MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2018/2019 – Prof. C. Presilla
Prova A3 – 28 giugno 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 In un oscillatore armonico unidimensionale con Hamiltoniana $H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$ l'energia dello stato fondamentale è $E_0 = \hbar\omega/2$. Mostrare che, senza fare calcoli ma solo usando il principio di indeterminazione di Heisenberg, è possibile ottenere $E_0 \geq \hbar\omega/2$.

[punteggio 4]]

2 Scrivere le equazioni di evoluzione temporale nello schema di Heisenberg delle osservabili canoniche q e p in un sistema unidimensionale descritto da Hamiltoniana $H = p^2/2m + V(q)$.

[punteggio 4]

3 Un sistema di fermioni non interagenti è a contatto con un reservoir a temperatura $T = 1/(k_B\beta)$ e potenziale chimico μ ed è caratterizzato da energie di singola particella ε_p, $p = 1, 2, 3, \dots$. Calcolare la funzione di gran partizione Z_G del sistema in termini di β, μ e delle energie ε_p.

[punteggio 4]

4 Una particella di massa m, priva di spin, è vincolata a muoversi tra due superfici sferiche concentriche di raggi a e b con $a < b$. Sulla particella non agisce nessun'altra forza ad eccezione di quella del vincolo. Determinare:
1) l'energia dello stato fondamentale della particella;
2) la corrispondente funzione d'onda normalizzata;
3) la variazione di energia dello stato fondamentale indotta, al primo ordine, dalla perturbazione $V(\theta) = c \cos^2 \theta$, dove c è una costante positiva e θ l'angolo misurato rispetto a un particolare asse passante per il centro delle due sfere.

[punteggio 7]

---

5 Si consideri un sistema composto da due particelle distinguibili di spin 1/2. Calcolare la probabilità che una misura dello spin totale $S^2 = |\boldsymbol{S}_1 + \boldsymbol{S}_2|^2$ dia come risultato il valore $2\hbar^2$ nel caso in cui:
1) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+y$ e quello della particella 2 nella direzione $+z$;
2) lo spin della particella 1 punta nella direzione $+y$ e quello della particella 2 nella direzione $-x$;
3) gli spin di entrambe le particelle puntano nella direzione $-y$;

[punteggio 7]

---

6 Si consideri un sistema di N molecole identiche, non interagenti mutuamente, contenute in un volume V. Ogni molecola è formata da due atomi uguali di massa m. L'Hamiltoniana di singola molecola è

$$H(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2, \boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2) = \frac{1}{2m} \left(|\boldsymbol{p}_1|^2 + |\boldsymbol{p}_2|^2 \right) + \frac{\alpha}{2} \left(|\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| - r_0 \right)^2 ,$$

dove α e r_0 sono due costanti positive. Considerando le molecole come particelle classiche all'equilibrio termico a temperatura T, sotto le ipotesi $r_0^3/V \ll 1$ e $r_0\sqrt{\alpha/k_B T} \gg 1$, calcolare:
1) la funzione di partizione Z_1 di singola molecola;
2) l'energia media E del sistema;
3) l'entropia S del sistema;
4) il valore medio della distanza tra i due atomi di una molecola $\langle |\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2| \rangle$ e la corrispondente varianza.
Suggerimento: si effettui il cambio di variabili $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \to \boldsymbol{q}, \boldsymbol{Q}$, dove $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_2$ e $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_1 + \boldsymbol{q}_2)/2$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 q^2$$

$$H |E_0\rangle = E_0 |E_0\rangle$$

$$E_0 = \langle E_0 | H | E_0 \rangle = \frac{1}{2m} \langle E_0 | p^2 | E_0 \rangle + \frac{1}{2} m\omega^2 \langle E_0 | q^2 | E_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2m} \Delta p^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 \Delta q^2$$

dove si è posto

$$\Delta p^2 = \langle E_0 | p^2 | E_0 \rangle - \langle E_0 | p | E_0 \rangle^2 \qquad \langle E_0 | p | E_0 \rangle = 0$$

$$\Delta q^2 = \langle E_0 | q^2 | E_0 \rangle - \langle E_0 | q | E_0 \rangle^2 \qquad \langle E_0 | q | E_0 \rangle = 0$$

usando la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2ab$

con $a = \frac{\Delta p}{\sqrt{2m}}$ $\qquad b = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\, \Delta q$

e la relazione di indeterminazione $\Delta q \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

otteniamo

$$E_0 \geq 2 \frac{\Delta p}{\sqrt{2m}} \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\, \Delta q \geq \omega \frac{\hbar}{2}$$

Esercizio 2

Nello schema di Heisenberg l'evoluzione temporale di una osservabile ξ è data da

$$\xi(t) = U(t)^\dagger \, \xi \, U(t) \qquad \text{con} \qquad U(t) = e^{-\frac{i}{\hbar} H t}$$

assumiamo H indip. del tempo

$$\dot{\xi}(t) = \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger H \xi U(t) - \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger \xi H U(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar}\left(H\,\xi(t) - \xi(t)\,H\right) = \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger [H, \xi] U(t)$$

Posto $H = \frac{P^2}{2m} + V(q)$ abbiamo

$$\dot{q}(t) = \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) [H, q] U(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U^\dagger(t) \left[\frac{P^2}{2m}, q\right] U(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger \left(-i\hbar \frac{P}{m}\right) U(t) = \frac{P(t)}{m}$$

$$\dot{p}(t) = \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger [H, p] U(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger [V(q), p] U(t)$$

$$= \frac{i}{\hbar} U(t)^\dagger \, i\hbar \frac{\partial V(q)}{\partial q} \, U(t)$$

$$= -V'(q(t)) \qquad \text{dove} \qquad V'(q) \equiv \frac{\partial V(q)}{\partial q}$$

formalmente identiche alle equazioni del moto classiche

Esercizio 3

Detta n_p l'occupazione dello stato di singola particella a energia ε_p, nel caso di fermioni deve essere $n_p = 0, 1$

L'energia di N particelle con occupazioni n_p $p = 1, 2, 3, \ldots$ ammonta a

$$E(\{n_p\}) = \sum_p n_p \varepsilon_p \qquad \text{con il vincolo } \sum_p n_p = N$$

La funzione di gran partizione è quindi

$$Z_G = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{\{n_p\}: \sum n_p = N} e^{-\beta\left(E(\{n_p\}) - \mu N\right)}$$

$$= \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta\left(\sum_p n_p \varepsilon_p - \mu \sum_p n_p\right)}$$

$$= \sum_{\{n_p\}} e^{-\beta \sum_p (\varepsilon_p - \mu) n_p}$$

$$= \prod_p \sum_{n_p = 0, 1} e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu) n_p}$$

$$= \prod_p \left(1 + e^{-\beta(\varepsilon_p - \mu)}\right)$$

Esercizio 4

Posto $\psi_{E,l,m}(r,\theta,\varphi) = R_{E,l}(r)\, Y_{lm}(\theta,\varphi)$

la funzione d'onda radiale ridotta $u_{E,l}(r) = r R_{E,l}(r)$ soddisfa l'eq. di Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m} u''_{E,l}(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} u_{E,l}(r) = E\, u_{E,l}(r)$$

con $a \leq r \leq b$ e condizioni al bordo $u_{E,l}(a) = u_{E,l}(b) = 0$

Per lo stato fondamentale si ha $l=0$ e quindi

$$u''(r) + k^2 u(r) = 0 \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \qquad u \equiv u_{E,0}$$

la soluzione generale è $u(r) = A e^{ikr} + B e^{-ikr}$

la condizione $u(a)=0$ implica

$$A e^{ika} + B e^{-ika} = 0 \quad \Rightarrow \quad B = -A e^{2ika}$$

quindi
$$u(r) = A e^{ikr} - A e^{-ikr+2ika}$$
$$= A e^{ika}\left(e^{ik(r-a)} - e^{-ik(r-a)}\right)$$
$$= \tilde{A} \sin(k(r-a))$$

la condizione $u(b)=0$ quantizza k e quindi E

$$\tilde{A} \sin(k(b-a)) = 0 \quad \Rightarrow \quad k(b-a) = n\pi \quad n=1,2,\dots$$

$$k_n = \frac{n\pi}{b-a} \qquad E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2 n^2}{(b-a)^2} \qquad n=1,2,\dots$$

l'energia dello stato fondamentale è quindi

$$E_1 = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\pi^2}{(b-a)^2}$$

la funzione d'onda corrispondente è

$$\psi_{E_1 0 0}(\underline{r}) = R_{E_1 0}(r)\, Y_{00}(\theta, \varphi)$$

$$Y_{00}(r) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad R_{E_1 0}(r) = \frac{1}{r}\tilde{A} \sin\left(k_1(r-a)\right)$$

la normalizzazione è data da

$$1 = \int |\psi_{100}(r)|^2\, r^2 dr\, d\Omega$$

$$= \int_a^b \frac{1}{r^2} |\tilde{A}|^2 \sin^2\left(k_1(r-a)\right) r^2 dr$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b |\tilde{A}|^2 \left(\sin^2(k_1(r-a)) + \cos^2(k_1(r-a))\right) dr$$

$$= \frac{1}{2}|\tilde{A}|^2 (b-a)$$

scelto $\tilde{A} = \sqrt{\frac{2}{b-a}}$ otteniamo

$$\psi_{E_1 0 0}(r, \theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2}{b-a}}\, \frac{1}{r} \sin\left(\frac{\pi(r-a)}{b-a}\right) \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

E_1 è un livello non degenere. Al primo ordine

la perturbazione V induce una variazione

$$\Delta E_1 = \int \psi_{E_1 0 0}(r, \theta, \varphi)\, c \cos\theta\, \psi_{E_1 0 0}(r, \theta, \varphi)\, d^3\underline{r}$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\, c \cos^2\theta\, \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$= \frac{c}{2}\int_0^{\pi} -d(\cos\theta)\, \cos^2\theta = \frac{c}{2}\int_{-1}^{1} dt\, t^2$$

$$= \frac{c}{3}$$

Esercizio 5

Gli autostati di $S_1^2 S_2^2 S^2 S_z$, indicati con $|s\, s_z\rangle$,

$$S^2 \, |s\, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1) \, |s\, s_z\rangle \qquad s = 0, 1$$

$$S_z \, |s\, s_z\rangle = \hbar s_z \, |s\, s_z\rangle \qquad -s \le s_z \le s \text{ intero}$$

possono essere espressi in termini degli autostati di $S_1^2 S_{1z} S_2 S_{2z}$, indicati con $|s_{1z}\, s_{2z}\rangle = |s_{1z}\rangle |s_{2z}\rangle$,

$$S_{1z} \, |s_{1z}\, s_{2z}\rangle = \hbar s_{1z} \, |s_{1z}\, s_{2z}\rangle \qquad s_{1z} = \pm \frac{1}{2}$$

$$S_{2z} \, |s_{1z}\, s_{2z}\rangle = \hbar s_{2z} \, |s_{1z}\, s_{2z}\rangle \qquad s_{2z} = \pm \frac{1}{2}$$

$$|0\, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z |-\rangle_z - |-\rangle_z |+\rangle_z \right)$$

$$|1\, 1\rangle = |+\rangle_z |+\rangle_z$$

$$|1\, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|+\rangle_z |-\rangle_z + |-\rangle_z |+\rangle_z \right)$$

$$|1\, -1\rangle = |-\rangle_z |-\rangle_z$$

$$|\pm\rangle_z \equiv |s_z = \pm\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\pm\rangle_y \equiv |s_y = \pm\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\pm\rangle_x \equiv |s_x = \pm\tfrac{1}{2}\rangle$$

e viceversa

$$|+\rangle_z |+\rangle_z = |1\, 1\rangle$$

$$|+\rangle_z |-\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\, 0\rangle + |0\, 0\rangle \right)$$

$$|-\rangle_z |+\rangle_z = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|1\, 0\rangle - |0\, 0\rangle \right)$$

$$|-\rangle_z |-\rangle_z = |1\, -1\rangle$$

In ogni stato di tripletto $|1\,1\rangle$ $|1\,0\rangle$ $|1\,-1\rangle$ la misura di S^2 dà come risultato $\hbar^2 2$.

1)
$$|\psi\rangle = |+\rangle_y \, |+\rangle_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + i\,|-\rangle_z\right)|+\rangle_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|+\rangle_z|+\rangle_z + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|-\rangle_z\,|+\rangle_z$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1\,1\rangle + \frac{i}{2}\left(|1\,0\rangle - |0\,0\rangle\right)$$

$$\text{prob} = \sum_{s_z=-1,0,1} \left|\langle 1\, s_z|\psi\rangle\right|^2$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

2)
$$|\psi\rangle = |+\rangle_y \, |-\rangle_x$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z + i\,|-\rangle_z\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - |-\rangle_z\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,|+\rangle_z|+\rangle_z - \frac{i}{2}\,|-\rangle_z|-\rangle_z - \frac{1}{2}\,|+\rangle_z|-\rangle_z + \frac{i}{2}\,|-\rangle_z|+\rangle_z$$
$$= \frac{1}{2}\,|1\,1\rangle - \frac{i}{2}\,|1\,-1\rangle - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle + |0\,0\rangle\right)$$
$$- \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,|1\,1\rangle - \frac{i}{2}\,|1\,-1\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+i)\,|1\,0\rangle - \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-i)\,|0\,0\rangle$$

$$\text{prob} = \sum_{s_z=1,0,-1} \left|\langle 1\, s_z|\psi\rangle\right|^2$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = \frac{3}{4}$$

3) $|\psi\rangle = |-\rangle_y \, |-\rangle_y$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - i\,|-\rangle_z\right) \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_z - i\,|-\rangle_z\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,|+\rangle_z|+\rangle_z - \frac{1}{2}\,|-\rangle_z|-\rangle_z - \frac{i}{2}\,|+\rangle_z|-\rangle_z - \frac{i}{2}\,|-\rangle_z|+\rangle_z$$

$$= \frac{1}{2}\,|1\,1\rangle - \frac{1}{2}\,|1\,-1\rangle - \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle + |0\,0\rangle\right)$$

$$- \frac{i}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\,0\rangle - |0\,0\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\,|1\,1\rangle - \frac{1}{2}\,|1\,-1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}\,|1\,0\rangle$$

$$\text{prob} = \sum_{s_z = 1, 0, -1} \left|\langle 1\, s_z | \psi\rangle\right|^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$$

alternativamente, osservando che gli autostati di $S_1^2\, S_2^2\, S^2\, S_y$ sono anche gli autostati di $S_1^2\, S_{1y}\, S_2^2\, S_{2y}$, si ha subito

$$|\psi\rangle = |-\rangle_y\, |-\rangle_y = |1\,-1\rangle$$

pertanto la prob. di misurare $\hbar^2 2$ per S^2 è pari a 1

Esercizio 6

$$Z_N = Z_1^N / N!$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^6} \int d\underline{q}_1 \, d\underline{q}_2 \int d\underline{p}_1 \, d\underline{p}_2 \; e^{-\beta H(\underline{q}_1, \underline{q}_2, \underline{p}_1, \underline{p}_2)}$$

posto $\underline{q} = \underline{q}_1 - \underline{q}_2$ e $\underline{Q} = \frac{1}{2}(\underline{q}_1 + \underline{q}_2)$

$$Z_1 \simeq \frac{1}{h^6} \left(\int dp_{1x} \, e^{-\beta \frac{p_{1x}^2}{2m}} \right)^6 \int_V d\underline{Q} \int_0^{\infty} 4\pi q^2 \, dq \, e^{-\beta \frac{\alpha}{2}(q - r_0)^2}$$

$$= \frac{1}{h^6} \left(\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}} \right)^6 V 4\pi \int_{-r_0\sqrt{\beta\alpha}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left(\frac{u}{\sqrt{\beta\alpha}} + r_0 \right)^2 \frac{du}{\sqrt{\beta\alpha}}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^6} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^3 \left(\frac{1}{\beta\alpha} \right)^{3/2} \int_{-r_0\sqrt{\beta\alpha}}^{\infty} \left(u + r_0 \sqrt{\beta\alpha} \right)^2 e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$\simeq \frac{4\pi V}{h^6} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^3 \left(\frac{1}{\beta\alpha} \right)^{3/2} \int_{-\infty}^{+\infty} r_0^2 \beta\alpha \, e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{4\pi V}{h^6} \left(\frac{2\pi m}{\beta} \right)^3 \frac{r_0^2}{(\beta\alpha)^{1/2}} \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{4\pi V}{h^6} (2\pi m)^3 \sqrt{2\pi} \, \frac{r_0^2}{\sqrt{\alpha}} \, \beta^{-\frac{7}{2}}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta} \log Z_N = -\frac{\partial}{\partial\beta} \left(\log Z_1^N - \log N! \right)$$

$$= -N \frac{\partial}{\partial\beta} \left[\log \left(\frac{4\pi V}{h^6} (2\pi m)^3 \sqrt{2\pi} \, \frac{r_0^2}{\sqrt{\alpha}} \right) - \frac{7}{2} \log \beta \right]$$

$$= N \frac{7}{2} \frac{1}{\beta} = N \frac{7}{2} k_B T$$

$$F = -k_B T \log Z_N$$

$$= -k_B T N \log Z_1 + k_B T \log N!$$

$$= -k_B T N \log Z_1 + k_B T \left(N \log N - N + O(\log N) \right)$$

$$= -k_B T N \left[\log \left(\frac{4\pi}{h^6} \frac{V}{N} (2\pi m)^3 \sqrt{2\pi} \frac{r_0^2}{\sqrt{\alpha}} (k_B T)^{7/2} \right) + 1 \right]$$

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T}$$

$$= N k_B \left[\log \left(\frac{4\pi}{h^6} \frac{V}{N} (2\pi m)^3 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, r_0^2 (k_B T)^{7/2} \right) + 1 \right]$$

$$+ N k_B T \, \frac{7}{2} \frac{1}{T}$$

$$= N k_B \left[\frac{9}{2} + \log \left(\frac{4\pi}{h^6} \frac{V}{N} (2\pi m)^3 \sqrt{\frac{2\pi}{\alpha}}\, r_0^2 (k_B T)^{7/2} \right) \right]$$

$$\langle q \rangle = \frac{\frac{1}{h^6} \int dq \int d\underline{\Omega} \int d\underline{p}_1 \int d\underline{p}_2 \; q \, e^{-\beta H(q, \underline{p}_1, \underline{p}_2)}}{Z_1}$$

$$= \frac{r_0 Z_1 + \frac{1}{\beta\alpha} \frac{\partial Z_1}{\partial r_0}}{Z_1}$$

$$= r_0 + \frac{1}{\beta\alpha} \frac{\partial}{\partial r_0} \log Z_1$$

$$= r_0 + \frac{1}{\beta\alpha} \frac{2}{r_0} = r_0 \left(1 + \frac{2}{r_0^2 \beta\alpha} \right)$$

$$\simeq r_0 \qquad \text{in quanto} \quad r_0 \sqrt{\beta\alpha} \gg 1$$

$$\Delta q^2 = \langle (q - \langle q \rangle)^2 \rangle$$

$$= \langle (q - r_0)^2 \rangle$$

$$= \frac{-\frac{2}{\beta}\frac{\partial Z_1}{\partial \alpha}}{Z_1}$$

$$= -\frac{2}{\beta}\frac{\partial}{\partial \alpha} \log Z_1$$

$$= -\frac{2}{\beta}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}$$

Nota de $\frac{\Delta q}{r_0} = \frac{1}{r_0\sqrt{\alpha\beta}} \ll 1$

$$\underline{q} = \underline{q}_1 - \underline{q}_2 \qquad\qquad \underline{q}_1 = \underline{Q} + \tfrac{1}{2}\underline{q}$$

$$\underline{Q} = (\underline{q}_1 + \underline{q}_2)\tfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \underline{q}_2 = \underline{Q} - \tfrac{1}{2}\underline{q}$$

$$d\underline{q}_1\, d\underline{q}_2 = \det J \; d\underline{q}\, d\underline{Q}$$

$J(\underline{q}, \underline{Q})$ matrice Jacobiana

$$J = \begin{pmatrix}
\frac{\partial q_{1x}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{1x}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{1x}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{1x}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{1x}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{1x}}{\partial q_z} \\
\frac{\partial q_{1y}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{1y}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{1y}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{1y}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{1y}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{1y}}{\partial q_z} \\
\frac{\partial q_{1z}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{1z}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{1z}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{1z}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{1z}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{1z}}{\partial q_z} \\
\frac{\partial q_{2x}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_z} \\
\frac{\partial q_{2y}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{2y}}{\partial q_z} \\
\frac{\partial q_{2z}}{\partial Q_x} & \frac{\partial q_{2z}}{\partial Q_y} & \frac{\partial q_{2z}}{\partial Q_z} & \frac{\partial q_{2z}}{\partial q_x} & \frac{\partial q_{2z}}{\partial q_y} & \frac{\partial q_{2z}}{\partial q_z}
\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}
\end{pmatrix} = A \otimes B$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} A_{11}\, B & A_{12}\, B \\ A_{21}\, B & A_{22}\, B \end{pmatrix}$$

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^{\text{rank } B} \; (\det B)^{\text{rank } A}$$

$$\det A = -1 \quad \text{rank } A = 2 \quad \det B = 1 \quad \text{rank } B = 3$$

$$\det J = (-1)^3 \; 1^2 = -1$$

$$\iint d\underline{q}_1 \; d\underline{q}_2 = \iint - d\underline{q} \; d\underline{Q}$$

$$\iint d\underline{q}_1 \, d\underline{q}_2 \; f(|\underline{q}_1 - \underline{q}_2|) = \iint - d\underline{q} \; d\underline{Q} \; f(|\underline{q}|)$$

$$= \iint d\underline{\tilde{q}} \; d\underline{Q} \; f(|-\underline{\tilde{q}}|)$$

$$= \iint d\underline{\tilde{q}} \; dQ \; f(|\underline{\tilde{q}}|)$$

$$= \iint d\underline{q} \, d\underline{Q} \; f(|\underline{q}|)$$

$$= \int d\underline{Q} \int_0^\infty 4\pi q^2 dq \; f(q)$$