MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2021/2022 – Prof. C. Presilla
Prova A1 – 25 gennaio 2022

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Si consideri una particella di massa m libera di muoversi lungo l'asse x. Sia H la sua Hamiltoniana e P l'operatore di parità (inversione spaziale). Determinare se
1) H e P sono osservabili compatibili;
2) H e P formano un sistema completo di osservabili compatibili.

[punteggio 4]

---

2 Un quark di massa circa $m_p/3$, dove m_p è la massa del protone, è confinato all'interno di una scatola cubica di lato $a = 2 \times 10^{-15}$m. Determinare l'energia di eccitazione dallo stato fondamentale al primo eccitato esprimendola in MeV.

[punteggio 4]

---

3 Un sistema di $N = 3$ particelle quantistiche identiche è descritto da una Hamiltoniana di singola particella che ha $D = 4$ livelli non degeneri $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$. Determinare il numero di microstati del sistema nel caso in cui:
1) le particelle sono fermioni;
2) le particelle sono bosoni.
Opzionale, generalizzare le risposte 1) e 2) al caso N e D arbitrari numeri interi con $N \leq D$.

[punteggio 4]

---

4 Un atomo di idrogeno, descritto nel sistema del centro di massa dall'Hamiltoniana

$$H_0 = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2\mu} - \frac{e^2}{r},$$

dove $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ e $1/\mu = 1/m_e + 1/m_p$ con m_e massa dell'elettrone e m_p massa del protone, viene sottoposto alla perturbazione $H' = \lambda xy$, con λ parametro piccolo. Determinare:
1) la correzione al primo ordine in λ dell'energia dello stato fondamentale di H;
2) la correzione al primo ordine in λ dell'energia del primo stato eccitato di H.

[punteggio 7]

5 Si consideri un sistema composto da due particelle identiche di massa m e spin $1/2$ vincolate a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R. Siano $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$ gli spin delle due particelle, $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ i loro momenti angolari orbitali e $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$. Il sistema si trova nello stato $|\psi\rangle = |\psi_{\text{orb}}\rangle \otimes |\psi_{\text{spin}}\rangle$, dove $|\psi_{\text{spin}}\rangle$ è autostato normalizzato di S_z con autovalore 0 mentre $|\psi_{\text{orb}}\rangle$ corrisponde in rappresentazione di Schrödinger alla funzione d'onda

$$|\psi_{\text{orb}}\rangle \to N(\sin\theta_1 \cos\varphi_1 - \sin\theta_2 \cos\varphi_2),$$

dove (R, θ_1, φ_1) e (R, θ_2, φ_2) sono le coordinate polari delle due particelle. Determinare:
1) la costante N di normalizzazione dello stato $|\psi\rangle$;
2) i possibili risultati di una misura di S_{1z} e le relative probabilità;
3) i possibili risultati di una misura di L_{1z} e le relative probabilità.
4) Se l'Hamiltoniana del sistema è $H = \alpha(J^2 + L^2) + \beta J_z$, dove $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$, quali sono i possibili risultati di una misura di energia nello stato $|\psi\rangle$ e le relative probabilità?

[punteggio 7]

6 Un gas di N particelle identiche di massa nulla e spin $1/2$ è contenuto in un recipiente di volume V e in equilibrio termico con un termostato a temperatura T. L'Hamiltoniana di singola particella è

$$H = c\,|\boldsymbol{p}| + \sigma\epsilon_0, \qquad \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3, \quad \sigma = \pm 1,$$

dove c è la velocità della luce e ϵ_0 una costante positiva che tiene conto dell'interazione dello spin con un campo magnetico esterno. Nell'ipotesi che le particelle possano essere descritte come particelle classiche indistinguibili, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) la pressione media P del sistema;
3) il valore medio di σ;
4) l'entropia S del sistema.
Si consideri poi il caso in cui la temperatura di equilibrio sia approssimabile con $T = 0$. Descrivendo le particelle come fermioni, calcolare:
5) il numero N di particelle in funzione dell'energia di Fermi ϵ_F, nell'ipotesi che si abbia $\epsilon_F > \epsilon_0$. Suggerimento: si consideri che $N = N_+ + N_-$, dove $N_\pm$ è il numero di particelle con $\sigma = \pm 1$.

[punteggio 7]

Si ha $H = \frac{P^2}{2m} \to -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$ in rappresentazione di Schrödinger, H ha autovalori $\frac{p^2}{2m}$ doppiamente degeneri $p \in [0, +\infty)$ (ad eccezione di $p=0$, non degenere)

$$H\,|p\rangle = \frac{p^2}{2m}\,|p\rangle \qquad H\,|-p\rangle = \frac{p^2}{2m}\,|-p\rangle$$

con $\langle x|\pm p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\pm i\frac{px}{\hbar}}$

P ha autovalori ± 1 con degenerazione infinita, le autofunzioni corrispondenti sono le funzioni pari o dispari

$$P\, f_\pm(x) = \pm 1\, f_\pm(x) \qquad f_\pm(-x) = \pm f_\pm(x)$$

Evidentemente $[H, P] = 0$ (si esegue il commutatore in rappresentazione di Schrödinger) quindi H e P sono osservabili compatibili.

E' pertanto possibile trovare un sistema di autovettori comune ad H e P. Questi autovettori sono

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|p\rangle + |-p\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}}\cos\left(\frac{px}{\hbar}\right) \qquad \text{pari}$$

$$p \in [0, \infty)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\,i}\left(|p\rangle - |-p\rangle\right) \to \frac{1}{\sqrt{\pi\hbar}}\sin\left(\frac{px}{\hbar}\right) \qquad \text{dispari}$$

Le coppie di autovalori di H e P corrispondenti a questi autovettori sono

$$(p, +1) \qquad (p, -1) \qquad p \in [0, \infty)$$

Queste coppie sono non degeneri, possiamo quindi concludere che H e P formano un sistema completo di osservabili compatibili.

Esercizio 2

Il confinamento di una particella di massa m in un segmento di lunghezza a determina una quantizzazione della lunghezza d'onda di de Broglie

$$a = n\frac{\lambda}{2} = n\,\frac{1}{2}\,\frac{h}{p} = n\pi\frac{\hbar}{p} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

e quindi dell'energia

$$E = E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \left(\frac{n\pi\hbar}{a}\right)^2 \frac{1}{2m} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\,n^2$$

Per il confinamento in un cubo di lato a le energie sono

$$E_{n_x n_y n_z} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\left(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2\right) \qquad n_x, n_y, n_z = 1, 2, 3, \ldots$$

Lo stato fondamentale ha energia $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\,3$

e il primo eccitato $\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\,6$

Pertanto l'energia di eccitazione vale

$$\Delta E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}\,3$$

$$= \frac{3}{2}\pi^2 \frac{\left(10^{-34}\ \mathrm{J\,s}\right)^2}{\frac{1}{3}1.67\,10^{-27}\,\mathrm{kg}\ \ 4\,10^{-30}\,\mathrm{m}^2}$$

$$= \frac{9\pi^2}{8\cdot 1.67}\cdot 10^{-11}\ \mathrm{J}$$

$$= 6.63\ 10^{-11}\ \mathrm{J} = \frac{6.63\ 10^{-11}}{1.6\ 10^{-19}}\,\mathrm{eV}$$

$$= 4.15\ 10^{8}\,\mathrm{eV} = 415\ \mathrm{MeV}$$

Esercizio (3)

1) Se le particelle sono fermioni possiamo avere una sola particella per ogni stato di singola particella quindi i microstati sono i seguenti 4:

(1,2,3) (1,2,4) (1,3,4) (2,3,4)

2) Se le particelle sono bosoni abbiamo solo il vincolo di indistinguibilità e il numero di microstati è 20:

(1,1,1) (1,1,2) (1,1,3) (1,1,4)
(1,2,2) (1,2,3) (1,2,4)
(1,3,3) (1,3,4)
(1,4,4)
(2,2,2) (2,2,3) (2,2,4)
(2,3,3) (2,3,4)
(2,4,4)
(3,3,3) (3,3,4)
(3,4,4)
(4,4,4)

3) Nel caso dei fermioni il numero di microstati, cioè la dimensione dello spazio di Fock fermionico, è equivalente al problema combinatorio delle combinazioni semplici di D elementi presi N alla volta

$$\binom{D}{N} = \frac{D!}{N!\,(D-N)!} \qquad D \geq N$$

Nel caso di bosoni, il numero di microstati, cioè la dimensioni dello spazio di Fock, è equivalente al problema combinatorio delle combinazioni con ripetizione in cui ogni elemento può essere ripetuto fino a N volte.

$$\binom{N+D-1}{N} = \binom{N+D-1}{D-1} = \frac{(N+D-1)!}{N!\,(D-1)!}$$

Esercizio 4

I livelli energetici di H_0 sono

$$E_n^{(0)} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2}\frac{1}{n^2} \qquad n=1,2,3,\dots \qquad a_B = \frac{\hbar^2}{\mu e^2}$$

la degenerazione del livello n è $g_n = n^2$ e ad esso corrispondono gli autovettori

$$|n,l,m\rangle = |E_{n,l,m}^{(0)}\rangle \qquad l=0,1,\dots,n-1 \quad -l\le m\le l$$

Il livello fondamentale $E_1^{(0)}$ è non degenere e la correzione all'ordine 1 in λ indotta da $H' = \lambda xy$ è

$$\lambda E_1^{(1)} = \langle E_{100}^{(0)}| H' | E_{100}^{(0)}\rangle = \lambda \langle 1,0,0| xy | 1,0,0\rangle$$

$= 0$ per motivi di simmetria

Infatti, in coordinate polari abbiamo

$$xy = r^2 \sin^2\theta \cos\varphi \sin\varphi$$

$$\langle r,\theta,\varphi | n,l,m\rangle = R_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$R_{10}(r) = \frac{2}{a_B^{3/2}} e^{-\frac{r}{a_B}} \qquad Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$R_{20}(r) = \frac{1}{(2a_B)^{3/2}}\left(2-\frac{r}{a_B}\right) e^{-\frac{r}{a_B 2}}$$

$$R_{21}(r) = \frac{1}{(2a_B)^{3/2}}\frac{r}{\sqrt{3}a_B} e^{-\frac{r}{2a_B}} \qquad Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{-i\varphi}$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_{1-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\varphi}$$

Pertanto

$$\langle 1,0,0| xy | 1,0,0\rangle = \int_0^{\infty} r^2 dr \int_0^{\pi} \sin\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \overline{R_{10}(r) Y_{00}(\vartheta,\varphi)}$$

$$r^2 \sin^2\vartheta \cos\varphi \sin\varphi \; R_{10}(r) Y_{00}(\vartheta,\varphi)$$

$$= 0$$

in quanto $\int_0^{2\pi} d\varphi \cos\varphi \sin\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}\sin(2\varphi) = 0$

Il livello successivo $n=2$ è 4 volte degenere pertanto la correzione indotta da H' all'ordine 1 in λ è data dagli autovalori della matrice 4×4 con elementi

$\langle 2,l,m| \lambda xy | 2,l',m'\rangle$ $\quad$ $l=0$ $m=0$, $l'=0$ $m'=0$ $\quad$ $l=1$ $m=-1,0,1$, $l'=1$ $m'=-1,0,1$

Come nel caso precedente risultano 0 tutti gli elementi di matrice con $m=0$ e/o $m'=0$.
Valgono 0 anche gli elementi di matrice con $m=\pm1$ e $m'=\pm1$.

Gli unici elementi di matrici non nulli sono quelli con $m=\pm1$ e $m'=\mp1$

$$\langle 2,1,\pm1| xy | 2,1,\mp1\rangle$$

$$= \int_0^{\infty} r^4 R_{21}(r)^2 \int_0^{\pi}\left(-\frac{3}{8\pi}\right)\sin^3\vartheta\, d\vartheta \int_0^{2\pi} \sin\varphi\cos\varphi\, e^{\pm i2\varphi} d\varphi$$

$$= \int_0^{\infty} r^4 \frac{1}{(2a_B)^3}\frac{1}{3}\frac{r^2}{a_B^2} e^{-\frac{r}{a_B}} dr \left(-\frac{3}{8\pi}\right)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^2 dx$$

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\sin(2\varphi)\left(\cos(2\varphi)\pm i\sin(2\varphi)\right)d\varphi$$

$$= \frac{1}{24} a_B^2 \int_0^\infty t^6 e^{-t} dt \left(-\frac{3}{8\pi}\right) \frac{16}{15} \left(\pm \frac{i}{2}\right) \int_0^{2\pi} \sin^2(2\varphi)\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{24} a_B^2\, 6! \left(-\frac{2}{5\pi}\right)\left(\pm\frac{i}{4}\right) \frac{1}{2} 4\pi$$

$$= \mp i\, 30\, a_B^2 \frac{\cancel{2}}{5\cancel{\pi}} \frac{\cancel{\pi}}{\cancel{2}} = \mp i\, 6\, a_B^2$$

La matrice di cui dobbiamo calcolare gli autovalori è

$$\begin{array}{c|c} & \begin{matrix} 10 & 1\,{-1} & 10 & 11 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 10 \\ 1\,{-1} \\ 10 \\ 11 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i6a_B^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i6a_B^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Detta $\lambda E_2^{(1)}$ la correzione a $E_2^{(0)}$, $E_2^{(1)}$ è dato da

$$\det \begin{pmatrix} -E_2^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_2^{(1)} & 0 & i6a_B^2 \\ 0 & 0 & -E_2^{(1)} & 0 \\ 0 & -i6a_B^2 & 0 & -E_2^{(1)} \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = -E_2^{(1)}\left(-E_2^{(1)}\left(E_2^{(1)}\right)^2 + i6a_B^2\left(-E_2^{(1)} i6a_B^2\right)\right)$$

$$= \left(E_2^{(1)}\right)^2\left(\left(E_2^{(1)}\right)^2 + \left(i6a_B^2\right)^2\right)$$

le cui soluzioni sono $E_2^{(1)} = 0$, $E_2^{(1)} = 0$, $E_2^{(1)} = \pm 6a_B^2$

Dunque al primo ordine in λ la degenerazione di $E_2^{(0)}$ è solo parzialmente rimossa e si hanno i seguenti 3 livelli

$$E_2^{(0)} + \lambda E_2^{(1)} = -\frac{\hbar^2}{2\mu a_B^2}\frac{1}{4} + \begin{cases} +\lambda\, 6\, a_B^2 & \text{non degenere} \\ 0 & \text{due volte degenere} \\ -\lambda\, 6\, a_B^2 & \text{non degenere} \end{cases}$$

Esercizio 5

Lo stato $|\psi\rangle$ deve essere antisimmetrico per scambio delle due particelle. Poiché $|\psi_{orb}\rangle$ è antisimmetrico deve aversi $|\psi_{spin}\rangle$ simmetrico cioè deve aversi uno stato di tripletto con $s=1$. Sappiamo anche che tale stato è autostato di S_z con autovalore $s_z=0$ quindi

$$|\psi_{spin}\rangle = |s=1, s_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\,-\rangle + |-\,+\rangle\Big)$$

con $\langle\psi_{spin}|\psi_{spin}\rangle = 1$.

Osservando che $Y_{1\,\pm1}(\theta,\varphi) = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{\pm i\varphi}$ abbiamo

$$\sin\theta\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big(\sin\theta\, e^{i\varphi} + \sin\theta\, e^{-i\varphi}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8\pi}{3}}\Big(-Y_{11}(\theta,\varphi) + Y_{1-1}(\theta,\varphi)\Big)$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(-Y_{11}(\theta,\varphi) + Y_{1-1}(\theta,\varphi)\Big)\frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

e otteniamo, si ricordi che $Y_{00}(\theta,\varphi) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$

$$|\psi_{orb}\rangle = N\, 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\Big[\Big(-|l_1=1, l_{1z}=1\rangle + |l_1=1, l_{1z}=-1\rangle\Big)\otimes|l_2=0, l_{2z}=0\rangle$$

$$-|l_1=0, l_{1z}=0\rangle\otimes\Big(-|l_2=1\, l_{2z}=1\rangle + |l_2=1, l_{2z}=-1\rangle\Big)\Big]$$

$$= N\, 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\Big(-|1,1,0,0\rangle + |1,-1,0,0\rangle + |0,0,1,1\rangle - |0,0,1,-1\rangle\Big)$$

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \langle\psi_{orb}|\psi_{orb}\rangle = |N|^2\, 4\pi^2\,\frac{2}{3}\,(1+1+1+1)$$

Scegliamo N reale positivo $\quad N = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{4\pi}$

$$|\psi_{orb}\rangle = \frac{1}{2}\Big(-|1,1,0,0\rangle + |1,-1,0,0\rangle + |0,0,1,1\rangle - |0,0,1,-1\rangle\Big)$$

Una misura di S_{1z} stante il sistema nello stato $|\psi\rangle$ fornisce i risultati $\pm\frac{\hbar}{2}$ entrambi con probabilità $\frac{1}{2}$.

Una misura di L_{1z} fornisce invece

$L_{1z} = 1\cdot\hbar \qquad prob_{L_{1z}=1\hbar} = \frac{1}{4}$

$L_{1z} = 0\cdot\hbar \qquad prob_{L_{1z}=0\hbar} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

$L_{1z} = -1\cdot\hbar \qquad prob_{L_{1z}=-1\hbar} = \frac{1}{4}$

Si noti che $|\psi_{orb}\rangle$ è espresso nella base di $L_1^2, L_{1z}, L_2^2, L_{2z}$
Nella base di L^2, L_z, L_1^2, L_2^2 si ha

$$|\psi_{orb}\rangle = \frac{1}{2}\Big(-|1,1,1,0\rangle + |1,-1,1,0\rangle + |1,1,0,1\rangle - |1,-1,0,1\rangle\Big)$$

D'altro canto nella base di S^2, S_z si ha

$$|\psi_{spin}\rangle = |1,0\rangle$$

Dunque $|\psi\rangle = |\psi_{orb}\rangle \otimes |\psi_{spin}\rangle$ è espresso nella base di $L^2, L_z, S^2, S_z; L_1^2, L_2^2$. Passando a una rappresentazione in termini di $J^2, J_z, L^2, S^2; L_1^2 L_2^2$ si ha

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}\Big[-\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|2,1,1,1;1\,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1,1,1;1\,0\rangle\Big)$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|2,-1,1,1;1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1;1,1;1,0\rangle\Big)$$
$$+\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|2,1,1,1;0\,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1,1,1,1;0,1\Big)$$
$$-\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}|2,-1,1,1;0,1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1,1,1;0,1\rangle\Big)\Big]$$

Una misura di $\alpha(J^2+L^2)+\beta J_z$ fornisce i valori
$\alpha\big(\hbar^2 2(2+1) + \hbar^2 1(1+1)\big) \pm \beta\hbar$ con probabilità $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$
$\alpha\big(\hbar^2 1(1+1) + \hbar^2 1(1+1)\big) \pm \beta\hbar$ con probabilità $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{4}$

$$Z_N = \frac{Z_1^N}{N!}$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3} \sum_\sigma \int_V d\underline{q} \int d\underline{p}\; e^{-\beta(c|\underline{p}| + \sigma\varepsilon_0)}$$

$$= \frac{1}{h^3} V \int_0^\infty 4\pi p^2 dp\, e^{-\beta c p}\left(e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{\beta\varepsilon_0}\right)$$

$$= \frac{V}{h^3} \frac{4\pi}{(\beta c)^3} \int_0^\infty u^2 e^{-u} du \left(e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{\beta\varepsilon_0}\right)$$

$$= \frac{V}{h^3} \frac{8\pi}{\beta^3 c^3}\; 2\cosh(\beta\varepsilon_0)$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= N\left(\frac{3}{\beta} - \varepsilon_0 \tanh(\beta\varepsilon_0)\right)$$

$$P = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\log Z_N = \frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial V}\left(N\log Z_1 - \log N!\right)$$

$$= \frac{1}{\beta} N \frac{1}{V} = \frac{N k_B T}{V}$$

$$\langle\sigma\rangle = \sum_\sigma \sigma \frac{e^{-\beta\sigma\varepsilon_0}}{\sum_{\sigma'} e^{-\beta\sigma'\varepsilon_0}}$$

$$= \frac{e^{-\beta\varepsilon_0} - e^{+\beta\sigma_0}}{e^{-\beta\varepsilon_0} + e^{+\beta\sigma_0}} = -\tanh(\beta\varepsilon_0)$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(-k_B T\log Z_N\right) = k_B\frac{\partial}{\partial T}\left(T\log Z_N\right)$$

$$= k_B \log Z_N + k_B T\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\log Z_N\right)\frac{\partial\beta}{\partial T}$$

$$= k_B\left(N\log Z_1 - \log N! - \frac{T}{k_B T^2}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(N\log Z_1 - \log N!\right)\right)$$

Usando $\log N! = N\log N - N + O(\log N)$

$$S = N k_B \left(\log Z_1 - \log N + 1 - \frac{1}{k_B T} \frac{\partial}{\partial \beta} \log Z_1 \right)$$

$$= N k_B \left(1 + \log\left(\frac{8\pi}{(\beta h c)^3} \frac{V}{N} \, 2 \cosh(\beta \varepsilon_0) \right) + \frac{1}{k_B T} \left(\frac{3}{\beta} - \varepsilon_0 \tanh(\beta \varepsilon_0) \right) \right)$$

$$= N k_B \left[4 + \log\left(\frac{16\pi}{(\beta h c)^3} \frac{V}{N} \cosh(\beta \varepsilon_0) \right) - \beta \varepsilon_0 \tanh(\beta \varepsilon_0) \right]$$

Siano $G_\pm(\varepsilon)$ le densità degli stati di singola particella per $\sigma = \pm 1$. Si ha

$$G_\pm(\varepsilon) = \frac{1}{h^3} \int_V d\underline{q} \int d\underline{p} \; \delta\left(\varepsilon - c|\underline{p}| \mp \varepsilon_0 \right)$$

$$= \frac{V}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \; \delta\left(\varepsilon - c p \mp \varepsilon_0 \right)$$

$$= \frac{V}{h^3} \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \; \frac{1}{c} \delta\left(p - \frac{\varepsilon \mp \varepsilon_0}{c} \right)$$

$$= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \left(\varepsilon \mp \varepsilon_0 \right)^2 \theta\left(\varepsilon \mp \varepsilon_0 \right)$$

Il numero di particelle con $\sigma = \pm 1$ è quindi, se $\varepsilon_F > \varepsilon_0$,

$$N_\pm = \int_{\pm \varepsilon_0}^{\varepsilon_F} G_\pm(\varepsilon) \, d\varepsilon$$

$$= \int_{\pm\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} \frac{4\pi V}{(hc)^3} (\varepsilon \mp \varepsilon_0)^2 d\varepsilon$$

$$= \frac{4\pi V}{(hc)^3} \frac{1}{3} (\varepsilon \mp \varepsilon_0)^3 \Big|_{\pm\varepsilon_0}^{\varepsilon_F} = \frac{4\pi}{3} \frac{V}{(hc)^3} (\varepsilon_F \mp \varepsilon_0)^3$$

$$N = N_+ + N_- = \frac{4\pi}{3} \frac{V}{(hc)^3} \left[(\varepsilon_F - \varepsilon_0)^3 + (\varepsilon_F + \varepsilon_0)^3 \right]$$