punteggio 4]

4 Una particella è vincolata all'interno del segmento $[-a/2, a/2]$ e all'istante $t = 0$ la funzione d'onda che descrive il suo stato è

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle = C\chi_{[-a/4,a/4]}(x),$$

dove $\chi_{[a,b]}(x)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[a, b]$, cioè $\chi_{[a,b]}(x) = 1$ se $x \in [a, b]$ altrimenti $\chi_{[a,b]}(x) = 0$. Determinare:
1) la costante di normalizzazione C;
2) la densità di probabilità $P(E)$ di ottenere il valore E in una misura dell'energia;
3) la funzione d'onda della particella al tempo $t > 0$;
4) le correzioni ai livelli energetici della particella indotte dalla perturbazione $\lambda\chi_{[-a/4,a/4]}(x)$ al primo ordine nel parametro λ.

[punteggio 7]

5 Una particella di massa m e spin $1/2$ è vincolata a muoversi su una sfera e si trova nello stato specificato dallo spinore

$$\psi(\theta, \varphi) = C \begin{pmatrix} 3\sin\theta e^{-i\varphi} \\ 2 \end{pmatrix},$$

dove θ, φ sono le coordinate angolari della particella.
1) Esprimere lo stato $|\psi\rangle$ corrispondente allo spinore ψ nella base $|l, m, s, m_s\rangle$ degli autovettori comuni agli operatori di momento angolare orbitale L^2, L_z e di spin S^2, S_z e determinare la costante di normalizzazione C.
2) Determinare lo stato normalizzato $|\psi_1\rangle$ in cui si viene a trovare la particella allorché, stante la particella nello stato $|\psi\rangle$, viene effettuata una misura di J^2, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, con risultato $3\hbar^2/4$.
3) Calcolare lo stato $|\psi_1(t)\rangle$ evoluto da $|\psi_1\rangle$ per un tempo t sotto l'azione dell'Hamiltoniana

$$H = \frac{\omega}{2\hbar}L^2 + \omega(L_z + 2S_z).$$

[punteggio 7]

6 Un sistema di N particelle identiche di massa m, non interagenti mutuamente, si muove nello spazio tridimensionale soggetto all'Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + \gamma\,|\boldsymbol{q}|^6, \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,$$

dove γ è una costante positiva. Considerando le particelle come classiche e all'equilibrio termico con un reservoir a temperatura T, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) l'entropia S del sistema.
Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin $1/2$ e la temperatura del reservoir possa essere approssimata con $T = 0$, calcolare:
3) la densità degli stati di singola particella $G(\epsilon)$ e l'energia di Fermi ϵ_F del sistema.
È utile ricordare che

$$\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u = \pi/4.$$

[punteggio 7]

Esercizio 1

$|B\rangle$ è lo stato dell'autospazio associato a ξ_i più vicino ad $|A\rangle$. Per la completezza della base $\{|\xi_i^{(k_i)}\rangle\}$ abbiamo lo sviluppo in serie di Fourier

$$|A\rangle = \sum_i \underbrace{\sum_{k_i} |\xi_i^{(k_i)}\rangle\langle\xi_i^{(k_i)}|A\rangle}_{\substack{\parallel \\ |B\rangle}}$$

$|B\rangle$ = stato dopo misura ~~di~~ ξ con risultato ξ_i

Poiché $\sum_{k_i} |\xi_i^{(k_i)}\rangle\langle\xi_i^{(k_i)}|$ è il proiettore nell'autospazio associato a ξ_i, possiamo anche cambiare la base di questo autospazio

$$\{|\xi_i^{(k_i)}\rangle\} \longrightarrow \{|\tilde{\xi}_i^{(k_i)}\rangle\}$$

ma per l'unicità del proiettore

$$\sum_{k_i} |\xi_i^{(k_i)}\rangle\langle\xi_i^{(k_i)}| = \sum_{k_i} |\tilde{\xi}_i^{(k_i)}\rangle\langle\tilde{\xi}_i^{(k_i)}|$$

l'espressione di $|B\rangle$ non cambia.
Ciò significa che a meno di un fattore moltiplicativo $|B\rangle$ è unico.

Esercizio 2

La funzione d'onda rappresenta lo stato dinamico di un sistema, nel caso presente uno stato delocalizzato su tutto lo spazio $\mathbb{R}^3$.
Per decidere se la particella è libera o meno dobbiamo conoscere l'Hamiltoniana.

Esercizio 3

L'entropia, essendo essenzialmente il logaritmo del numero di microstati che realizzano un dato macrostato, non può essere negativa.

L'equazione di Sackur-Tetrode è di natura classica e in quanto tale vale fintanto che la lunghezza d'onda termica λ (lunghezza di de Broglie per una particella di energia $k_B T$) è piccola rispetto alla lunghezza caratteristica $(V/N)^{1/3}$, ovvero fintanto che il volume per particella V/N è grande rispetto a λ^3. Quando ciò non è soddisfatto è necessaria una analisi quantistica del sistema.

Esercizio 4

1) La normalizzazione impone

$$1 = \int |\psi(x)|^2 dx = |C|^2 \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} 1\, dx = |C|^2 \frac{a}{2}$$

Possiamo scegliere C reale positivo $C = \sqrt{\frac{2}{a}}$.

2) In una misura di energia (come di qualsiasi altra osservabile) possono essere ottenuti solo gli autovalori di H. Per il problema in esame questi sono discreti

$$H\, \psi_n(x) = E_n\, \psi_n(x) \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

quindi si avrà $P(E) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\, \delta(E - E_n)$ con $P_n = |\langle \psi | \psi_n \rangle|^2$

Notare che $\int_{-\infty}^{+\infty} P(E)\, dE = \sum_{n=1}^{\infty} P_n = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \psi | \psi_n \rangle|^2 = 1$

nell'ipotesi che $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi_n | \psi_n \rangle = 1$

Per ricavare E_n, ψ_n risolviamo $\psi_E''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi_E(x)$

con condizioni $\psi_E(-\frac{a}{2}) = \psi_E(\frac{a}{2}) = 0$.

Posto $k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ e $\psi_E(x) = A \sin\left[k\left(x + \frac{a}{2}\right)\right]$

imponendo $\sin\left[k\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\right)\right] = 0$ otteniamo $ka = n\pi$

con $n = 1, 2, 3 \dots$ e quindi

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[n \frac{\pi}{a}\left(x + \frac{a}{2}\right)\right]$$

$$\langle\psi|\psi_n\rangle = \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sqrt{\frac{2}{a}}\ \sin\left[n\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)\right] dx$$

$$= \frac{2}{a}\left(-\cos\left[n\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\ \frac{a}{n\pi}\right)\Bigg|_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}}$$

$$= \frac{2}{\pi n}\left(-\cos\left(n\pi\,\frac{3}{4}\right)+\cos\left(n\pi\,\frac{1}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{2}{\pi n}\begin{cases} 0 & n=2,4,6,\dots \\ \sqrt{2} & n=1,5,9,\dots \\ -\sqrt{2} & n=3,7,11,\dots \end{cases}$$

$$P_n = \left|\langle\psi|\psi_n\rangle\right|^2 = \frac{8}{\pi^2 n^2} \qquad n=1,3,5,\dots$$

Per controllo si osservi che $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) Al tempo $t>0$ lo stato della particella è

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\psi\rangle$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}\,\langle\psi_n|\psi\rangle\,|\psi_n\rangle$$

che corrisponde alla funzione d'onda

$$\psi(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty}\Bigg(e^{-\frac{i}{\hbar}E_{4k+1}t}\,\langle\psi_{4k+1}|\psi\rangle\,\psi_{4k+1}(x)$$

$$+ e^{-\frac{i}{\hbar}E_{4k+3}t}\,\langle\psi_{4k+3}|\psi\rangle\,\psi_{4k+3}(x)\Bigg)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2\sqrt{2}}{\pi(4k+1)}\, e^{-it\frac{\hbar\pi^2}{2ma^2}(4k+1)^2}\,\sqrt{\frac{2}{a}}\,\sin\left[(4k+1)\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)\right]\right.$$

$$- \frac{2\sqrt{2}}{\pi(4k+3)} e^{-it \frac{\hbar\pi^2}{2ma^2}(4k+3)^2} \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left[(4k+3)\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)\right] \Bigg)$$

4) Sotto l'azione di una perturbazione $H_p = \lambda H'$ gli autovalori dell'Hamiltoniana imperturbata H_0 possono essere scritti come

$$E_{n\nu} = E^{(0)}_{n\nu} + \lambda E^{(1)}_{n\nu} + \lambda^2 E^{(2)}_{n\nu} + \dots$$

Nel nostro caso non abbiamo degenerazione e

$$E^{(0)}_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2} n^2 \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

Al primo ordine in λ e con $H' = \chi_{[-\frac{a}{4}, \frac{a}{4}]}(x)$ si ha

$$E^{(1)}_n = \langle \psi^{(0)}_n | H' | \psi^{(0)}_n \rangle$$

$$= \int_{-\frac{a}{4}}^{\frac{a}{4}} \frac{2}{a} \sin^2\left[\frac{n\pi}{a}\left(x+\frac{a}{2}\right)\right] dx$$

$$= \frac{4}{a} \int_0^{\frac{a}{4}} \sin^2\left[n\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)\right] dx$$

$$u \equiv n\pi\left(\frac{x}{a}+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{4}{n\pi} \int_{\frac{1}{4}n\pi}^{\frac{3}{4}n\pi} \sin^2(u)\, du$$

$$= \frac{4}{n\pi} \int_{\frac{1}{4}n\pi}^{\frac{3}{4}n\pi} \frac{1}{2}\left(1 - \cos(u)\right) du$$

$$t = 2u$$

$$= \frac{4}{n\pi} \left(\frac{1}{2} \frac{n\pi}{4} - \frac{1}{4} \int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi} \cos(t)\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{n\pi} \sin(t) \Big|_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & n = 2, 4, 6, \dots \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n\pi} & n = 1, 5, 9, \dots \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{n\pi} & n = 3, 7, 11, \dots \end{cases}$$

Esercizio 5

1) Ricordando l'espressione delle armoniche sferiche

$$Y_{0,0}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad Y_{10}(\theta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1,\pm 1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$$

abbiamo

$$\psi = c\left(3\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,Y_{1,-1}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2\,Y_{0,0}(\theta,\varphi)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

che è lo spinore corrispondente al vettore

$$|\psi\rangle = c\left(3\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\,|l=1\ m=-1,\ s=\tfrac{1}{2},\ s_z=\tfrac{1}{2}\rangle \right.$$
$$\left. + 2\sqrt{4\pi}\,|l=0,\ m=0,\ s=\tfrac{1}{2},\ s_z=-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Imponendo $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ e ricordando che $\langle l m s s_z | l m s s_z\rangle = 1$ abbiamo

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = |c|^2\left(9\,\frac{8\pi}{3} + 4\cdot 4\pi\right) \quad \text{da cui} \quad |c| = \frac{1}{\sqrt{40\pi}}$$

Scegliamo c reale positivo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{40\pi}}\left(\sqrt{24\pi}\,|1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{16\pi}\,|0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

2) Nel caso di misura di J^2, dove $\underline{J} = \underline{L} + \underline{S}$, conviene esprimere $|\psi\rangle$ nella base $|j\ j_z\ l\ s\rangle$ degli autovettori comuni a $J^2\ J_z\ L^2\ S^2$.

Dalla tabella dei coefficienti di Clebsch-Gordan $1\times\frac{1}{2}$, $0\times\frac{1}{2}$ abbiamo

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{40\pi}}\left(\sqrt{24\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}\rangle\right)\right.$$

$$\left. + \sqrt{16\pi}\;|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

Poiché $\frac{3}{4}\hbar^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\hbar^2$ cioè $j=\frac{1}{2}$, abbiamo

$$|\psi\rangle \xrightarrow[\text{con risultato } \frac{3}{4}\hbar^2]{\text{misura di } J^2} \sum_{j_z}\sum_{\ell} |\tfrac{1}{2},j_z,\ell,\tfrac{1}{2}\rangle\langle\tfrac{1}{2},j_z,\ell,\tfrac{1}{2}|\psi\rangle$$

$$= \text{costante}\left(-\sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{24\pi}\;|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}\rangle\right.$$

$$\left. + \sqrt{16\pi}\;|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= \text{costante}\left(-|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},1,\tfrac{1}{2}\rangle + |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2},0,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

La costante fissata dalla normalizzazione può essere $\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$|\psi_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,|\underset{j}{\tfrac{1}{2}},\underset{j_z}{-\tfrac{1}{2}},\underset{\ell}{1},\underset{s}{\tfrac{1}{2}}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\underset{j}{\tfrac{1}{2}},\underset{j_z}{-\tfrac{1}{2}},\underset{\ell}{0},\underset{s}{\tfrac{1}{2}}\rangle$$

3) Poiché H commuta con $L^2\,L_z\,S^2\,S_z$ per calcolare $|\psi_1(t)\rangle$ conviene riscrivere $|\psi_1\rangle$ nella base $|\ell\; m\; s\; s_z\rangle$

$$|\psi_1\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,|\ell=1\; m=0\; s=\tfrac{1}{2}\; s_z=-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\ell=1\; m=-1\; s=\tfrac{1}{2}\; s_z=\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\ell=0\; m=0\; s=\tfrac{1}{2}\; s_z=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Si osservi che

$$H\,|1,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\omega}{2\hbar}\hbar^2 2 + \omega\left(\hbar\, 0 + 2\hbar\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = 0$$

$$H\,|1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\omega}{2\hbar}\hbar^2 2 + \omega\left(-\hbar + 2\hbar\,\tfrac{1}{2}\right) = \hbar\omega$$

$$H\,|0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{\omega}{2\hbar}\hbar^2\cdot 0 + \omega\left(\hbar\cdot 0 + 2\hbar\left(-\tfrac{1}{2}\right)\right) = -\hbar\omega$$

pertanto

$$|\psi_1(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\,|\psi_1\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}0t}\,|1,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}\hbar\omega t}\,|1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{i}{\hbar}(-\hbar\omega)t}\,|0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{6}}\,|1,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{3}}\,|1,-1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{e^{i\omega t}}{\sqrt{2}}\,|0,0,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Esercizio 6

1) $$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\, e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_z\, e^{-\beta\frac{p_z^2}{2m}}$$

$$\int_0^\infty 4\pi q^2 dq\; e^{-\beta\gamma q^6}$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^3 4\pi\int_0^\infty \frac{du}{3\sqrt{\beta\gamma}}\, e^{-u^2} \qquad u \equiv \sqrt{\beta\gamma}\, q^3$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} 4\pi\,\frac{\sqrt{\pi}/2}{3\sqrt{\beta\gamma}}$$

$$= \frac{2^{5/2}\pi^3 m^{3/2}}{3h^3\gamma^{1/2}}\;\beta^{-2}$$

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= -N\left(-\frac{2}{\beta}\right) = 2N k_B T$$

2) L'energia libera è

$$F = -k_BT\log Z = -Nk_BT\log Z_1 \qquad Z = Z_1^N$$

$$= -Nk_BT\log\left(\frac{4\sqrt{2}\,\pi^3 m^{3/2}}{3h^3\gamma^{1/2}}(k_BT)^2\right)$$

Dalla relazione $E - F = TS$ ricaviamo

$$S = 2Nk_B + Nk_B\log\left(\frac{4\sqrt{2}\,\pi^3 m^{3/2}}{3h^3\gamma^{1/2}}(k_BT)^2\right)$$

$$= Nk_B\left[2 + \log\left(\frac{4\sqrt{2}\,\pi^3 m^{3/2}}{3h^3\gamma^{1/2}}(k_BT)^2\right)\right]$$

3) La densità degli stati di singola particella è

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^3} \int d\underline{q} \int d\underline{p} \; \delta\left(\varepsilon - H(\underline{q},\underline{p})\right)$$

$$= \frac{2}{h^3} \int_0^\infty 4\pi q^2 dq \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \; \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(q)\right)$$

dove $V(q) = \gamma q^6$ $\quad q = |\underline{q}|$

$p = |\underline{p}|$

Posto $f(p) \equiv \varepsilon - \frac{p^2}{2m} - V(q)$ valutiamo $\delta(f(p))$

Si ha $f(p) = 0$ per $p = \pm p_0$ $\quad p_0 = \sqrt{2m(\varepsilon - V(q))} > 0$

e inoltre $f'(\pm p_0) = \pm \frac{p_0}{m}$. Abbiamo quindi

$$\delta(f(p)) = \frac{1}{|f'(p_0)|} \delta(p - p_0) + \frac{1}{|f'(-p_0)|} \delta(p + p_0)$$

$$= \frac{m}{p_0} \left(\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0) \right)$$

da cui segue

$$\int_0^\infty 4\pi p^2 dp \, \delta(f(p)) = 4\pi m p_0 \; \theta\left(\varepsilon - V(q)\right) \theta(\varepsilon)$$

dove il prodotto delle 2 funzioni θ assicura che p_0 sia reale altrimenti l'integrale in p è nullo.

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^3} \int_0^\infty 4\pi q^2 dq \; 4\pi m \sqrt{2m(\varepsilon - \gamma q^6)} \; \theta(\varepsilon - \gamma q^6) \, \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{2}{h^3} \, 16\pi^2 m \int_0^{(\varepsilon/\gamma)^{1/6}} q^2 dq \sqrt{2m(\varepsilon - \gamma q^6)} \; \theta(\varepsilon)$$

$\sqrt{\gamma/\varepsilon}\, q^3 = u$

$$= \frac{2}{h^3} \, 16\pi^2 m \sqrt{2m\varepsilon} \int_0^1 \frac{du}{3\sqrt{\gamma/\varepsilon}} \sqrt{1 - u^2} \; \theta(\varepsilon)$$

Usando $\displaystyle\int_0^1 du\, \sqrt{1-u^2} = \frac{1}{2} u\sqrt{1-u^2} - \arctan\left(\frac{\sqrt{1-u^2}}{1+u}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{4}$

otteniamo

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{\hbar^3}\; 16\pi^2 m \sqrt{2m\varepsilon}\; \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\gamma}}\; \frac{\pi}{4}\; \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{8\pi^3}{3h^3}\sqrt{\frac{2m^3}{\gamma}}\; \varepsilon\; \theta(\varepsilon)$$

L'energia di Fermi è data da

$$N = \int_{-\infty}^{\varepsilon_F} G(\varepsilon)\, d\varepsilon = \frac{8\pi^3}{3h^3}\sqrt{\frac{2m^3}{\gamma}} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}\,\hbar^3}\sqrt{\frac{m^3}{\gamma}}\; \varepsilon_F^2$$

$$\varepsilon_F = \sqrt{3\sqrt{2}\,\hbar^3 N \sqrt{\frac{\gamma}{m^3}}} = \text{cost.} \cdot \sqrt{N}$$