MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA

A.A. 2018/2019 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 29 gennaio 2019

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Siano $\xi : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ e $\eta : \mathcal{H} \mapsto \mathcal{H}$ due operatori autoaggiunti (osservabili) nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Diciamo che le due osservabili sono compatibili se esse ammettono un sistema completo di autovettori comuni. Dimostrare che ξ e η sono compatibili se e solo se $[\xi, \eta] = 0$. Per semplicità si assuma che ξ sia non degenere.

[punteggio 4]]

2 Siano $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ due operatori di momento angolare e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$. Dimostrare che i coefficienti di Clebsch-Gordan $C^{l,m}_{l_1,m_1,l_2,m_2} = \langle l_1, m_1, l_2, m_2 | l_1, l_2, l, m \rangle$ sono 0 se $m \neq m_1 + m_2$. Nella notazione standard, l_1, l_2, l, m_1, m_2, m sono, rispettivamente, i numeri quantici di $L_1^2, L_2^2, L^2, L_{1z}, L_{2z}, L_z$.

[punteggio 4]

3 Al tempo t_0 un sistema è descritto dall'operatore densità $\rho(t_0)$. Qual'è la condizione che ci dice se il sistema si trova in uno stato puro o miscela? Può uno stato puro (miscela) diventare uno stato miscela (puro) a un successivo tempo t? Portare un esempio o dimostrare quanto si afferma.

[punteggio 4]

4 Un flusso stazionario di particelle di massa m, prive di spin, incide da $x = +\infty$ sulla barriera di potenziale unidimensionale

$$V(x) = \begin{cases} +\infty & x < 0, \\ (\hbar^2/2m)\lambda\delta(x-a) & x > 0, \end{cases} \qquad \lambda, a > 0.$$

Detta $\psi_E(x)$ la funzione d'onda stazionaria associabile alla singola particella avente energia E, determinare:
1) la condizione di raccordo di $\psi_E(x)$ nel punto $x = a$;
2) la funzione d'onda $\psi_E(x)$, a meno di una costante moltiplicativa, nella regione $x > a$;
3) il coefficiente di riflessione R.

[punteggio 7]

---

5 Due particelle identiche di spin 1/2 interagiscono mutuamente mediante un potenziale armonico unidimensionale nella coordinata relativa $x = x_1 - x_2$ avente pulsazione dipendente dagli spin $\boldsymbol{S}_1$ e $\boldsymbol{S}_2$. In sostanza, nel sistema del centro di massa la hamiltoniana risulta essere

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\left(1 + \frac{2\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{S}_2}{\hbar^2}\right)^2 x^2.$$

Determinare:
1) autovalori e autovettori di H;
2) il più generale stato $|\psi\rangle$ normalizzato tale che: i) una misura dell'energia dà con certezza il risultato $E = \hbar\omega 9/4$; ii) una misura della terza componente dello spin totale dà con certezza il risultato $S_z = 0$; il valore medio dello spin totale S^2 è pari a $\hbar^2$.
3) l'evoluzione temporale di tale stato dopo un tempo t.

[punteggio 7]

---

6 Si consideri un sistema di N fermioni identici di spin 1/2, non mutuamente interagenti, vincolati a muoversi in un piano. La hamiltoniana di singola particella vale

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = \frac{p^2}{2m} + V(r), \qquad p = |\boldsymbol{p}|, \quad r = |\boldsymbol{q}|, \qquad \boldsymbol{q},\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2$$

dove

$$V(r) = \begin{cases} -V_0(r/R)^2, & 0 \le r \le R, \\ +\infty, & r > R, \end{cases}$$

con V_0 costante positiva. Calcolare:
1) l'energia media classica all'equilibrio termico a temperatura T, $E_{\rm cl}(T)$;
2) il valore limite di $E_{\rm cl}(T)$ per $T \to 0$ e la sua espressione asintotica per $k_B T \gg V_0$;
3) l'energia di Fermi, ϵ_F;
4) l'energia media quantistica a temperatura $T = 0$, $E_{\rm q}(0)$.
Per semplicità, si risponda ai punti 3) e 4) assumendo $N/(\pi R^2) \le 2\pi m V_0/h^2$, cioè $\epsilon_F \le 0$.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Se ξ e η sono compatibili esiste un sistema di vettori completo in $\mathcal{H}$ $\{|\xi'\eta'\rangle\}$ tali che

$$\xi|\xi'\eta'\rangle = \xi'|\xi'\eta'\rangle \qquad \eta|\xi'\eta'\rangle = \eta'|\xi'\eta'\rangle$$

Per ogni generico vettore $|A\rangle \in \mathcal{H}$ si ha

$$|A\rangle = \sum_{\xi'\eta'} a_{\xi'\eta'}|\xi'\eta'\rangle$$ e quindi

$$[\xi,\eta]|A\rangle = \xi\eta|A\rangle - \eta\xi|A\rangle$$
$$= \sum_{\xi'\eta'} a_{\xi'\eta'}(\eta'\xi' - \xi'\eta')|\xi'\eta'\rangle = 0$$

Dall'arbitrarietà di $|A\rangle$ segue $[\xi,\eta]=0$

Viceversa, si supponga che $[\xi,\eta]=0$.

Sia $\xi|\xi'\rangle = \xi'|\xi'\rangle$ con ξ' non degenere. Segue immediatamente che $|\xi'\rangle$ è anche autovettore di η, infatti

$$\xi\eta|\xi'\rangle = \eta\xi|\xi'\rangle = \xi'\eta|\xi'\rangle \implies \eta|\xi'\rangle = \eta'|\xi'\rangle$$

Il sistema $\{|\xi'\rangle\}$ di autovettori di ξ forma un sistema ortogonale completo in $\mathcal{H}$.

Concludiamo che ξ e η hanno un sistema completo $\{|\xi'\rangle\}$ di autovettori comuni.

Esercizio 2

Sia $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$. Risulta

$$L_z |l_1 l_2 \, l \, m\rangle = \hbar m \, |l_1 l_2 \, l \, m\rangle$$

$$L_{1z} |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle = \hbar m_1 \, |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

$$L_{2z} | l_1 m_1 l_2 m_2\rangle = \hbar m_2 \, |l_1 m_1 l_2 m_2\rangle$$

Poiché $\underline{L} = \underline{L}^{+}$ segue

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | L_z | l_1 l_2 \, l \, m\rangle$$

$$= \hbar m \, \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 \, l \, m\rangle$$

$$= \left(\hbar m_1 + \hbar m_2\right) \langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 \, l \, m\rangle$$

cioè

$$\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 \, l m\rangle \left(m - (m_1 + m_2)\right) = 0$$

per $m \neq m_1 + m_2$ si ha $\langle l_1 m_1 l_2 m_2 | l_1 l_2 \, l m\rangle = 0$

Esercizio 3

Per uno stato puro $\rho = \rho^2$ e quindi $\mathrm{tr}\,\rho^2 = \mathrm{tr}\,\rho = 1$

Per uno stato miscela $\rho^2 \neq \rho$ e $\mathrm{tr}\,\rho^2 < 1$

Infatti posto $\rho = \sum_m p_m |m\rangle\langle m|$ $\quad \rho|m\rangle = p_m |m\rangle$

con $p_m \geq 0$ $\quad \sum_m p_m = 1$ $\quad \langle m|m'\rangle = \delta_{mm'}$

nella base degli autovettori di ρ si ha

$$\rho^2 = \sum_m p_m^2 |m\rangle\langle m|$$

$$\mathrm{tr}\,\rho^2 = \sum_m p_m^2 \leq 1$$ il segno = vale solo se $p_m = \delta_{mn}$ cioè se lo stato è puro

Detto $U(t,t_0)$ l'operatore di evoluzione temporale

$$\rho(t) = U(t,t_0)\,\rho(t_0)\,U(t,t_0)^\dagger$$ $U(t,t_0)$ unitario

per le proprietà cicliche della traccia si ha

$$\mathrm{tr}\,\rho(t)^2 = \mathrm{tr}\left(U(t,t_0)\rho(t_0)U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0)\rho(t_0)U(t,t_0)^\dagger\right)$$

$$= \mathrm{tr}\left(U(t,t_0)\rho(t_0)\rho(t_0)U(t,t_0)^\dagger\right)$$

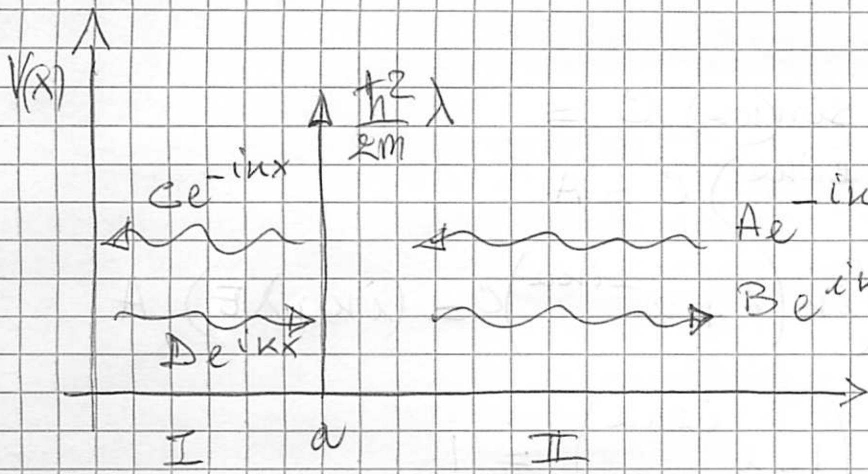
$$= \mathrm{tr}\left(\rho(t_0)^2 U(t,t_0)^\dagger U(t,t_0)\right)$$

$$= \mathrm{tr}\,\rho(t_0)^2$$

la natura dello stato non cambia nel tempo

La situazione cambia se il sistema non è isolato.

Esercizio 4



Eq. di Schrödinger nelle regioni I e II

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi_E''(x) = E\,\psi_E(x) \qquad \psi_E''(x) = -k^2\,\psi_E(x) \qquad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$$

$$\psi_E(x) = \begin{cases} Ae^{-ikx} + Be^{ikx} & x > a \\ Ce^{-ikx} + De^{ikx} & 0 < x < a \end{cases}$$

in $x=0$ deve essere $\psi_E(0) = 0$ cioè $C + D = 0$

in $x=a$ deve essere $\psi_E(a^+) = \psi_E(a^-)$ inoltre

$\psi_E''(x) = \quad \psi_E(x) - \frac{2mE}{\hbar^2}\psi_E(x)$ integrata intorno ad a dà

$$\psi_E'(a^+) - \psi_E'(a^-) = \lambda\ \psi_E(a)$$

$$\begin{cases} C + D = 0 \\ Ce^{-ika} + De^{ika} = Ae^{-ika} + Be^{ika} \\ -ikAe^{-ika} + ikBe^{ika} + Cike^{-ika} - Dike^{ika} = \\ \qquad \lambda\left(Ae^{-ika} + Be^{ika}\right) \end{cases}$$

Poniamo $D = -C$ e risolviamo B e C in termini di A

$$\begin{cases} -e^{2ika} B + \left(1 - e^{2ika}\right) C = A \\ e^{2ika} (ik - \lambda) B + ik\left(1 + e^{2ika}\right) C = (ik + \lambda) A \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{B}{A} e^{i2ka} + \dfrac{C}{A}\left(1 - e^{i2ka}\right) = 1 \\ \dfrac{B}{A} e^{2ika}\left(1 + i\dfrac{\lambda}{k}\right) + \dfrac{C}{A}\left(1 + e^{2ika}\right) = 1 - i\dfrac{\lambda}{k} \end{cases}$$

$$\frac{B}{A} e^{2ika}\left(-\left(1+e^{2ika}\right) - \left(1 - e^{2ika}\right)\left(1 + i\frac{\lambda}{k}\right)\right)$$

$$= \left(1 + e^{i2ka}\right) - \left(1 - i\frac{\lambda}{k}\right)\left(1 - e^{2ika}\right)$$

$$\frac{B}{A} = \frac{2e^{2ika} + i\frac{\lambda}{k}\left(1 - e^{2ika}\right)}{-2 - i\frac{\lambda}{k}\left(1 - e^{2ika}\right)} e^{-2ika}$$

$$\frac{B}{A} = -\frac{1 - i\frac{\lambda}{2k}\left(1 - e^{-2ika}\right)}{1 + i\frac{\lambda}{2k}\left(1 - e^{2ika}\right)}$$

Si osservi che $\dfrac{B}{A} = -\dfrac{\bar{z}}{z}$ $\quad z = 1 + i\dfrac{\lambda}{2k}\left(1 - e^{2ika}\right) \in \mathbb{C}$

quindi $R = \left|\dfrac{B}{A}\right|^2 = 1$

$\lim_{a \to 0} \dfrac{B}{A} = -1$ come giusto, riflessione con $\psi_E(0) = 0$

Esercizio 5

Posto $\underline{S} = \underline{S}_1 + \underline{S}_2$ e osservando che

$$S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\,\underline{S}_1 \cdot \underline{S}_2$$

l'hamiltoniana può essere riscritta come

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 \left(1 + \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{\hbar^2} \right)^2 x^2$$

Le due particelle hanno spin $\frac{1}{2}$ quindi $S_1^2 = S_2^2 = \frac{3}{4} \mathbb{1} \hbar^2$

e $S^2 = \hbar^2 s(s+1)\, \mathbb{1}$ con $s = 0, 1$ $\left(|s_1 - s_2| \le s \le s_1 + s_2 \right)$

Gli autostati di H sono dunque il prodotto di autostati di oscillatore armonico con pulsazione

$$\omega_s \equiv \omega \left| 1 + s(s+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right| = \omega \left| s(s+1) - \frac{1}{2} \right|$$

e autostati di S^2.

Poniamo:

$$S^2 \, |s, s_z\rangle = \hbar^2 s(s+1) \, |s, s_z\rangle \qquad s = 0 \quad s_z = 0$$
$$s = 1 \quad s_z = 0, \pm 1$$

$$\left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 \right) |n\rangle_0 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0 \, |n\rangle_0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \quad \omega_0 = \omega/2$$

$$\left(\frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega_1^2 x^2 \right) |n\rangle_1 = \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_1 \, |n\rangle_1 \qquad n = 0, 1, 2 \ldots \quad \omega_1 = 3\omega/2$$

Poiché le due particelle identiche sono fermioni, ogni loro stato fisico deve essere antisimmetrico per scambio particella 1 $\Longleftrightarrow$ particella 2.

Nel sistema del centro di massa lo scambio delle due particelle è equivalente a una inversione di parità, pertanto gli stati di oscillatore con n pari sono simmetrici, quelli con n dispari antisimmetrici.

Lo stato di spin di singoletto è antisimmetrico

$$|S=0\ S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$-\,|S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=-\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle\Big)$$

Gli stati di spin di tripletto sono simmetrici

$$|S=1\ S_z=1\rangle = |S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|S=1\ S_z=-1\rangle = |S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=-\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|S=1\ S_z=0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=-\tfrac{1}{2}\rangle$$
$$+\,|S_1=\tfrac{1}{2}\ S_{1z}=-\tfrac{1}{2}\rangle\,|S_2=\tfrac{1}{2}\ S_{2z}=\tfrac{1}{2}\rangle\Big)$$

In conclusione, gli autostati di H globalmente antisimmetrici e i rispettivi autovalori sono

$|n\rangle_0\ |0,0\rangle \qquad E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\hbar\omega}{2} \qquad n=0,2,4,6,\ldots$

$|n\rangle_1\ |1,S_z\rangle \qquad E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega_1=\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{3\hbar\omega}{2} \qquad n=1,3,5,7,\ldots$

La degenerazione è 1 per n pari e 3 per n dispari

2) Poiché $E = \frac{9}{4}\hbar\omega = \frac{\hbar\omega}{2}\ \frac{9}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}\left(4+\frac{1}{2}\right)$

$= \frac{3}{2}\hbar\omega\ \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\hbar\omega\left(1+\frac{1}{2}\right)$

l'informazione i) ci dice che $|\psi\rangle$ è una sovrapposizione

dello stato $|4\rangle_0 |0,0\rangle$ e dei tre stati $|1\rangle_1 |1, s_z\rangle$

Per ii) possiamo eliminare gli stati con $s_z = \pm 1$, quindi

$|\psi\rangle = a\ |4\rangle_0 |0,0\rangle + b\ |1\rangle_1 |1,0\rangle$

imponendo $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ deve essere $|a|^2 + |b|^2 = 1$

Il valore medio di S^2 nello stato $|\psi\rangle$ vale

$\langle\psi|S^2|\psi\rangle = |a|^2\ \hbar^2\ 0(0+1) + |b|^2\ \hbar^2\ 1(1+1) = 2\hbar^2 |b|^2$

Per iii) si ha quindi $|b|^2 = \frac{1}{2}$ e perciò $|a|^2 = \frac{1}{2}$

A meno di un inessenziale fattore di fase, il più generale stato $|\psi\rangle$ è perciò

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|4\rangle_0 |00\rangle + e^{i\varphi} |1\rangle_1 |10\rangle \right) \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$

3) $|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\ |\psi\rangle$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{9}{4}\hbar\omega t} |4\rangle_0 |00\rangle + e^{i\varphi} e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{9}{4}\hbar\omega t} |1\rangle_1 |10\rangle \right)$$

$$= e^{-i\frac{9}{4}\omega t}\ |\psi\rangle$$

$|\psi\rangle$ è uno stato stazionario

Esercizio 6

1) $$E_{cl}(T) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z(N) = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{Z(1)^N}{N!}$$

$$Z(1) = \frac{1}{h^2}\int d\underline{q}\int d\underline{p}\; e^{-\beta H(\underline{q},\underline{p})}$$

$$= \frac{1}{h^2}\int_0^R 2\pi r\,dr\int_{-\infty}^{+\infty}dp_x\int_{-\infty}^{+\infty}dp_y\; e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+V(r)\right)}$$

$$= \frac{1}{h^2}\,\frac{2\pi m}{\beta}\,2\pi\int_0^R dr\; r\,e^{+\beta\frac{V_0}{R^2}r^2}$$

$$= \frac{1}{h^2}\,\frac{4\pi^2 m}{\beta}\,\frac{R^2}{2\beta V_0}\left(e^{\frac{\beta V_0}{R^2}R^2}-1\right)$$

$$= \frac{1}{h^2}\,\frac{\pi R^2\,2\pi m}{V_0\,\beta^2}\left(e^{\beta V_0}-1\right)$$

$$E_{cl}(T) = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\text{cost.} - 2\log\beta + \log\left(e^{\beta V_0}-1\right)\right)$$

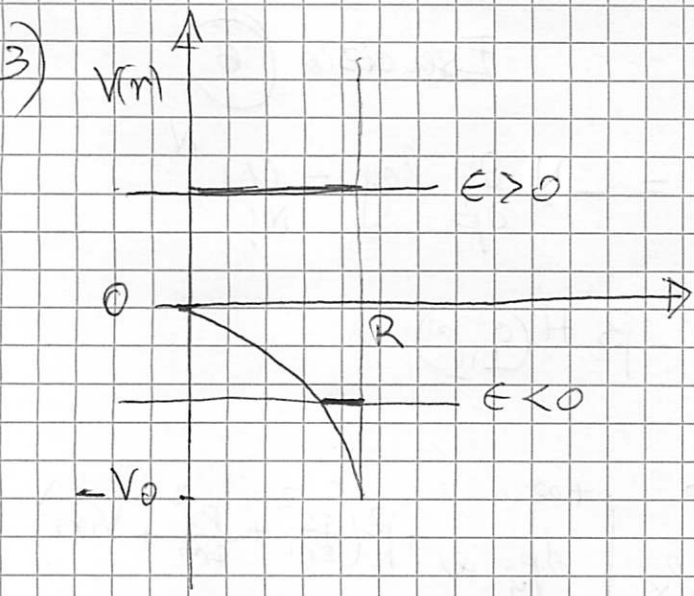
$$= N\left(\frac{2}{\beta} - \frac{V_0\,e^{\beta V_0}}{e^{\beta V_0}-1}\right)$$

$$= N\left(2k_BT - V_0\,\frac{e^{V_0/k_BT}}{e^{V_0/k_BT}-1}\right)$$

2) $$\lim_{T\to 0} E_{cl}(T) = -NV_0$$

per $k_BT \gg V_0$ $$E_{cl}(T) \simeq N\left(2k_BT - V_0\,\frac{1}{V_0/k_BT}\right) = N k_BT$$

3)



$$H \le \epsilon$$

$$\frac{p^2}{2m} + V(r) \le \epsilon$$

$$p^2 \le 2m\left(\epsilon - V(r)\right)$$

sia $\epsilon > 0$, a $T=0$ il numero di fermioni con energia di singola particelle $\le \epsilon$ è

$$N(\epsilon) = \frac{2}{h^2} \int_0^R 2\pi r\, dr \int_0^{\sqrt{2m(\epsilon - V(r))}} 2\pi p\, dp$$

$$= \frac{2}{h^2} \int_0^R 2\pi r\, dr \;\pi\, 2m\left(\epsilon - V(r)\right)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int_0^R dr\; r\left(\epsilon + \frac{V_0}{R^2} r^2\right)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \left(\epsilon \frac{R^2}{2} + \frac{V_0}{R^2}\frac{R^4}{4}\right)$$

$$= \left(\epsilon + \frac{V_0}{2}\right) \frac{4m\pi}{h^2} \pi R^2$$

$$N(\epsilon_F) = N$$

$$\epsilon_F = \frac{h^2}{4m\pi} \frac{N}{\pi R^2} - \frac{V_0}{2}$$

si osservi che $\epsilon_F \ge 0$ è ottenuto per $\frac{N}{\pi R^2} \ge \frac{2mV_0\pi}{h^2}$ coerentemente con quanto assunto.

sia $\epsilon < 0$

$$N(\epsilon) = \frac{2}{h^2}\int_{R\sqrt{\frac{-\epsilon}{V_0}}}^{R} 2\pi r\,dr \int_0^{\sqrt{2m(\epsilon - V(r))}} 2\pi p\,dp$$

$$= \frac{2}{h^2}\int_{R\sqrt{-\frac{\epsilon}{V_0}}}^{R} 2\pi r\,dr\ \pi\, 2m(\epsilon - V(r))$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\int_{R\sqrt{-\frac{\epsilon}{V_0}}}^{R} dr\left(\epsilon r + \frac{V_0}{R^2}r^3\right)$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\frac{\epsilon r^2}{2} + \frac{V_0 r^4}{4R^2}\right)\Bigg|_{R\sqrt{-\frac{\epsilon}{V_0}}}^{R}$$

$$= \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(\frac{\epsilon R^2}{2} + \frac{V_0 R^2}{4} + \frac{R^2\epsilon^2}{2V_0} - \frac{V_0}{4}\frac{\epsilon^2 R^2}{V_0^2}\right)$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\left(\frac{V_0}{2} + \epsilon + \frac{\epsilon^2}{2V_0}\right)$$

$$N(\epsilon_F) = N \qquad \frac{\epsilon_F^2}{2V_0} + \epsilon_F + \frac{V_0}{2} = \frac{h^2}{4\pi m}\frac{N}{\pi R^2}$$

$$\epsilon_F^2 + 2V_0\epsilon_F + V_0^2 - \frac{h^2 2V_0}{4\pi m}\frac{N}{\pi R^2} = 0$$

$$\epsilon_F = -V_0 + \sqrt{V_0^2 - \left(V_0^2 - \frac{h^2 V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}\right)} \qquad \left(-V_0 < \epsilon_F \leq 0\right)$$

$$= -V_0 + \sqrt{\frac{h^2 V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}$$

$$\epsilon_F = \begin{cases} -V_0 + \sqrt{\dfrac{h^2 V_0}{2\pi m}\dfrac{N}{\pi R^2}} & 0 \leq \dfrac{N}{\pi R^2} \leq \dfrac{2\pi m V_0}{h^2} \\[2ex] \left(-V_0 + \dfrac{h^2}{2\pi m}\dfrac{N}{\pi R^2}\right)\dfrac{1}{2} & \dfrac{N}{\pi R^2} \geq \dfrac{2\pi m V_0}{h^2} \end{cases}$$

$$E_g(0) = \int_{-V_0}^{\epsilon_F} \frac{dN(\epsilon)}{d\epsilon}\,\epsilon\,d\epsilon$$

sia $\epsilon_F \leq 0$

$$E_g(0) = \int_{-V_0}^{\epsilon_F} \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\left(1+\frac{\epsilon}{V_0}\right)\epsilon\,d\epsilon$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\left(\frac{\epsilon^2}{2}+\frac{\epsilon^3}{3V_0}\right)\Bigg|_{-V_0}^{\epsilon_F}$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\left(\frac{\epsilon_F^2}{2}+\frac{\epsilon_F^3}{3V_0}-\frac{V_0^2}{6}\right)$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\left(\cancel{\frac{V_0^2}{2}}+\frac{1}{2}\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}-\cancel{V_0\sqrt{\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}}\right.$$

$$-\cancel{\frac{V_0^2}{3}}+\frac{1}{3V_0}\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}\sqrt{\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}+\cancel{V_0\sqrt{\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}}$$

$$\left.-\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}-\cancel{\frac{V_0^2}{6}}\right)$$

$$= \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\,\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{3V_0}\sqrt{\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}\right)$$

$$= N\left(\frac{2}{3}\sqrt{\frac{h^2V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}}-V_0\right)$$

questa espressione è valida per $\dfrac{N}{\pi R^2} \leq \dfrac{2\pi m V_0}{h^2}$

per $\dfrac{N}{\pi R^2} = \dfrac{2\pi m V_0}{h^2}$ si ha $E_g(0) = N\left(\dfrac{2}{3}V_0 - V_0\right) = -\dfrac{N V_0}{3}$

Si $\epsilon_F \geqslant 0$ c'est $\frac{N}{\pi R^2} \geqslant \frac{2\pi m V_0}{h^2}$

$$E_q(0) = -N\frac{V_0}{3} + \int_0^{\epsilon_F} \frac{d\mathcal{N}(\epsilon)}{d\epsilon}\,\epsilon\, d\epsilon$$

$$= -N\frac{V_0}{3} + \int_0^{\epsilon_F} \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2\,\epsilon\, d\epsilon$$

$$= -N\frac{V_0}{3} + \frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2 \,\frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{4\pi m}\frac{N}{\pi R^2} - \frac{V_0}{2}\right)^2$$

$$= -N\frac{V_0}{3} + \frac{1}{2}\frac{h^2}{4\pi m}\frac{N^2}{\pi R^2} + \frac{V_0^2}{8}\frac{4\pi m}{h^2}\pi R^2 - N\frac{V_0}{2}$$

$$= N\left(-\frac{5}{6}V_0 + \frac{1}{4}\frac{h^2}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2} + \frac{1}{4}V_0^2\left(\frac{h^2}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}\right)^{-1}\right)$$

$$\frac{E_q(0)}{N} = \begin{cases} -V_0 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{h^2 V_0}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}} & 0 \leqslant \frac{N}{\pi R^2} \leqslant \frac{2\pi m V_0}{h^2} \\ -\frac{5}{6}V_0 + \frac{1}{4}\frac{h^2}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2} + \frac{1}{4}V_0^2\left(\frac{h^2}{2\pi m}\frac{N}{\pi R^2}\right)^{-1} & \frac{N}{\pi R^2} > \frac{2\pi m V_0}{h^2} \end{cases}$$