MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2019/2020 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 28 gennaio 2020

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Sia $H(\lambda)$ una Hamiltoniana dipendente da un parametro λ. Anche autovalori e autovettori di $H(\lambda)$ saranno funzioni di λ, $H(\lambda)\ |E(\lambda)\rangle = E(\lambda)\ |E(\lambda)\rangle$. Supponendo che $\langle E(\lambda)|E(\lambda)\rangle = 1$, dimostrare la relazione nota come teorema di Hellmann-Feynman

$$\frac{\partial E(\lambda)}{\partial \lambda} = \langle E(\lambda)|\frac{\partial H(\lambda)}{\partial \lambda}|E(\lambda)\rangle.$$

[punteggio 4]]

---

2 Sia $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_1 + \boldsymbol{J}_2$ con $\boldsymbol{J}_1$ e $\boldsymbol{J}_2$ operatori di momento angolare. Dimostrare che per i coefficienti di Clebsch-Gordan risulta

$$C^{j,m}_{j_1,m_1,j_2,m_2} \equiv \langle j_1, m_1, j_2, m_2 | j_1, j_2, j, m\rangle = 0, \qquad \text{se } m \neq m_1 + m_2,$$

dove j_1, m_1, j_2, m_2 e j, m sono, rispettivamente, i numeri quantici di J_1^2, J_{1z}, J_2^2, J_{2z} e J^2, J_z.

[punteggio 4]

---

3 Un sistema, a contatto con una riserva termica a temperatura T, può trovarsi in uno di tre livelli energetici di valore $-E_0$, 0 e E_0 le cui degenerazioni sono rispettivamente 1, 2 e 4. Senza eseguire calcoli, dire, motivando la risposta, quanto vale l'entropia del sistema nel limite $T \to \infty$.

[punteggio 4]

---

4 Una particella di massa m è vincolata all'interno di un quadrato di lato L

$$0 \leq x \leq L, \qquad 0 \leq y \leq L.$$

Sia H_0 la corrispondente Hamiltoniana. Determinare autovalori e autofunzioni di H_0.
Viene introdotta una perturbazione $H' = Cxy$. Determinare la prima correzione non nulla all'autovalore minimo e al primo livello eccitato di H_0.
Possono essere utili i seguenti integrali

$$\int_0^\pi u \sin^2(u) \mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \int_0^\pi u \sin^2(2u) \mathrm{d}u = \frac{\pi^2}{4}, \qquad \int_0^\pi u \sin(u) \sin(2u) \mathrm{d}u = -\frac{8}{9}.$$

[punteggio 7]

5 Due particelle di massa m vincolate a muoversi lungo una retta sono soggette a una una forza esterna elastica di costante elastica $k > 0$ e interagiscono mutuamente mediante una seconda forza elastica attrattiva con costante elastica $0 < k_{int} \ll k$. L'Hamiltoniana del sistema è dunque

$$H = \frac{1}{2m} p_1^2 + \frac{1}{2} k q_1^2 + \frac{1}{2m} p_2^2 + \frac{1}{2} k q_2^2 + \frac{1}{2} k_{int} (q_1 - q_2)^2 .$$

1) Calcolare i tre autovalori più piccoli, $E_0 < E_1 < E_2$, di H e i corrispondenti autostati $|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle$;
2) Dire quale di questi tre stati è fisicamente accettabile se le particelle sono indistinguibili e hanno spin 0;
3) Determinare quale valore dello spin totale può essere misurato quando il sistema si trova negli stati $|E_0\rangle, |E_1\rangle, |E_2\rangle$ se le particelle sono indistinguibili e hanno spin 1/2.
Suggerimento: usare le coordinate del centro di massa.

[punteggio 7]

6 Un gas ideale composto da N particelle identiche di massa m è vincolato nella regione piana $x \in (-\infty, \infty)$, $y \in [0, L]$, con $L > 0$. All'interno di questa regione l'Hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(x), \qquad V(x) = \alpha x^4.$$

con α costante positiva. Supponendo che il gas sia all'equilibrio termico a temperatura T, calcolare:
1) l'energia media E;
2) il valore medio di x^4.
Supponendo che le particelle siano fermioni di spin 1/2, calcolare:
3) l'energia di Fermi ϵ_F;
4) l'energia media E a temperatura $T = 0$.

[punteggio 7]

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} E(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \langle E(\lambda) | H(\lambda) | E(\lambda) \rangle$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle E(\lambda)|\right) H(\lambda) | E(\lambda)\rangle + \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle$$

$$+ \langle E(\lambda)| H(\lambda) \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle\right)$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} \langle E(\lambda)|\right) | E(\lambda)\rangle E(\lambda) + \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle$$

$$+ \langle E(\lambda)| \left(\frac{\partial}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle\right) E(\lambda)$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle\right) E(\lambda) + \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle$$

$$= \frac{\partial}{\partial\lambda} (1) E(\lambda) + \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle$$

$$= \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle$$

avendo supposto che $\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle = 1$

Se fosse $\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle \neq 1$ (è una funzione di λ)

allora

$$E(\lambda) = \frac{\langle E(\lambda)| H(\lambda) | E(\lambda)\rangle}{\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle}$$

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} E(\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle\right) \frac{E(\lambda)}{\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle}$$

$$+ \langle E(\lambda)| \frac{\partial H(\lambda)}{\partial\lambda} | E(\lambda)\rangle \frac{1}{\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle}$$

$$+ \langle E(\lambda)| H(\lambda) | E(\lambda)\rangle \frac{-1}{\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle^2} \frac{\partial}{\partial\lambda} \langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle$$

$$= \frac{1}{\langle E(\lambda) | E(\lambda)\rangle} \langle E(\lambda)| \frac{\partial}{\partial\lambda} H(\lambda) | E(\lambda)\rangle$$

Sia $\underline{J} = \underline{J}_1 + \underline{J}_2$ Risulta

$$J_z |j_1 j_2 j m\rangle = \hbar m |j_1 j_2 j m\rangle$$

$$J_{1z} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_1 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

$$J_{2z} |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle = \hbar m_2 |j_1 m_1 j_2 m_2\rangle$$

Poiché $\underline{J} = \underline{J}^+$ abbiamo

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | J_z | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$= \hbar m \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

$$= (\hbar m_1 + \hbar m_2) \langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle$$

cioè

$$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle \left(m - (m_1 + m_2)\right) = 0$$

se $m \neq m_1 + m_2$ deve essere $\langle j_1 m_1 j_2 m_2 | j_1 j_2 j m\rangle = 0$

Nel limite $T \to \infty$ i 7 microstati del sistema (1 livello $-E_0$, 2 livelli 0, 4 livelli E_0) sono popolati con uguale probabilità. Segue immediatamente che l'entropia vale

$$S = -k_B \langle \log \rho \rangle = -k_B \, \mathrm{tr}(\rho \log \rho)$$
$$= -k_B \sum_{i=1}^{7} \frac{1}{7} \log\left(\frac{1}{7}\right) = k_B \log 7$$

A temperatura T la funzione di partizione è $\left(\beta = \frac{1}{k_B T}\right)$

$$Z = e^{\beta E_0} + 2 + 4 e^{-\beta E_0}$$

L'energia media vale

$$E = -\frac{\partial}{\partial \beta} \log Z = -\frac{E_0 e^{\beta E_0} - 4 E_0 e^{-\beta E_0}}{e^{\beta E_0} + 2 + 4 e^{-\beta E_0}}$$

$$= \frac{-e^{\beta E_0} + 4 e^{-\beta E_0}}{e^{\beta E_0} + 2 + 4 e^{-\beta E_0}} \, E_0 \xrightarrow[\beta \to 0]{} E_0 \frac{3}{7}$$

All'equilibrio canonico l'entropia è dato da

$$S = \frac{E}{T} + k_B \log Z \xrightarrow[\beta \to 0]{} 0 + k_B \log(1 + 2 + 4)$$
$$= k_B \log 7$$

Si ha $H_0 = H_{0x} + H_{0y}$ con

$$H_{0x} = \frac{P_x^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} \qquad 0 \le x \le L$$

$$H_{0y} = \frac{P_y^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dy^2} \qquad 0 \le y \le L$$

Poichè $[H_{0x}, H_{0y}] = 0$ gli autovalori di H_0 sono le somme degli autovalori di H_{0x} e H_{0y} e le autofunzioni il prodotto delle rispettive autofunzioni di H_{0x} e H_{0y}

$$H_{0x}\, \varphi(x) = E\, \varphi(x) \qquad E \geq 0$$

$$\varphi''(x) = -\frac{2mE}{\hbar^2}\varphi(x) \qquad k \equiv \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

$$\varphi''(x) = -k^2 \varphi(x)$$

$$\varphi(x) = A \sin(kx) + B\cos(kx)$$

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0 & B = 0 \\ \varphi(L) = 0 & A\sin(kL) = 0 \qquad kL = n\pi \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

$$k = k_n = \frac{n\pi}{L} \qquad E = E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\pi^2}{L^2}n^2$$

$$1 = \int_0^L |\varphi(x)|^2 dx = \int_0^L |A|^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$$

$$u = \frac{n\pi}{L}x$$

$$= |A|^2 \int_0^{n\pi} \sin^2(u)\, du\, \frac{L}{n\pi}$$

$$= |A|^2 \frac{n\pi}{2}\frac{L}{n\pi} \qquad A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

autovalori di H_0 $\quad E_{n_x n_y} = \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(n_x^2 + n_y^2\right)$

autofunzioni $\quad \varphi_{n_x n_y}(x,y) = \dfrac{2}{L}\sin\left(\dfrac{n_x \pi x}{L}\right)\sin\left(\dfrac{n_y \pi y}{L}\right)$

$n_x, n_y = 1, 2, 3 \ldots$

l'autovalore minimo di H_0 è non degenere

$$E_0^{(0)} = E_{11} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$$

mentre il primo livello eccitato è doppiamente degenere

$$E_1^{(0)} = E_{12} = E_{21} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\, 5$$

La correzione di ordine 1 indotta da $H' = c\,xy$ sul livello $E_0^{(0)}$ è

$$\begin{aligned}
\Delta_0^{(1)} &= \langle \varphi_{11} | H' | \varphi_{11} \rangle \\
&= \int_0^L dx \int_0^L dy \; \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) c\,xy\; \frac{2}{L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L}\right) \\
&= \frac{4c}{L^2} \left(\int_0^L dx\; x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)^2 = \frac{4c}{L^2} \left(\int_0^\pi du\; u \sin^2(u) \frac{L^2}{\pi^2} \right)^2 \\
&= \frac{4c}{L^2} \left(\frac{L^2}{\pi^2} \; \frac{\pi^2}{4} \right)^2 \\
&= \frac{cL^2}{4}
\end{aligned}$$

La correzione al livello $E_1^{(0)}$ degenere si ottiene diagonalizzando la matrice

$$\begin{pmatrix} \langle \varphi_{12} | H' | \varphi_{12} \rangle & \langle \varphi_{12} | H' | \varphi_{21} \rangle \\ \langle \varphi_{21} | H' | \varphi_{12} \rangle & \langle \varphi_{21} | H' | \varphi_{21} \rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\langle \varphi_{12} | H' | \varphi_{12} \rangle &= \langle \varphi_{21} | H' | \varphi_{21} \rangle = \\
&= \frac{4c}{L^2} \int_0^L dx\; x \sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) \int_0^L dy\; y \sin^2\left(\frac{\pi y}{L} 2\right) \\
&= \frac{4c}{L^2} \; \frac{L^2}{4} \; \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^\pi du\; u \sin^2(2u) \\
&= \frac{cL^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\langle \varphi_{12} | H' | \varphi_{21} \rangle = \langle \varphi_{21} | H' | \varphi_{12} \rangle$$

$$= \frac{4c}{L^2} \left(\int_0^L dx \; x \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right)^2$$

$$= \frac{4c}{L^2} \left(\int_0^\pi du \;\; u \sin(u) \sin(2u) \frac{L^2}{\pi^2} \right)^2$$

$$= \frac{4c}{L^2} \left(-\frac{8}{9} \frac{L^2}{\pi^2} \right)^2$$

$$= \frac{256}{81} \frac{cL^2}{\pi^4}$$

Dobbiamo dunque trovare gli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{cL^2}{4} & \frac{256}{81} \frac{cL^2}{\pi^4} \\ \frac{256}{81} \frac{cL^2}{\pi^4} & \frac{cL^2}{4} \end{pmatrix} = \frac{cL^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{dove } \alpha \equiv \frac{1024}{81\pi^4} \simeq 0.13$$

Gli autovalori di $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ sono $(1-\lambda)^2 - \alpha^2 = 0$

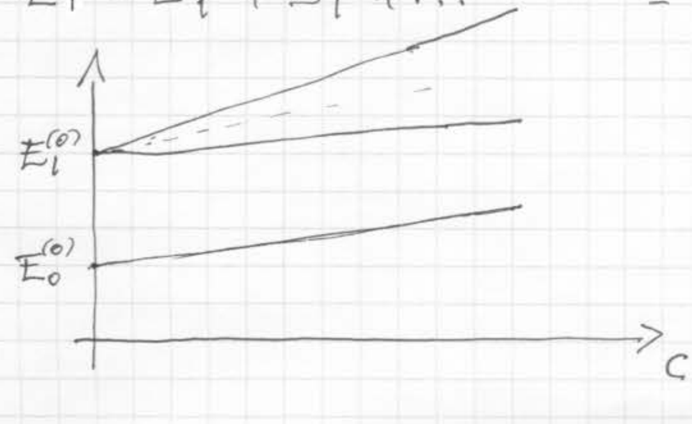
$\lambda = 1 \pm \alpha$ quindi le correzioni a $E_1^{(0)}$ valgono

$$\Delta E_1^{(1)} = \frac{cL^2}{4} (1 \pm \alpha)$$

La perturbazione H' rompe completamente la degenerazione del livello $E_1^{(0)}$

$$E_0 = E_0^{(0)} + \Delta_0^{(1)} + \cdots \qquad = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} + \frac{cL^2}{4} + \cdots$$

$$E_1 = E_1^{(0)} + \Delta_1^{(1)} + \cdots \qquad = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} 5 + \frac{cL^2}{4} (1 \pm \alpha) + \cdots$$



Con il cambio di variabili

$$q = q_1 - q_2 \qquad p = \frac{1}{2}(p_1 - p_2)$$

$$Q = \frac{1}{2}(q_1 + q_2) \qquad P = p_1 + p_2$$

si ha
$$p_1 = p + \frac{1}{2}P \qquad p_2 = -p + \frac{1}{2}P$$
$$q_1 = Q + \frac{1}{2}q \qquad q_2 = Q - \frac{1}{2}q$$

$$H = \frac{1}{2m}\left(p + \frac{1}{2}P\right)^2 + \frac{1}{2m}\left(-p + \frac{1}{2}P\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(Q + \frac{1}{2}q\right)^2$$
$$+ \frac{1}{2}k\left(Q - \frac{1}{2}q\right)^2 + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$
$$= \frac{1}{2m}\left(2p^2 + \frac{1}{2}P^2\right) + \frac{1}{2}k\left(2Q^2 + \frac{1}{2}q^2\right) + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$

introducendo $M \equiv m + m = 2m \qquad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{2}{m}$

$$H = \frac{P^2}{2M} + kQ^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{k}{4}q^2 + \frac{1}{2}k_{int}\, q^2$$
$$= \frac{P^2}{2M} + \frac{1}{2}M\Omega^2 Q^2 + \frac{p^2}{2\mu} + \frac{1}{2}\mu\omega^2 q^2$$

dove $\Omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \omega \equiv \sqrt{\frac{k + 2k_{int}}{m}}$

In conclusione $\quad H = H_{CM} + H_{rel} \quad$ con $[H_{CM}, H_{rel}] = 0$

Gli autovalori di H sono la somma degli autovalori di H_{CM} e H_{rel} che valgono rispettivamente

$$\hbar\Omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) \qquad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Considerando $0 < k_{int} \ll k$ si ha $\quad \Omega < \omega < 2\Omega$ infatti
$$\omega = \Omega\sqrt{1 + \frac{2k_{int}}{k}} \simeq \Omega\left(1 + \frac{k_{int}}{k}\right) \qquad \text{e quindi}$$

$E_0 = \frac{\hbar}{2}(\Omega + \omega)$ $\qquad |E_0\rangle = |0\rangle_{CM} |0\rangle_{rel}$

$E_1 = E_0 + \hbar\Omega$ $\qquad |E_1\rangle = |1\rangle_{CM} |0\rangle_{rel}$

$E_2 = E_0 + \hbar\omega$ $\qquad |E_2\rangle = |0\rangle_{CM} |1\rangle_{rel}$

Se le particelle sono bosoni indistinguibili di spin 0 il vettore di stato deve essere simmetrico sotto lo scambio delle due particelle. Ogni vettore $|n\rangle_{CM}$ è simmetrico sotto lo scambio $1 \leftrightarrow 2$, invece i vettori $|n\rangle_{rel}$ sono simmetrici solo se pari cioè solo se n è pari. Concludiamo che $|E_0\rangle$ e $|E_1\rangle$ sono stati fisicamente accettabili, $|E_2\rangle$ no.

Se le particelle sono fermioni indistinguibili di spin 1/2 i vettori di stato sono il prodotto dei vettori di stato spaziali già trovati e di vettori di spin. e il vettore totale deve essere antisimmetrico rispetto allo scambio delle due particelle. Ricordando che gli stati di tripletto con spin totale $S=1$ sono simmetrici mentre quello di singoletto con spin totale $S=0$ è antisimmetrico, dovremo avere

$|E_0\rangle\, |S=0, S_z=0\rangle \qquad \rightarrow S=0$

$|E_1\rangle\, |S=0, S_z=0\rangle \qquad \rightarrow S=0$

$|E_2\rangle \sum_{S_z=-1,0,1} c_{S_z} |S=1, S_z\rangle \rightarrow S=1$

$$Z_1 = \frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^L dy\int_{-\infty}^{+\infty}dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\alpha x^4\right)}$$

$$= \frac{L}{h^2}\,\frac{2\pi m}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, e^{-\alpha\beta x^4}$$

$$u \equiv \alpha\beta\, x^4$$

$$x = \frac{u^{1/4}}{(\alpha\beta)^{1/4}}$$

$$= \frac{L}{h^2}\,\frac{2\pi m}{\beta}\,\frac{1}{4(\alpha\beta)^{1/4}}\int_{-\infty}^{+\infty}du\, e^{-u}\, u^{-3/4}$$

$$dx = \frac{1}{4(\alpha\beta)^{1/4}}\frac{du}{u^{3/4}}$$

$$= \frac{2\pi m L}{h^2}\,\frac{I}{4\alpha^{1/4}}\,\beta^{-5/4}$$

dove $I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} du\, \frac{e^{-u}}{u^{3/4}}$

$$E = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1 = -N\left(-\frac{5}{4}\,\frac{1}{\beta}\right) = \frac{5}{4}k_B T\, N$$

Allo stesso risultato si giunge con il teorema di equipartizione

$$\left\langle \frac{p_x^2}{2m}\right\rangle = \left\langle \frac{p_y^2}{2m}\right\rangle = \frac{1}{2}k_B T \qquad \langle \alpha x^4\rangle = \frac{1}{4}k_B T$$

$$E = N\left(\frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{2}k_B T + \frac{1}{4}k_B T\right) = N\,\frac{5}{4}k_B T$$

$$\langle x^4\rangle = \frac{\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^L dy\int_{-\infty}^{+\infty}dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\alpha x^4\right)}x^4}{\frac{1}{h^2}\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_0^L dy\int_{-\infty}^{+\infty}dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\alpha x^4\right)}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}Z_1}{Z_1}$$

$$= -\frac{1}{\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\log Z_1$$

$$= -\frac{1}{\beta}\left(-\frac{1}{4}\,\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{k_B T}{\alpha}$$ vedi teorema di equipartizione

$$N(\varepsilon) = \text{numero di stati di singola particella con energia} \leq \varepsilon$$

$$= \frac{2}{h^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^L dy \int_{-\infty}^{+\infty} dp_x \int_{-\infty}^{+\infty} dp_y \; \theta\left(\varepsilon - \left(\frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \alpha x^4\right)\right)$$

$$= \frac{2L}{h^2} \, 2 \int_0^{(\varepsilon/\alpha)^{1/4}} dx \int_0^{\sqrt{2m(\varepsilon - \alpha x^4)}} 2\pi p \, dp$$

$$= \frac{4L}{h^2} \int_0^{(\varepsilon/\alpha)^{1/4}} dx \; \pi \, 2m(\varepsilon - \alpha x^4)$$

$$= \frac{4L}{h^2} \, 2\pi m \left(\varepsilon \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{1/4} - \frac{\alpha}{5} \left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right)^{5/4} \right)$$

$$= \frac{4L}{h^2} \, 2\pi m \; \varepsilon^{5/4} \frac{1}{\alpha^{1/4}} \frac{4}{5}$$

$$= \frac{32}{5} \frac{\pi m L}{h^2 \alpha^{1/4}} \varepsilon^{5/4}$$

$$N(\varepsilon_F) = N \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_F = \left(N \frac{5}{32} \frac{h^2 \alpha^{1/4}}{\pi m L} \right)^{4/5}$$

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{dN(\varepsilon)}{d\varepsilon} \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{32}{4} \frac{\pi m L}{h^2 \alpha^{1/4}} \varepsilon^{1/4} \, \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$= \frac{32}{4} \frac{\pi m L}{h^2 \alpha^{1/4}} \varepsilon_F^{9/4} \frac{4}{9}$$

$$= \frac{32}{9} \frac{\pi m L}{h^2 \alpha^{1/4}} \left(N \frac{5}{32} \frac{h^2 \alpha^{1/4}}{\pi m L} \right)^{9/5}$$

$$= \frac{\cancel{32}}{9} \frac{\cancel{\pi m L}}{\cancel{h^2 \alpha^{1/4}}} N \frac{5}{\cancel{32}} \frac{\cancel{h^2 \alpha^{1/4}}}{\cancel{\pi m L}} \left(N \frac{5}{32} \frac{h^2 \alpha^{1/4}}{\pi m L} \right)^{4/5}$$

$$= \frac{5}{9} \varepsilon_F N$$