MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2017/2018 – Prof. C. Presilla
Prova A3 – 25 giugno 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Sia $H = p^2/(2m) + V(q)$ l'operatore Hamiltoniano di un sistema unidimensionale con p e q operatori impulso e posizione. Determinare il commutatore $[H, qp]$. Quale teorema può essere ottenuto da questo risultato?

[punteggio 4]

2 Si consideri l'Hamiltoniana $H = -\hbar^2/(2m)\mathrm{d}^2/\mathrm{d}x^2 + V(x)$, con $V(x) = ax^4 - bx^2$, $a > 0$, $b > 0$. Disegnare qualitativamente, senza fare calcoli, la forma delle due autofunzioni di H con autovalore più basso.

[punteggio 4]

3 Scrivere la funzione di distribuzione microcanonica e spiegare in quali casi si applica.

[punteggio 4]

4 Un flusso stazionario di particelle di massa m prive di spin, provenienti da $x = -\infty$, incide con energia $E = V_0$ sulla barriera di potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > a \\ V_0 & 0 \le x \le a \end{cases}, \qquad a > 0.$$

Determinare:
1) la funzione d'onda associabile alla singola particella;
2) i coefficienti di riflessione e trasmissione;
3) la probabilità relativa di trovare la particella negli intervalli $[0, a]$ e $[a, 2a]$;
4) il valore dei coefficienti di riflessione e trasmissione nel limite $a \to \infty$.

[punteggio 7]

5 Si consideri un sistema composto da due particelle distinguibili di spin 1/2. Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = |\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2|^2$ dia come risultato il valore $2\hbar^2$ nel caso in cui:
1) gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $+z$;
2) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+z$ e quello della particella 2 nella direzione $-z$;
3) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+x$ e quello della particella 2 nella direzione $+z$.

[punteggio 7]

6 Un sistema in equilibrio termico alla temperatura T è composto da N microsistemi distinguibili non interagenti tra di loro. Ogni microsistema ha due livelli energetici di energia E_0 ed $E_1 > E_0$ con degenerazioni $d_0 = 2$ e $d_1 = 4$.
1) scrivere la somma di partizione canonica del sistema;
2) calcolare l'energia media E del sistema;
3) determinare l'andamento di E (termine costante e prima correzione in β) nel limite di bassa temperatura;
4) calcolare l'entropia del sistema.

[punteggio 7]

Esercizio 1

$$[H, qp] = \left[\frac{p^2}{2m} + V(q), qp\right]$$

$$= q\left[\frac{p^2}{2m} + V(q), p\right] + \left[\frac{p^2}{2m} + V(q), q\right] p$$

$$= q\,[V(q), p] + \left[\frac{p^2}{2m}, q\right] p$$

$[q, p] = i\hbar$

$$\doteq q\, i\hbar \frac{\partial V}{\partial q} - i\hbar \frac{2p}{2m}\, p$$

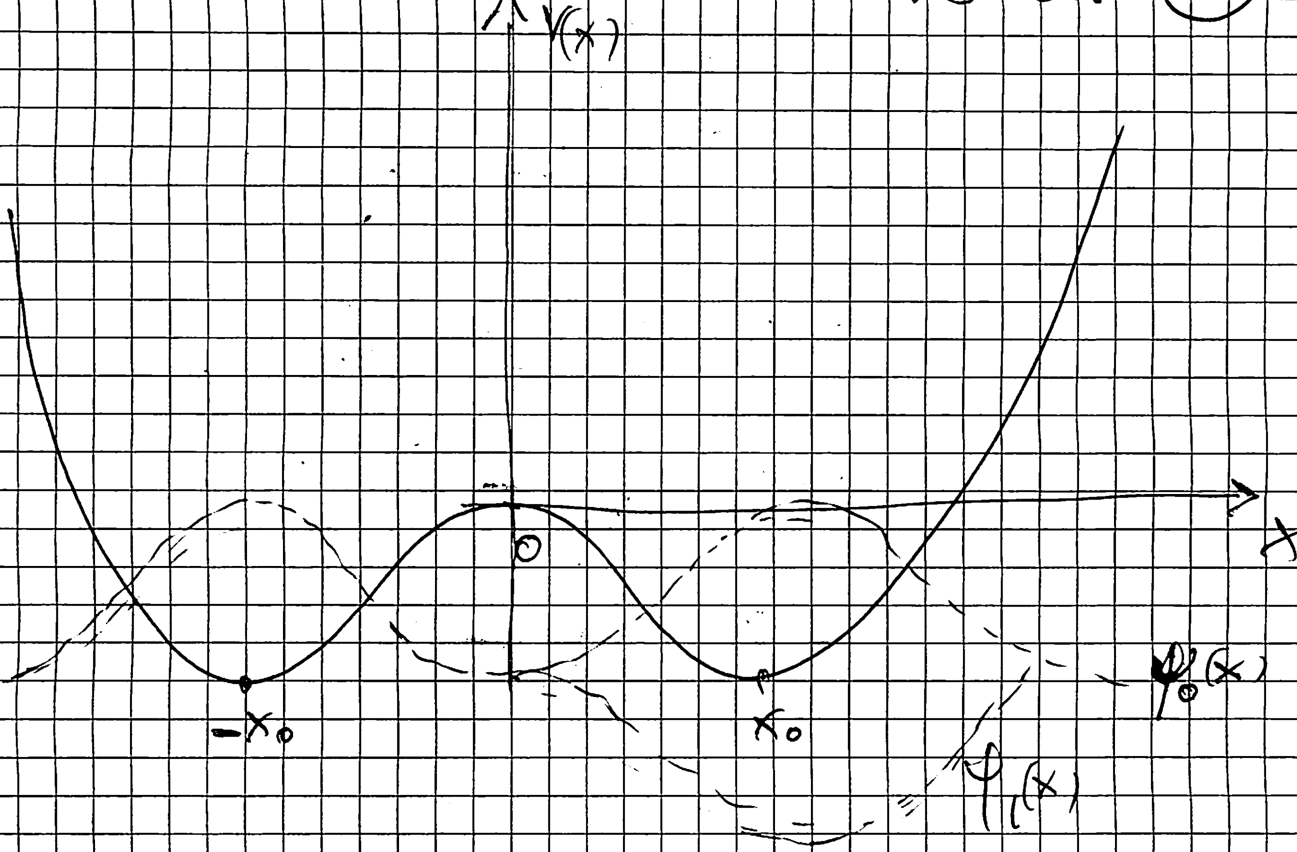
$$= i\hbar\left(q\frac{\partial V}{\partial q} - \frac{p^2}{m}\right)$$

se $|E\rangle$ è autostato di H $\quad H|E\rangle = E|E\rangle$ si ha

$\langle E|\,[H, qp]\,|E\rangle = 0$ e quindi (teorema del viriale)

$$2\langle E|\frac{p^2}{2m}|E\rangle = \langle E|\, q\frac{\partial V}{\partial q}\,|E\rangle$$

Esercizio 2



$\varphi_0(x) = \varphi_0(-x)$ zero nodi

$\varphi_1(x) = -\varphi_1(-x)$ 1 nodo in $x=0$

$|\varphi_0(x)|^2$ e $|\varphi_1(x)|^2$ massime in $\pm x_0$

evanescenti sotto barriera

Esercizio 3

sistema isolato ad energia E

$$H(p,q) = E$$

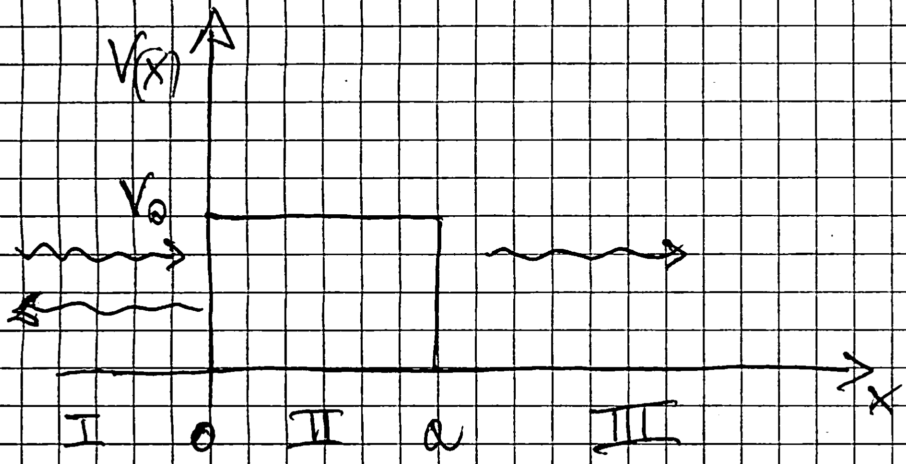
$$\rho_{MC} = \frac{1}{\Omega(E)} \delta(E - H(p,q))$$

$\Omega(E)$ determinato da $\displaystyle\int \frac{dp\,dq}{h^{3N} N!} \rho_{MC} = 1$

$$\Omega(E) = \int \frac{dp\,dq}{h^{3N} N!} \delta(H(p,q) - E)$$

$$= \mathrm{Tr}\ \delta(H - E)$$

Esercizio 4



Eq. di Schrödinger per $E = V_0$ nelle regioni I, II, III

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = V_0\,\psi(x) \qquad \text{in I e III}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V_0\,\psi(x) = V_0\,\psi(x) \qquad \text{in II}$$

soluzione con le opportune condizioni per $x \to \pm\infty$

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + A e^{-ikx} & x < 0 \\ Bx + C & 0 < x < a \\ D e^{ikx} & x > a \end{cases}$$

dove $k = \sqrt{\dfrac{2mV_0}{\hbar^2}}$

imponendo la continuità di $\psi(x)$ e $\psi'(x)$ nei punti 0 e a

$$\begin{cases} 1 + A = C \\ ik(1 - A) = B \\ Ba + C = D e^{ika} \\ B = ikD e^{ika} \end{cases}$$

$$C = 1 + A \qquad D = B\,\frac{e^{-ika}}{ik} \qquad B = ik(1-A)$$

$$D = (1-A)\,e^{-ika}$$

$$ik(1-A)\,a + (1+A) = (1-A)$$

$$(2 - ika)\,A = -ika \qquad A = \frac{ika}{ika-2}$$

$$B = \frac{-2ik}{ika-2}$$

$$C = \frac{2ika-2}{ika-2}$$

$$D = \frac{-2e^{-ika}}{ika-2}$$

2) coefficiente di riflessione $R = |A|^2 = \dfrac{k^2a^2}{4+k^2a^2}$

" " trasmissione $T = |D|^2 = \dfrac{4}{4+k^2a^2}$

nota di $R+T=1$

3) $P_{[0,a]}$ = probabilità di trovare la particella in $[0,a]$

$$\propto \int_0^a |\psi(x)|^2 \, dx$$

$P_{[a,2a]}$ = probabilità di trovare la particella in $[a,2a]$

$$\propto \int_a^{2a} |\psi(x)|^2 dx$$

$$\int_0^a |\psi(x)|^2 dx = \int_0^a |Bx + C|^2 dx$$

$$= |B|^2 \frac{a^3}{3} + |C|^2 a + (\overline{B}C + B\overline{C}) \frac{a^2}{2}$$

$$= \frac{4k^2 \frac{a^3}{3} + (4k^2a^2 + 4)a - 8ka^2 \frac{a^2}{2}}{4 + k^2a^2}$$

$$= \frac{\frac{4}{3}k^2a^3 + 4a}{4 + k^2a^2}$$

$$\int_a^{2a} |\psi(x)|^2 dx = \int_a^{2a} |De^{ikx}|^2 dx$$

$$= |D|^2 a$$

$$= \frac{4a}{4 + k^2a^2}$$

$$\frac{P_{[0,a]}}{P_{[a,2a]}} = 1 + \frac{1}{3} k^2 a^2$$

4)

$$\lim_{\alpha \to \infty} R = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{k^2 \alpha^2}{4 + k^2 \alpha^2} = 1$$

$$\lim_{\alpha \to \infty} T = \lim_{\alpha \to \infty} \frac{4}{4 + k^2 \alpha^2} = 0$$

Esercizio 5

Esprimiamo gli autostati di $S_1^2\ S_2^2\ S^2\ S_z$ in termini di quelli $S_1^2\ S_{1z}\ S_2^2\ S_{2z}$

$S^2 |S\,S_z\rangle = \hbar^2 S(S+1)|S\,S_z\rangle$

$S_z |S\,S_z\rangle = \hbar S_z |S\,S_z\rangle$

$S_{1z} |S_{1z}\,S_{2z}\rangle = \hbar S_{1z} |S_{1z}\,S_{2z}\rangle$

$S_{2z} |S_{1z}\,S_{2z}\rangle = \hbar S_{2z} |S_{1z}\,S_{2z}\rangle$

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z|-\rangle_z - |-\rangle_z|+\rangle_z\right)$$

$$|1,1\rangle = |+\rangle_z|+\rangle_z$$

$$|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z|-\rangle_z + |-\rangle_z|+\rangle_z\right)$$

$$|1,-1\rangle = |-\rangle_z|-\rangle_z$$

misurare per S^2 il valore $2\hbar^2$ significa avere $S=1$

2) $|\psi\rangle = |+\rangle_z|-\rangle_z$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,0\rangle\right)$$

$$P(S=1) = \frac{1}{2} = \sum_{S_z=-1}^{1} |\langle 1, S_z|\psi\rangle|^2$$

1) $|\psi\rangle = |+\rangle_z \, |+\rangle_z$

$= |1,1\rangle$

$P(S=1) = 1 = \sum_{S_z=-1,0,1} \left|\langle 1, S_z | \psi\rangle\right|^2$

3) $|\psi\rangle = |+\rangle_x \, |+\rangle_z$

$|+\rangle_x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + |-\rangle_z\right)$

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z |+\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |0,0\rangle\right)\right)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} |1,1\rangle + \frac{1}{2} |1,0\rangle - \frac{1}{2} |0,0\rangle$

$P(S=1) = \sum_{S_z} \left|\langle 1, S_z | \psi\rangle\right|^2$

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$

$= \frac{3}{4}$

Esercizio 6

1) $Z = Z_1^N$

$$Z_1 = d_0 e^{-\beta E_0} + d_1 e^{-\beta E_1}$$
$$= 2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}$$

2) $$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z$$
$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z_1$$
$$= -N \frac{\partial}{\partial \beta} \ln\left(2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}\right)$$
$$= -N \frac{-2E_0 e^{-\beta E_0} - 4E_1 e^{-\beta E_1}}{2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}}$$
$$= N \frac{E_0 2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1} E_1}{2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}}$$

3) per $T \to 0$ cioè $\beta \to \infty$ $\qquad \beta = \frac{1}{k_B T}$

$$E(\beta) = N \frac{2E_0 + 4E_1 e^{-\beta(E_1 - E_0)}}{2 + 4 e^{-\beta(E_1 - E_0)}}$$
$$\simeq N E_0 \left(1 + \frac{E_1}{E_0} 2 e^{-\beta(E_1 - E_0)}\right) \left(1 + 2 e^{-\beta(E_1 - E_0)}\right)^{-1}$$
$$= N E_0 \left(1 + \left(\frac{E_1}{E_0} - 1\right) 2 e^{-\beta(E_1 - E_0)} + \dots\right)$$

$$= N\left[E_0 + 2(E_1 - E_0)\, e^{-\beta(E_1 - E_0)} + O\left(e^{-2\beta(E_1-E_0)}\right)\right]$$

4) $$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -\frac{\partial}{\partial T}\left(-k_B T \ln Z\right)$$

$$= k_B \ln Z + k_B T \frac{\partial}{\partial T} \ln Z$$

$$= \frac{k_B T}{T} \ln Z + k_B T \left(\frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z\right) \frac{\partial \beta}{\partial T}$$

$$= -\frac{F}{T} + \frac{E}{T}$$

$$= \frac{E - F}{T}$$

$$\frac{F}{T} = -k_B \ln Z = -k_B N \ln Z_1 = -N k_B \ln\left(2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}\right)$$

$$S = N k_B \left(\beta \frac{E_0 + 2E_1 e^{-\beta(E_1 - E_0)}}{1 + 2 e^{-\beta(E_1 - E_0)}} + \ln\left(2 e^{-\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_1}\right)\right)$$