MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2019/2020 – Prof. C. Presilla

Prova A3 – 26 giugno 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Sia ξ un'osservabile di un sistema fisico il quale si trova nello stato descritto dal vettore normalizzato $|A\rangle$. Enunciare il postulato di von Neumann specificando i possibili risultati di una misura di ξ, le probabilità di ottenere tali risultati e lo stato in cui si viene a trovare il sistema subito dopo la misura. Si assuma ξ degenere.

[punteggio 4]]

2 Dimostrare che se ξ e η sono due costanti del moto di un sistema la cui Hamiltoniana è H, allora anche $[\xi, \eta]$ è una costante del moto.

[punteggio 4]

3 A partire dall'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, ricavare l'equazione di evoluzione temporale dell'operatore matrice densità (equazione di von Neumann) che descrive il più generale stato miscela.

[punteggio 4]

4 Una particella di massa m è vincolata a muoversi all'interno di una sfera di raggio R. La particella non è sogggetta ad altre forze oltre a quelle del vincolo.
1) Si determini la funzione d'onda e l'energia dello stato fondamentale in cui può trovarsi la particella.
Si considerino ora due particelle identiche, non interagenti, di massa m vincolate all'interno della stessa sfera di raggio R. Determinare la funzione d'onda complessiva (spaziale e di spin) delle due particelle quando queste si trovano nello stato di energia minima e sono
2) due bosoni di spin 0,
3) due fermioni di spin 1/2.

[punteggio 7]

5 Una particella di massa m si muove nel piano x, y soggetta a un potenziale armonico di pulsazione ω. La sua Hamiltoniana è

$$H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

1) Determinare autovalori e autostati di H_0, esprimendo gli autostati in termini degli usuali autostati di oscillatore armonico unidimensionale.
Il potenziale armonico viene distorto dall'Hamiltoniana

$$H' = 2\lambda xy,$$

con λ parametro piccolo. Determinare la correzione al livello fondamentale di H_0 dovuta alla perturbazione H'
2) al primo ordine in λ,
3) al secondo ordine in λ.
4) Determinare infine la correzione perturbativa al primo ordine in λ del primo livello eccitato di H_0.
Si rammenta che per un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e pulsazione ω risulta $\langle 1|x|0\rangle = \sqrt{\hbar/(2m\omega)}$.

[punteggio 7]

6 Un sistema di N particelle identiche di massa m, non interagenti mutuamente, è descritto dall'Hamiltoniana di singola particella

$$H(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}) = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + \alpha\,|\boldsymbol{q}|^6\,, \qquad \alpha > 0, \qquad \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^3,$$

dove α è una costante positiva e $\boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}$ sono vettori tridimensionali. Considerando le particelle come classiche e all'equilibrio termico a temperatura T, calcolare:
1) l'energia media E del sistema;
2) la distanza più probabile q_0 a cui una particella può essere trovata dall'origine.
Nel caso in cui le N particelle siano fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, l'energia di Fermi del sistema è data da $\epsilon_F = \text{costante} \times N^\gamma$.
3) Determinare l'esponente γ.

[punteggio 7]

Sia ξ un'osservabile con autovalori ξ_i $i=1,2,3,\dots$ e degenerazione d_i

$$\xi \, |\xi_i^{(\alpha_i)}\rangle = \xi_i \, |\xi_i^{(\alpha_i)}\rangle \qquad i = 1,2,3,\dots \qquad \alpha_i = 1,\dots,d_i$$

I possibili risultati di una misura di ξ sono gli autovalori ξ_i

Detto Π_j il proiettore ortogonale nel sottospazio dell'autovalore ξ_j

$$\Pi_j \equiv \sum_{\alpha_j=1}^{d_j} |\xi_j^{(\alpha_j)}\rangle\langle\xi_j^{(\alpha_j)}|$$

la probabilità di misurare ξ_j è

$$p_j = \frac{|\langle A|\Pi_j|A\rangle|^2}{\||A\rangle\|^2 \ \|\Pi_j|A\rangle\|^2} \qquad \left(\sum_i p_i = 1\right)$$

e dopo la misura con risultato ξ_j lo stato del sistema è

$$|A\rangle \longrightarrow \frac{\Pi_j|A\rangle}{\|\Pi_j|A\rangle\|^2}$$

Un' osservabile è una costante del moto se e solo se l'operatore che la rappresenta commuta con H(*).

Pertanto abbiamo $[\xi, H] = [\eta, H] = 0$

D'altro canto si ha

$$[[\xi, \eta], H] = [\xi\eta, H] - [\eta\xi, H]$$

$$= \xi[\eta, H] + [\xi, H]\eta - \eta[\xi, H] - [\eta, H]\xi$$

$$= 0$$

cioè $[\xi, \eta]$ è una costante del moto.

(*) $U(t)^{+}\, \xi\, U(t) = \xi$

$$e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, \xi\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} = \xi$$ derivando rispetto a t

$$\frac{i}{\hbar} H e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, \xi\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} - \frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}Ht}\, \xi\, e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} H = 0$$

$$H\xi - \xi H = 0$$

L' operatore matrice densità che descrive ~~uno~~ stato miscela si scrive

$$\rho(t) = \sum_i p_i \, |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| \qquad \sum_i p_i = 1$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi_i(t)\rangle = H \, |\psi_i(t)\rangle$$

$$-i\hbar \frac{d}{dt} \langle \psi_i(t)| = \langle \psi_i(t)| H$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho(t) = \sum_i p_i \overbrace{\left[\left(\frac{d}{dt} |\psi_i(t)\rangle \right) \langle \psi_i(t)| + |\psi_i(t)\rangle \left(\frac{d}{dt} \langle \psi_i(t)| \right) \right]}^{i\hbar}$$

$$= \sum_i p_i \left[H |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| - |\psi_i(t)\rangle \langle \psi_i(t)| H \right]$$

$$= H \rho(t) - \rho(t) H$$

$$= [H, \rho(t)]$$

Per un problema a simmetria radiale come il nostro conviene scrivere l'eq. di Schrödinger stazionaria in coordinate polari.

Le autofunzioni si scrivono

$$\psi_{E\ell m}(r,\theta,\varphi) = R_{E\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi) = \frac{1}{r}\, u_{E\ell}(r)\, Y_{\ell m}(\theta,\varphi)$$

dove $Y_{\ell m}$ è l'armonico sferico di indici ℓ, m e $u_{E\ell}(r)$ è la funzione d'onda radiale ridotta che soddisfa l'eq. di Schrödinger unidimensionale

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\, u''_{E\ell}(r) + \left[\hbar^2 \frac{\ell(\ell+1)}{2mr^2} + V(r)\right] u_{E\ell}(r) = E\, u_{E\ell}(r)$$

Nel nostro caso $V(r) = 0$ e per trovare lo stato di energia minima dobbiamo considerare $\ell = 0$. Infine il vincolo impone che $u_{E\ell}(R) = 0$ $\quad u_{E\ell}(0) = 0$

L'equazione da risolvere è perciò

$$u''(r) = -k^2\, u(r) \qquad \text{con } k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} > 0$$

e condizioni al bordo $u(0) = u(R) = 0$

Deve essere $u(r) = A \sin(kr)$

Imponendo $u(R) = A \sin(kR) = 0$ troviamo $k = k_n$

$$k_n = \frac{n\pi}{R} \qquad n = 1, 2, 3, \dots$$

le energie corrispondenti sono $E_n = \dfrac{\hbar^2}{2m}\, \dfrac{n^2\pi^2}{R^2}$

L'energia minima è $E_1 = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mR^2}$

La corrispondente autofunzione è $u(r) = A \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$
con A costante di normalizzazione

$$\psi_{100}(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r} A \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right) \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$1 = \int |\psi_{100}|^2 d\underline{r} = \int_0^R \frac{|A|^2}{r^2} \sin^2\left(\frac{\pi r}{R}\right) \frac{1}{4\pi} 4\pi r^2 dr$$

$$= |A|^2 \int_0^R \sin^2\left(\frac{\pi r}{R}\right) dr = |A|^2 \int_0^\pi \sin^2(u)\, du\, \frac{R}{\pi}$$

$$= |A|^2 \frac{\pi}{2} \frac{R}{\pi} = \frac{R}{2} |A|^2$$

scegliamo $A = \sqrt{\frac{2}{R}}$

In conclusione $\psi_{100}(\underline{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi R}} \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi r}{R}\right)$

con energia $E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2 m R^2}$

Se abbiamo 2 bosoni di spin 0 la funzione d'onda totale corrispondente all'energia minima è la funzione simmetrica

$$\psi(\underline{r}_1, \underline{r}_2) = \psi_{100}(\underline{r}_1)\, \psi_{100}(\underline{r}_2)$$

Nel caso di due fermioni di spin 1/2, l'energia minima viene ottenuta per funzioni d'onda spaziali uguali per entrambe le particelle a ψ_{100} e quindi funzione d'onda di spin antisimmetrica (stato di singoletto)

$$\psi(\underline{r}_1, \chi_1; \underline{r}_2 \chi_2) = \psi_{100}(\underline{r}_1)\, \psi_{100}(\underline{r}_2) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\chi_1^+ \chi_2^- - \chi_1^- \chi_2^+ \right)$$

Si ha $H_0 = H_0^{(x)} + H_0^{(y)}$ dove

$$H_0^{(x)} = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \qquad H_0^{(y)} = \frac{1}{2m} p_y^2 + \frac{m\omega^2}{2} y^2$$

Questi due oscillatori armonici unidimensionali hanno autovalori $E^{(x)}_{n_x} = \hbar\omega\left(n_x + \frac{1}{2}\right)$ $E^{(y)}_{n_y} = \hbar\omega\left(n_y + \frac{1}{2}\right)$ con $n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$ e autostati corrispondenti $|n_x\rangle$, $|n_y\rangle$

Gli autovalori di H_0 sono pertanto $\left([H_0^{(x)}, H_0^{(y)}] = 0\right)$

$$E^{(0)}_{n_x n_y} = \hbar\omega\left(n_x + n_y + 1\right) \qquad n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$$

con autostati $|n_x\, n_y\rangle = |n_x\rangle |n_y\rangle$

Lo stato fondamentale $|0\,0\rangle$ ha energia $E_0^{(0)} = \hbar\omega$

Il primo livello eccitato ad energia $E_1^{(0)} = 2\hbar\omega$ è doppiamente degenere, ad esso corrispondono gli stati $|1, 0\rangle$ e $|0\,1\rangle$. Si osservi che i livelli dipendono dalla somma $n = n_x + n_y$ e non separatamente da n_x e n_y.

Al primo ordine perturbativo il livello $E_0^{(0)}$ viene modificato dalla quantità

$$\Delta_0^{(1)} = \langle 0\,0 | H' | 0\,0\rangle = \langle 0|\langle 0| 2\lambda xy |0\rangle|0\rangle$$

$$= 2\lambda \langle 0|x|0\rangle \langle 0|y|0\rangle = 0$$

Al secondo ordine perturbativo lo spostamento è

$$\Delta_0^{(2)} = -\sum_{k_x \neq 0} \sum_{k_y \neq 0} \frac{|\langle k_x\, k_y | H' | 0\,0\rangle|^2}{E^{(0)}_{k_x k_y} - E^{(0)}_{00}}$$

$$= -\frac{|\langle 1|x|0\rangle|^2 |\langle 1|y|0\rangle|^2\, 4\lambda^2}{\hbar\omega(1+1+1) - \hbar\omega(0+0+1)}$$

$$= -\frac{4\lambda^2}{2\hbar\omega}\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 = -\frac{\lambda^2\hbar}{\cancel{2}m^2\omega^3}$$

in quanto per un oscillatore armonico unidimensionale

$$\langle k|x|n\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\sqrt{n+1}\,\langle k|n+1\rangle + \sqrt{n}\,\langle k|n-1\rangle\right)$$

Il primo livello eccitato di energia $E_1^{(0)} = 2\hbar\omega$ è due volte degenere pertanto la corrispondente perturbazione al primo ordine in λ è data dagli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \langle 10|H'|10\rangle & \langle 10|H'|01\rangle \\ \langle 01|H'|10\rangle & \langle 01|H'|01\rangle \end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda \begin{pmatrix} \langle 1|x|1\rangle\langle 0|y|0\rangle & \langle 1|x|0\rangle\langle 0|y|1\rangle \\ \langle 0|x|1\rangle\langle 1|y|0\rangle & \langle 0|x|0\rangle\langle 1|y|1\rangle \end{pmatrix}$$

$$= 2\lambda \begin{pmatrix} 0 & \hbar/(2m\omega) \\ \hbar/(2m\omega) & 0 \end{pmatrix} = \frac{\lambda\hbar}{m\omega}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tali autovalori sono $\pm\frac{\lambda\hbar}{m\omega}$

$$E = -N \frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_1$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\; e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}\right)-\beta\alpha q^6}$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}\right)^3 \int_0^\infty 4\pi q^2 dq\; e^{-\beta\alpha q^6} \qquad \sqrt{\alpha\beta}\,q^3 = u$$

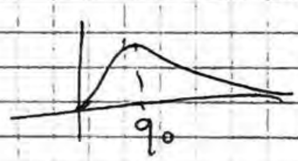
$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} 4\pi \int_0^\infty \frac{du}{3\sqrt{\alpha\beta}}\, e^{-u^2}$$

$$= \frac{1}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \frac{4\pi}{3\sqrt{\alpha\beta}}\,\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3}\,\frac{\pi^3 m^{3/2}}{h^3\alpha^{1/2}}\,\beta^{-4/2} = \text{cost}\;\beta^{-2}$$

$$E = -N\,\frac{-2\beta^{-1}}{\beta^{-2}} = N\,2\,k_BT$$

$$P(q) = \text{cost}\; q^2 e^{-\beta\alpha q^6}$$



$$P'(q_0) = 0$$

$$2q_0\, e^{-\beta\alpha q_0^6} + q_0^2\, e^{-\beta\alpha q_0^6}\left(-6\beta\alpha q_0^5\right) = 0$$

$$e^{-\beta\alpha q_0^6}\left[2q_0 - 6\beta\alpha q_0^7\right] = 0$$

$$q_0 = 0 \qquad q_0^6 = \frac{1}{3\beta\alpha} \qquad q_0 = \left(\frac{k_BT}{3\alpha}\right)^{1/6}$$

$$\mathcal{N}(E) = \frac{2}{h^3}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\;\vartheta\big(E - H(q,p)\big)$$

$$= \frac{2}{h^3}\int_0^{\left(\frac{E}{\alpha}\right)^{1/6}} 4\pi q^2 dq \int_0^{\sqrt{(E-\alpha q^6)2m}} 4\pi p^2 dp$$

$$= \frac{2}{h^3}\int_0^{(E/\alpha)^{1/6}} 4\pi q^2 dq\; \frac{4}{3}\pi \left(E - \alpha q^6\right)^{3/2} (2m)^{3/2}$$

$\sqrt{\frac{\alpha}{E}}\, q^3 = u$

$$= \frac{2}{h^3}\int_0^1 4\pi\, \frac{4\pi}{3}\, \sqrt{\frac{E}{\alpha}}\, \frac{du}{3}\, E^{3/2}\left(1-u^2\right)^{3/2}(2m)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{h^3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{E^2 (2m)^{3/2}}{\sqrt{\alpha}} \int_0^1 \left(1-u^2\right)^{3/2} du$$

$$= \frac{2}{h^3}\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2 \frac{E^2 (2m)^{3/2}}{\sqrt{\alpha}}\, \frac{3\pi}{16}$$

$$\mathcal{N}(\epsilon_F) = N \implies \frac{2\pi^3}{3h^3}\frac{(2m)^{3/2}}{\sqrt{\alpha}}\,\epsilon_F^2 = N$$

$$\epsilon_F = \sqrt{N}\ \text{costante}$$
$$= N^\gamma\ \text{costante}$$

$\gamma = \frac{1}{2}$

$$\text{costante} = \sqrt{\frac{3}{4\sqrt{2}\,\pi^3}\,\frac{h^3\alpha^{1/2}}{m^{3/2}}} = \sqrt{3\sqrt{2}\,\frac{\hbar^3\alpha^{1/2}}{m^{3/2}}}$$