MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2020/2021 – Prof. C. Presilla
Prova A3 – 25 giugno 2021

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità									

esercizio	1	2	3	4	5	6
voto						

1 Siano ξ ed η due generici operatori, non necessariamente autoaggiunti, che commutano con $[\xi, \eta]$. Dimostrare che

$$\xi^2\eta + \eta\xi^2 = 2\xi\eta\xi, \qquad \eta^2\xi + \xi\eta^2 = 2\eta\xi\eta.$$

[punteggio 3]

---

2 Una particella si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(\boldsymbol{r}) = (x^2 - y^2) f(r), \qquad \boldsymbol{r} = (x, y, z), \qquad r = |\boldsymbol{r}|\,.$$

Quali sono i possibili risultati di una misura di L_z, terza componente del momento angolare orbitale $\boldsymbol{L}$ della particella, e le rispettive probabilità? Quali i possibili risultati di una misura di L^2?

[punteggio 5]

---

3 Un sistema di N particelle aventi spin $\hbar/2$ è sottoposto a un campo magnetico esterno. Determinare il numero di microstati $\mathcal{N}$ del sistema in corrispondenza al macrostato caratterizzato dall'autovalore $\hbar M_z$ della terza componente dello spin totale (si osservi che $M_z = -N/2, -N/2+1, \ldots, N/2-1, N/2$). Calcolare, nel limite di N molto grande, il valore di M_z per cui $\mathcal{N}(M_z)$ risulta massimo.

[punteggio 5]

---

4 Una particella di massa m si nuove lungo l'asse x sotto l'influenza del potenziale $V(x)$. La particella si trova in un autostato dell'energia con autofunzione

$$\psi(x) = (\gamma^2/\pi)^{1/4} e^{-\gamma^2 x^2/2}$$

ed energia $E = \hbar^2\gamma^2/(2m)$. Determinare:
1) la posizione media della particella;
2) la quantità di moto media della particella;
3) il valore del potenziale $V(x)$.

[punteggio 6]

5 L'Hamiltoniana che descrive l'interazione tra due particelle di spin 1/2 è

$$H = a + \frac{4b}{\hbar^2}\boldsymbol{S}_1 \cdot \boldsymbol{S}_2,$$

dove a e b sono costanti reali e $\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2$ gli operatori di spin delle due particelle. Sia $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2$ lo spin totale del sistema.
1) Dimostrare che H, S^2 e S_z possono essere misurati contemporaneamente.
2) Scrivere la matrice che rappresenta H e calcolarne i corrispondenti autovalori nella base dei vettori $|s, m, s_1, s_2\rangle$,
3) Scrivere la matrice che rappresenta H e calcolarne i corrispondenti autovalori nella base dei vettori $|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$.
Si osservi che, in accordo con la solita convenzione, s, m, s_1, m_1, s_2, m_2 indicano gli autovalori $\hbar^2 s(s+1), \hbar m$, $\hbar^2 s_1(s_1+1), \hbar m_1$, $\hbar^2 s_2(s_2+1), \hbar m_2$ di S^2, S_z, S_1^2, S_{1z}, S_2^2, S_{2z}.
All'Hamiltoniana viene aggiunta la perturbazione $H' = \epsilon \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2)$ con $\boldsymbol{B}$ diretto lungo l'asse z.
4) Determinare, al primo ordine in ϵ, la variazione dell'energia dello stato fondamentale indotta da H' nell'ipotesi che la costante b sia negativa.

[punteggio 8]

6 Un oscillatore armonico unidimensionale di pulsazione ω è in contatto con un reservoir a temperatura T. Considerando l'oscillatore all'equilibrio termico con distribuzione canonica, calcolare:
1) la sua energia media $\langle E \rangle$;
2) il valore ΔE dell'associato scarto quadratico medio (deviazione standard);
3) il comportamento limite di $\langle E \rangle$ e ΔE per $k_B T \ll \hbar\omega$ e $k_B T \gg \hbar\omega$.

[punteggio 6]

Esercizio 1

Dall'ipotesi

$$[\xi, [\xi, \eta]] = 0$$

abbiamo

$$\xi(\xi\eta - \eta\xi) = (\xi\eta - \eta\xi)\xi$$

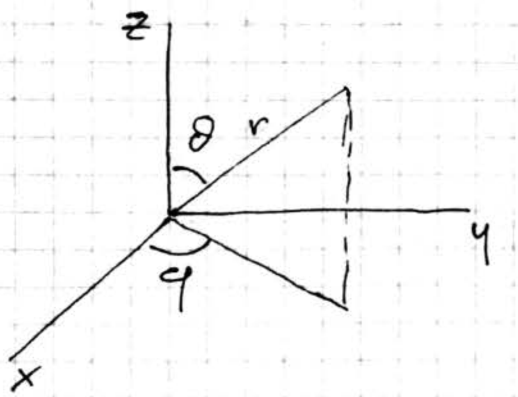
$$\xi^2\eta - \xi\eta\xi = \xi\eta\xi - \eta\xi^2$$

e quindi

$$\xi^2\eta + \eta\xi^2 = 2\,\xi\eta\xi$$

Scambiando ξ con η otteniamo $\eta^2\xi + \xi\eta^2 = 2\,\xi\eta\xi$

Esercizio ②



$$x = r \sin\vartheta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\vartheta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\vartheta$$

Risulta

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= r^2 \sin^2\vartheta \cos^2\varphi - r^2 \sin^2\vartheta \sin^2\varphi \\ &= r^2 \sin^2\vartheta \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ &= r^2 \sin^2\vartheta \cos(2\varphi) \\ &= r^2\left(\sin^2\vartheta\, e^{i2\varphi} + \sin^2\vartheta\, e^{-i2\varphi}\right)\frac{1}{2} \\ &= \frac{r^2}{2}\left(\sqrt{\frac{32\pi}{15}}\, Y_{22}(\vartheta,\varphi) + \sqrt{\frac{32\pi}{15}}\, Y_{2-2}(\vartheta,\varphi)\right) \end{aligned}$$

dove $Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$ sono le armoniche sferiche autofunzioni contemporanee di L^2 e L_z

$$L^2\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar^2 \ell(\ell+1)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

$$L_z\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \hbar m\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

In definitiva

$$\psi(\underline{r}) = \frac{r^2}{2} f(r) \sqrt{\frac{32\pi}{15}} \left(Y_{22}(\theta,\varphi) + Y_{2-2}(\theta,\varphi)\right)$$

In una misura di L_z possiamo trovare solo i valori $\pm 2\hbar$ e con uguali probabilità, $\frac{1}{2}$.

Misurando L^2 si può trovare solo il risultato $\hbar^2\, 2(2+1) = 6\hbar^2$

Esercizio 3

Sia $N_\uparrow$ il numero di particelle con spin $\frac{1}{2}$ e $N_\downarrow$ il numero di quelle con spin $-\frac{1}{2}$. Risulta

$$N_\uparrow + N_\downarrow = N$$
$$M_z = (N_\uparrow - N_\downarrow)/2$$

e quindi $N_\uparrow = \frac{N}{2} + M_z \qquad N_\downarrow = \frac{N}{2} - M_z$

Il macrostato "M_z" è quindi il macrostato "$N_\uparrow, N_\downarrow$"

$$\mathcal{N}(M_z) = \mathcal{N}(N_\uparrow, N_\downarrow) = \frac{N!}{N_\uparrow!\, N_\downarrow!} = \frac{N!}{\left(\frac{N}{2}+M_z\right)!\left(\frac{N}{2}-M_z\right)!}$$

Per $N \gg 1$ possiamo applicare la formula di Stirling

$$N! \simeq \sqrt{2\pi}\, N^{N+\frac{1}{2}} e^{-N} \quad \text{cioè} \quad \ln N! \simeq N \ln N - N$$

$$\begin{aligned}
\ln \mathcal{N}(M_z) &= N \ln N - \cancel{N} \\
&\quad - \left(\frac{N}{2}+M_z\right)\ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) + \cancel{\left(\frac{N}{2}+M_z\right)} \\
&\quad - \left(\frac{N}{2}-M_z\right)\ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right) + \cancel{\left(\frac{N}{2}-M_z\right)} \\
&= N \ln N - \left(\frac{N}{2}+M_z\right)\ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) \\
&\quad - \left(\frac{N}{2}-M_z\right)\ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right)
\end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{N}(M_z) \geq 1$ il massimo di $\mathcal{N}(M_z)$ coincide con il massimo di $\ln \mathcal{N}(M_z)$ e quindi il max si ha per

$$\frac{\partial}{\partial M_z} \ln(M_z) = -\ln\left(\frac{N}{2}+M_z\right) + \ln\left(\frac{N}{2}-M_z\right) = \ln\left(\frac{\frac{N}{2}-M_z}{\frac{N}{2}+M_z}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{N}{2} - M_z = \frac{N}{2} + M_z \quad \Rightarrow \quad M_z = 0$$

Esercizio 4

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)} \; x \; \psi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}}\, e^{-\gamma^2 x^2}\, dx = 0$$

$$\langle p \rangle = \langle \psi | p | \psi \rangle$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right) \psi(x)\, dx$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -i\hbar \sqrt{\frac{\gamma^2}{\pi}}\, e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}} \left(-2x \frac{\gamma^2}{2} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}\right) dx$$
$$= 0$$

La funzione d'onda $\psi(x)$ soddisfa l'equazione

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

da cui risulta

$$E - V(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) \big/ \psi(x)$$
$$= -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}\left(-2x\frac{\gamma^2}{2} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}\right)\right)\frac{1}{\psi(x)}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}\gamma^2\left(\frac{d}{dx}\left(x e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}\right)\right)\frac{1}{\psi(x)}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4}\gamma^2\left(1 - x^2\gamma^2\right) e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}} \frac{1}{\left(\frac{\gamma^2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\frac{\gamma^2 x^2}{2}}}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2m}\gamma^2 - \frac{\hbar^2}{2m}\gamma^4 x^2$$

Poichè $E = \frac{\hbar^2 \gamma^2}{2m}$ segue

$$V(x) = \frac{m}{2} \frac{\hbar^2 \gamma^4}{m^2} x^2$$

Si tratta di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega = \frac{\hbar \gamma^2}{m}$

Esercizio (5)

Osservando che

$$S^2 = \underline{S}\cdot\underline{S} = (\underline{S}_1+\underline{S}_2)\cdot(\underline{S}_1+\underline{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\,\underline{S}_1\cdot\underline{S}_2$$

in quanto $[\underline{S}_1, \underline{S}_2] = 0$, si ha

$$2\,\underline{S}_1\cdot\underline{S}_2 = S^2 - S_1^2 - S_2^2 = S^2 - \frac{3}{4}\hbar^2 - \frac{3}{4}\hbar^2$$

e quindi

$$H = a + \frac{4b}{\hbar^2}\left(\frac{1}{2}S^2 - \frac{3}{4}\hbar^2\right) = a - 3b + \frac{2b}{\hbar^2}S^2$$

Evidentemente le osservabili H, S^2, S_z commutano mutuamente e perciò possono essere misurate contemporaneamente. In altre parole esiste una base di autovettori comuni di H, S^2, S_z. Tale base è quella dei vettori $|s, m, s_1, s_2\rangle$ che indicheremo brevemente con $|s\, m\rangle$ in quanto $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$ è fissato. In questa base H è diagonale, la matrice che la rappresenta ha elementi

$$\langle s, m | H | s' m'\rangle = \left(a - 3b + \frac{2b}{\hbar^2}\hbar^2 s(s+1)\right)\delta_{ss'}\delta_{mm'}$$

I valori possibili di s sono gli interi compresi in $|s_1 - s_2| = 0 \leq s \leq |s_1 + s_2| = 1$ cioè $s=0$ e $s=1$

Per $s=0$ si può avere solo $m=0$ mentre per $s=1$ abbiamo $m=-1, 0, 1$

Esplicitamente la matrice è

$$\begin{array}{c|cccc} & |0,0\rangle & |1,-1\rangle & |1,0\rangle & |1,1\rangle \\ \hline |0,0\rangle & a-3b & 0 & 0 & 0 \\ |1,-1\rangle & 0 & a+b & 0 & 0 \\ |1,0\rangle & 0 & 0 & a+b & 0 \\ |1,1\rangle & 0 & 0 & 0 & a+b \end{array}$$

gli autovalori sono $a-3b$ e $a+b$ con degenerazione 3

Anche il sistema di vettori $|s_1, m_1, s_2, m_2\rangle$ che per brevità indicheremo $|m_1, m_2\rangle$ con $m_1 = \pm\frac{1}{2}$ $m_2 = \pm\frac{1}{2}$ costituisce una base nello spazio di Hilbert considerato. La relazione tra le due basi $|s, m\rangle$ e $|m_1, m_2\rangle$ è

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle - |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\right) \quad \text{singoletto}$$

$$\left.\begin{aligned} |1,-1\rangle &= |-\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2}\rangle \\ |1,0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\tfrac{1}{2} -\tfrac{1}{2}\rangle + |-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle\right) \\ |1,1\rangle &= |\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle \end{aligned}\right\} \text{tripletto}$$

Invertendo queste relazioni troviamo

$$|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = |1,1\rangle$$

$$|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0,0\rangle + |1,0\rangle\right)$$

$$|-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1,0\rangle - |0,0\rangle\right)$$

$$|-\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\rangle = |1,-1\rangle$$

Da queste e dalla precedente rappresentazione di H nella base $|s, m\rangle$ troviamo la rappresentazione di H nella base $|m_1, m_2\rangle$

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & |\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle & |\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle & |-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle & |-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle \\
\hline
|\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle & a+b & 0 & 0 & 0 \\
|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle & 0 & a-b & 2b & 0 \\
|-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}\rangle & 0 & 2b & a-b & 0 \\
|-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle & 0 & 0 & 0 & a+b
\end{array}
$$

Gli autovalori sono $a+b$ con molteplicità 2 e gli autovalori del minore

$$
\begin{pmatrix} a-b & 2b \\ 2b & a-b \end{pmatrix}
\qquad
(a-b-\lambda)^2 - 4b^2 = 0
$$

$$
a-b-\lambda = \pm 2b
$$

$$
\lambda = a-3b \qquad \lambda = a+b
$$

Riotteniamo quindi, come deve, gli autovalori $a+b$ con molteplicità 3 e $a-3b$

Se $b<0$ l'energia dello stato fondamentale di H è $E_0 = a + b$ che ha degenerazione 3, gli autovettori corrispondenti possono essere scelti come

$$|E_{0,1}\rangle = |1,-1\rangle \qquad |E_{0,2}\rangle = |1,0\rangle \qquad |E_{0,3}\rangle = |1,1\rangle$$

Si osservi che $H' = \varepsilon \underline{B} \cdot (\underline{S}_1 + \underline{S}_2) = \varepsilon B (S_{1z} + S_{2z}) = \varepsilon B S_z$ è diagonale nella base $|s\, m\rangle$ quindi gli autovalori di $H + H'$ possono essere calcolati esattamente.
Per lo stato fondamentale abbiamo lo splitting ~~sin~~

$$E_{0,1} = a + b - \varepsilon B \hbar$$
$$E_{0,2} = a + b$$
$$E_{0,3} = a + b + \varepsilon B \hbar$$

che, come deve, coincidono con i valori trovati al primo ordine nella teoria delle perturbazioni caso degenere.

Il livello $a - 3b$ di H non cambia per l'aggiunta di H' in quanto autovalore con autofunzione $|0,0\rangle$

Esercizio 6

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2$$

<u>oscillatore classico</u>

$$Z_1 = \frac{1}{h} \int dq \int dp \, e^{-\beta H(q,p)}$$

$$= \frac{1}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} dp \, e^{-\frac{\beta p^2}{2m}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta m\omega^2 q^2}$$

$$= \frac{1}{h} \sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \sqrt{\frac{\pi \cdot 2}{\beta m \omega^2}}$$

$$= \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\beta\omega}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta} Z_1 \frac{1}{Z_1}$$

$$= \frac{1}{\beta\omega} \omega = \frac{1}{\beta} = K_B T$$

Stesso risultato da teorema di equipartizione

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{h} \int dq \int dp \, e^{-\beta H(q,p)} H(q,p)^2 \frac{1}{\frac{1}{h}\int dq \int dp \, e^{-\beta H(q,p)}}$$

$$= \frac{1}{Z_1} \frac{\partial^2}{\partial\beta^2} Z_1$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta} Z_1 = \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega} \left(-\beta^{-2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} Z_1 = \frac{1}{h} \frac{2\pi}{\omega} \left(+2\beta^{-3}\right)$$

$$\langle E^2 \rangle = \cancel{h} \frac{\beta\cancel{\omega}}{\cancel{2\pi}} \frac{1}{\cancel{h}} \frac{\cancel{2\pi}}{\cancel{\omega}} \frac{2}{\beta^3} = \frac{2}{\beta^2} = 2\left(K_B T\right)^2$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}$$

$$= \sqrt{2(k_B T)^2 - (k_B T)^2} = k_B T$$

avendo considerato l'oscillatore come classico ci troviamo sempre ($\forall T$) nel caso $k_B T \gg \hbar\omega$ ($\hbar = 0$)

Non è possibile rispondere alla domanda cosa succede se $k_B T \ll \hbar\omega$, pertanto occorre considerare un oscillatore quantistico.

Esercizio 6

La funzione di partizione è

$$Z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{E_n}{k_B T}} = \frac{1}{h}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}\right)^n$$

$$= e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}}$$

$$= \frac{1}{e^{\frac{\hbar\omega}{2k_B T}} - e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}} = \frac{2}{\sinh\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right)}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\frac{2}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\beta}\log\left(\sinh(\beta\hbar\omega/2)\right) = \frac{\cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)}\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\frac{1}{\tanh(\beta\hbar\omega/2)}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{Z_1}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2} Z_1$$

$$= \frac{1}{Z_1}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{-2\cosh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega/2)}\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= -\frac{\hbar\omega}{Z_1}\frac{\sinh^3(\beta\hbar\omega/2) - 2\cosh(\beta\hbar\omega/2)\sinh(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^4(\beta\hbar\omega/2)}\frac{\hbar\omega}{2}$$

$$= \left(\frac{\hbar\omega}{2}\right)^2\left(2\frac{\cosh^2(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega/2)} - 1\right)$$

$$\Delta E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{2\frac{\cosh^2(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega/2)} - 1 - \frac{\cosh^2(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega/2)}}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\sqrt{\frac{\cosh^2(\beta\hbar\omega/2) - \sinh^2(\beta\hbar\omega/2)}{\sinh^2(\beta\hbar\omega/2)}}$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{\sinh(\beta\hbar\omega/2)}$$

Per $k_B T \ll \hbar\omega$ cioè $\beta\hbar\omega \gg 1$ abbiamo

$$\langle E\rangle \simeq \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{\frac{e^{\beta\hbar\omega/2}}{2}} = \hbar\omega\, e^{-\frac{\hbar\omega}{2k_B T}}$$

Per $k_B T \gg \hbar\omega$ cioè $\beta\hbar\omega \ll 1$ abbiamo

$$\langle E\rangle \simeq \frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{\beta\hbar\omega/2} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$

$$\Delta E \simeq \frac{\hbar\omega}{2}\,\frac{1}{\beta\hbar\omega/2} = \frac{1}{\beta} = k_B T$$