# MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2022/2023 – Prof. C. Presilla

Prova AS1 – 29 marzo 2023

| | |
|---|---|
| Cognome | |
| Nome | |
| Matricola | |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| penalità | | | | | | | | | |

| esercizio | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| voto | | | | | | |

**1** Usando esclusivamente il principio di indeterminazione, dimostrare che l'autovalore minimo $E_0$ di un oscillatore armonico di pulsazione $\omega$ soddisfa la relazione $E_0 \geq \hbar\omega/2$.

[punteggio 4]

---

**2** Siano $\boldsymbol{L}_1$ e $\boldsymbol{L}_2$ due operatori di momento angolare e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2$. Dimostrare che

$$\langle l_1, m_1, l_2, m_2 | l_1, l_2, l, m\rangle = 0 \quad \text{se} \quad m \neq m_1 + m_2,$$

dove $|l_1, m_1, l_2, m_2\rangle$ e $|l_1, l_2, l, m\rangle$ sono, rispettivamente, autostati di $L_1^2, L_{1z}, L_2^2 L_{2z}$ e $L_1^2, L_2^2, L^2, L_z$.

[punteggio 4]

---

**3** L'energia cinetica media degli atomi di idrogeno contenuti nell'atmosfera di una stella, assunta all'equilibrio termico a temperatura $T$, è di 1 eV. Calcolare il logaritmo naturale del rapporto $N_p/N_s$ tra le popolazioni di atomi di idrogeno che si trovano negli stati $p$ $(n = 2)$ e $s$ $(n = 1)$.
Si ricordi che i livelli energetici $E_n$ dell'atomo d'idrogeno e le loro degenerazioni $g_n$ sono

$$E_n = -E_0/n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad E_0 \simeq 13.6 \text{ eV}, \qquad g_n = n^2.$$

[punteggio 4]

---

**4** Due particelle distinguibili di uguale massa $m$ sono vincolate a muoversi lungo un asse ciascuna soggetta a una forza elastica di richiamo verso l'origine di costante elastica $k$. Le particelle interagiscono mutuamente con potenziale $H'(q_1, q_2) = \lambda q_1 q_2$, dove $q_1, q_2$ sono le posizioni delle particelle lungo l'asse. L'Hamiltoniana totale del sistema è dunque $H = H_0 + H'$ con

$$H_0(q_1, p_1, q_2, p_2) = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 q_2^2, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Determinare:
1) gli autovalori di $H_0$ e la loro degenerazione;
2) gli autovalori esatti di $H$;
3) l'espressione approssimata al primo ordine in $\lambda/k$ di tutti gli autovalori esatti di $H$ e la degenerazione dei primi tre livelli nell'ipotesi $\lambda \ll k$.
4) Calcolare mediante la teoria delle perturazioni indipendenti dal tempo la variazione indotta da $H'$ al primo ordine in $\lambda/k$ sui primi due autovalori di $H_0$.
Si ricordi che per un oscillatore armonico di massa $m$ e pulsazione $\omega$ valgono le formule

$$q = -i\sqrt{\hbar/(2m\omega)}(\eta^\dagger - \eta), \qquad \eta^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad \eta|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle.$$

[punteggio 8]

---

**5** Una particella di spin 1/2 dotata di momento magnetico intrinseco $\boldsymbol{\mu} = -\mu_0 \boldsymbol{S}$, dove $\boldsymbol{S}$ è lo spin della particella e $\mu_0$ una costante positiva, è sottoposta a un un campo magnetico costante $\boldsymbol{B}$ diretto lungo l'asse $x$. Una misura di $S_z$ effettuata al tempo $t = 0$ fornisce il risultato $\hbar/2$. Determinare:
1) lo stato della particella al tempo $t = 0$ subito dopo la misura;
2) lo stato della particella al generico tempo $t > 0$;
3) i risultati che possono essere ottenuti da una misura di $S_y$ effettuata al tempo $t > 0$ e le relative probabilità.

[punteggio 5]

---

**6** Un gas di $N$ particelle identiche non interagenti di massa $m$ è contenuto in un volume $V$. Supponendo che il gas sia in equilibrio termico con un termostato a temperatura $T$ e le particelle possano essere descritte come particelle classiche, calcolare:
1) l'energia media per particella $E/N$ del gas;
2) il valore medio $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ della velocità vettoriale delle particelle;
3) il valore più probabile $v_0$ del modulo della velocità delle particelle;
4) il valore medio $\langle v \rangle$ del modulo della velocità delle particelle.
L'energia media per particella calcolata al punto 1) è indipendente dalla densità $N/V$ e tende a zero per $T \to 0$.
5) Calcolare il valore limite per $T \to 0$ dell'energia media per particella nell'ipotesi che le particelle siano fermioni di spin 1/2.
Si ricordi che

$$\int_0^\infty t e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}, \qquad \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{4}, \qquad \int_0^\infty t^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}.$$

[punteggio 8]

---

Posto $\langle E_0 | E_0 \rangle = 1$ abbiamo

$$E_0 = \langle E_0 | H | E_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{2m} \langle E_0 | p^2 | E_0 \rangle + \frac{1}{2} m \omega^2 \langle E_0 | q^2 | E_0 \rangle$$

Poiché $\langle E_0 | q | E_0 \rangle = \langle E_0 | p | E_0 \rangle = 0$ segue

$$E_0 = \frac{1}{2m} \left( \Delta p^2 + m^2 \omega^2 \Delta q^2 \right)$$

dove $\Delta p^2 \equiv \langle E_0 | p^2 | E_0 \rangle - \langle E_0 | p | E_0 \rangle^2$

$\Delta q^2 \equiv \langle E_0 | q^2 | E_0 \rangle - \langle E_0 | q | E_0 \rangle^2$

Usando la disuguaglianza $a^2 + b^2 \geq 2|a\, b|$
con $a = \Delta p$ e $b = m\omega \Delta q$ otteniamo

$$E_0 \geq \frac{1}{2m} 2 \Delta p \, m\omega \Delta q = \omega \Delta q \Delta p$$

$$\geq \omega \frac{\hbar}{2}$$

Esercizio 2

Sia $\underline{L} = \underline{L}_1 + \underline{L}_2$. Risulta

$$L_z \, |l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle = \hbar m \, |l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle$$

$$L_{1z} \, |l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2\rangle = \hbar m_1 \, |l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2\rangle$$

$$L_{2z} \, |l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2\rangle = \hbar m_2 \, |l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2\rangle$$

Poiché $\underline{L} = \underline{L}^{+}$ segue

$$\langle l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2 | \, L_z \, | l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle$$

$$= \hbar m \, \langle l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2 | l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle$$

$$= \left(\hbar m_1 + \hbar m_2\right) \, \langle l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2 | l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle$$

cioè

$$\langle l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2 | l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle \left(m - (m_1 + m_2)\right) = 0$$

per $m \neq m_1 + m_2$ si ha $\langle l_1 \, m_1 \, l_2 \, m_2 | l_1 \, l_2 \, l \, m\rangle = 0$

Esercizio 3

L'energia cinetica media degli atomi di H in equilibrio termico a temperatura T è

$$E_{kin} = \frac{3}{2} k_B T$$

Pertanto $\quad k_B T = \frac{2}{3} \, 1 \, eV$

Ricordando che i livelli energetici dell'atomo di H sono

$$E_n = - \frac{13.6 \, eV}{n^2} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \text{ con degenerazione } g_n = n^2$$

e $\; N_k = g_k e^{-\beta E_k} \Big/ \sum_{j=1}^{\infty} g_j e^{-\beta E_j} \;$ otteniamo

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{4 e^{-\beta E_2}}{e^{-\beta E_1}} = 4 e^{(E_1 - E_2)/k_B T}$$

$$= \exp\left( - 13.6 \, eV \left( \frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) \frac{3}{2 \, 1 \, eV} \right) 4$$

$$= \exp\left( - 13.6 \; \frac{3}{4} \; \frac{3}{2} \right) 4$$

$$= \exp\left( - 13.6 \; \frac{9}{8} \right) 4$$

$$\ln \frac{N_2}{N_1} = - 13.6 \, \frac{9}{8} \overset{+\ln 4}{=} - \frac{122.4}{8} \overset{+\ln 4}{=} - 15.3 + \ln 4$$

$$\simeq - 13,9$$

Esercizio 4

$$H_0 = H_{01} + H_{02} \qquad H_{0j} = \frac{p_j^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q_j^2 \qquad j=1,2$$

Poiché $[H_{01}, H_{02}] = 0$ e gli autovalori di

$H_{0j}$ sono $E_{n_j} = \hbar\omega\left(n_j + \frac{1}{2}\right) \qquad n_j = 0, 1, 2, \dots$

gli autovalori di $H_0$ sono

$$E^{(0)}_{n_1 n_2} = \hbar\omega\,(n_1 + n_2 + 1)$$

Posto $N = n_1 + n_2 = 0, 1, 2, \dots$ abbiamo

$E^{(0)}_N = \hbar\omega\,(N+1)$ con degenerazione $g_N = \sum_{n_1}^{N} 1 = N+1$

Per trovare gli autovalori esatti di $H$ si osservi che il potenziale totale $V = \frac{1}{2} m\omega^2 q_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q_2^2 + \lambda q_1 q_2$ può essere riscritto come la somma di due quadrati con la trasformazione lineare $q_1 = a y_1 + b y_2 \quad q_2 = -b y_1 + a y_2$

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 q_1^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q_2^2 + \lambda q_1 q_2$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 \left(a^2 y_1^2 + b^2 y_2^2 + 2ab\, y_1 y_2\right)$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega^2 \left(b^2 y_1^2 + a^2 y_2^2 - 2ab\, y_1 y_2\right)$$

$$+ \lambda\left(-ab\, y_1^2 + a^2 y_1 y_2 - b^2 y_1 y_2 + ab\, y_2^2\right)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 \left(a^2 + b^2 - \frac{2\lambda}{m\omega^2} ab\right)$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega^2 y_2^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{2\lambda}{m\omega^2} ab\right)$$

$$+ \frac{1}{2} m\omega^2 y_1 y_2 \left(2ab - 2ab + \frac{2\lambda}{m\omega^2}(a^2 - b^2)\right)$$

scegliendo $a^2+b^2=1$ e $a=b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ abbiamo

$$V = \frac{1}{2} m\omega^2 y_1^2 \left(1 - \frac{\lambda}{m\omega^2}\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 y_2^2 \left(1+\frac{\lambda}{m\omega^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \Omega_-^2 y_1^2 + \frac{1}{2} m \Omega_+^2 y_2^2$$

dove $\Omega_\pm = \omega\sqrt{1 \pm \frac{\lambda}{m\omega^2}}$

Nelle nuove coordinate $(y_1\, p_1)$ $(y_2\, p_2)$ dove

$y_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 - q_2)$ $\quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2)$ si ha

$$H = H_0 + H' = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega_-^2 y_1^2 + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2} m \Omega_+^2 y_2^2$$

con autovalori

$$E_{n_1 n_2} = \hbar \Omega_- \left(n_1 + \frac{1}{2}\right) + \hbar \Omega_+ \left(n_2 + \frac{1}{2}\right) \qquad n_1, n_2 = 0,1,2,\dots$$

Assumendo $\frac{\lambda}{m\omega^2} = \frac{\lambda}{k} \ll 1$ abbiamo

$$\Omega_\pm = \omega\left(1 \pm \frac{\lambda}{k}\right)^{\frac{1}{2}} \simeq \omega\left[1 \pm \frac{1}{2}\frac{\lambda}{k} + O\left(\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2\right)\right]$$

$$\simeq \omega \pm \frac{\lambda}{2m\omega} + O\left(\left(\frac{\lambda}{m\omega}\right)^2\right)$$

$$E_{n_1 n_2} \simeq \hbar\omega(n_1+n_2+1) - \frac{\hbar\lambda}{2m\omega}\left(n_1+\frac{1}{2}\right) + \frac{\hbar\lambda}{2m\omega}\left(n_2+\frac{1}{2}\right)$$

$$= \hbar\omega(n_1+n_2+1) + \frac{\hbar\lambda}{2m\omega}(n_2 - n_1)$$

$$= \hbar\omega\left[(n_1+n_2+1) + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{k}(n_2-n_1)\right] + O\left(\left(\frac{\lambda}{k}\right)^2\right)$$

livello fondamentale $n_1 = n_2 = 0$

$E_0 = \hbar\omega \qquad g_0 = 1$

primo livello eccitato $n_1 = 1 \quad n_2 = 0$

$E_1 = 2\hbar\omega - \frac{\lambda}{2k}\hbar\omega \qquad g_1 = 1$

secondo livello eccitato $n_2 = 1 \quad n_1 = 0$

$E_2 = 2\hbar\omega + \frac{\lambda}{2k}\hbar\omega \qquad g_2 = 1$

Gli autostati di $H^{(0)}$ relativi ai livelli $E_0^{(0)}$ e $E_1^{(0)}$ sono:

$H^{(0)} |0,0\rangle = E_0^{(0)} |0,0\rangle$

$H^{(0)} |1,0\rangle = E_1^{(0)} |1,0\rangle \qquad H^{(0)} |0,1\rangle = E_1^{(0)} |0,1\rangle$

Poiche $E_0^{(0)}$ è non degenere la variazione perturbativa è $\langle 0,0 | \lambda q_1 q_2 |0,0\rangle = \lambda \langle 0| q_1 |0\rangle \langle 0| q_2 |0\rangle = 0$ in quanto $|0\rangle$ è autostato pari. Dunque $E_0^{(0)} \to E_0^{(0)}$

L'autovalore $E_1^{(0)}$ è doppiamente degenere e la variazione perturbativa al primo ordine è data dagli autovalori della matrice

$$\begin{pmatrix} \langle 1,0| \lambda q_1 q_2 |1,0\rangle & \langle 1,0| \lambda q_1 q_2 |0,1\rangle \\ \langle 0,1| \lambda q_1 q_2 |1,0\rangle & \langle 0,1| \lambda q_1 q_2 |0,1\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} \langle 1| q_1 |1\rangle \langle 0| q_2 |0\rangle & \langle 1| q_1 |0\rangle \langle 0| q_2 |1\rangle \\ \langle 0| q_1 |1\rangle \langle 1| q_2 |0\rangle & \langle 0| q_1 |0\rangle \langle 1| q_2 |1\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \lambda \begin{pmatrix} 0 & |\langle 1| q |0\rangle|^2 \\ |\langle 1| q |0\rangle|^2 & 0 \end{pmatrix}$$

dove, ricordando che $q = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\eta^+ - \eta)$ $\quad \eta^+|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$

$\eta|n\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$

$$\langle 1|q|0\rangle = \langle 1| -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(\eta^+ - \eta)|0\rangle$$

$$= -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\langle 1|1\rangle = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

quindi $|\langle 1|q|0\rangle|^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$

Gli autovalori della matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sono $\pm 1$

quindi al primo ordine della teoria delle perturbazioni si ha

$$E_1^{(0)} \longrightarrow E_1^{(0)} \pm \lambda \frac{\hbar}{2m\omega} = 2\hbar\omega \mp \frac{\lambda}{2k}\hbar\omega$$

La perturbazione rompe completamente la degenerazione del livello $E_1^{(0)}$

Esercizio (5)

Subito dopo la misura di $S_z$ con risultato $\hbar/2$ la particella si trova nello stato

$$|\psi(0)\rangle = |+\rangle_z \qquad \text{dove} \qquad S_z |\pm\rangle_z = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle_z$$

L'Hamiltoniana della particella è

$$H = -\underline{\mu} \cdot \underline{B} = +\mu_0 \underline{S} \cdot \underline{B} = +\mu_0 B S_x$$

Pertanto, per calcolare lo stato al tempo $t>0$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} H t} |\psi(0)\rangle$$

occorre esprimere $|+\rangle_z$ in termini degli autostati $|\pm\rangle_x$ di $S_x$ : $S_x |\pm\rangle_x = \pm\frac{\hbar}{2} |\pm\rangle_x$

Ricordando le rappresentazioni nella base $\{|+\rangle_z, |-\rangle_z\}$

$$S_z \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \qquad |+\rangle_z \to \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |-\rangle_z \to \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$S_x \to \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \qquad |+\rangle_x \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad |-\rangle_x \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$S_y \to \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}\frac{\hbar}{2} \qquad |+\rangle_y \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \qquad |-\rangle_y \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

abbiamo

$$|+\rangle_z = \left(|+\rangle_x\, {}_x\langle +| + |-\rangle_x\, {}_x\langle -|\right) |+\rangle_z$$

$$= {}_x\langle +|+\rangle_z \; |+\rangle_x + {}_x\langle -|+\rangle_z \; |-\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle_x + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle_x$$

$$|\psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x \pm \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x\right)$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\mu_0 B \frac{\hbar}{2} t}\frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle_x + e^{+\frac{i}{\hbar}\mu_0 B \frac{\hbar}{2} t}\frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle_x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega t}|+\rangle_x + e^{+i\omega t}|-\rangle_x\right)$$

dove $\omega \equiv \mu_0 \frac{B}{2}$

Una misura di $S_y$ al tempo $t>0$ non può che fornire i risultati $\pm\frac{\hbar}{2}$ con probabilità

$$P_\pm(t) = \left|{}_y\langle \pm | \psi(t)\rangle\right|^2$$

$$P_+(t) = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,(1,-i)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t} \\ e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\end{pmatrix}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}\left(\left(e^{-i\omega t} + e^{+i\omega t}\right) - i\left(e^{-i\omega t} - e^{+i\omega t}\right)\right)\right|^2$$

$$= \left|\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right|^2 \frac{1}{2}$$

$$= \left(1 - 2\cos(\omega t)\sin(\omega t)\right)\frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \sin(2\omega t)\right)$$

Segue $\quad p_-(t) = \frac{1}{2}\left(1 + \sin(2\omega t)\right)$

Esercizio 6

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_V d\underline{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{p}\; e^{-\beta \frac{p^2}{2m}}$$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\; e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\right)^3$$

$$= \frac{V}{h^3}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$\frac{E}{N} = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1 = -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(-\frac{3}{2}\log\beta\right) = \frac{3}{2}\frac{1}{\beta} = \frac{3}{2}K_B T$$

indipendente da $\frac{N}{V}$ e $\lim_{T\to 0}\frac{E}{N} = 0$

$$\langle v_x\rangle = \frac{\frac{1}{h^3}\int_V d\underline{q}\int_{\mathbb{R}^3} d\underline{p}\; e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}\; v_x}{Z_1}$$

$$= \frac{\frac{1}{m}\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\; p_x\, e^{-\frac{\beta p_x^2}{2m}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_y\; e^{-\beta\frac{p_y^2}{2m}}\right)^2}{\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}}$$

$$= \frac{\frac{1}{m}\,\frac{2m}{\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} du\; u e^{-u^2}}{\sqrt{\frac{2\pi m}{\beta}}} = 0 \qquad \sqrt{\frac{\beta}{2m}}\,p_x = u$$

analogamente $\langle v_y\rangle = \langle v_z\rangle = 0$ quindi $\langle \underline{v}\rangle = 0$

La densità di probabilità nello spazio $(\underline{q},\underline{p})$ è

$$\rho(\underline{q},\underline{p}) = \frac{1}{Z_1}e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$$

quindi la densità di probabilità $w(p)$ è

$$w(p) \propto p^2 e^{-\beta\frac{p^2}{2m}}$$

$$w(v) = C \quad v^2 e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$$

$$1 = \int_0^\infty w(v)\,dv = C \int_0^\infty v^2 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}\,dv$$

$$= C \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \int_0^\infty t^2 e^{-t^2} dt \qquad \sqrt{\frac{\beta m}{2}}\, v = t$$

$$= C \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad \Rightarrow \quad C = \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{3/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}}$$

$$\langle v \rangle = \int_0^\infty dv \quad v \; w(v)$$

$$= \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{3/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dv \;\; v^3 e^{-\frac{\beta m v^2}{2}}$$

$$= \left(\frac{\beta m}{2}\right)^{3/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{\frac{4}{2}} \int_0^\infty dt \;\; t^3 e^{-t^2}$$

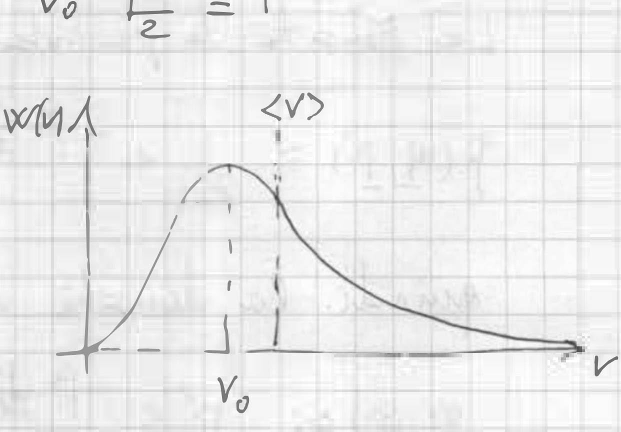
$$= \left(\frac{2}{\beta m}\right)^{1/2} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \; \frac{1}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{\beta m \pi}} = \sqrt{\frac{8 K_B T}{\pi m}}$$

$$\frac{d}{dv} w(v) = C \left(2v - v^2 \frac{\beta m}{2} 2v\right) e^{-\beta \frac{mv^2}{2}}$$

$$\frac{d}{dv} w(v) = 0 \quad \Rightarrow \quad v = 0 \,, \quad v_0^2 \frac{\beta m}{2} = 1$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{\beta m}} = \sqrt{\frac{2 K_B T}{m}}$$




Nota che $\langle v \rangle > v_0$

Se le particelle sono fermioni a spin $1/2$ e $T=0$

$$N = \mathcal{N}(\varepsilon_F) = \frac{2}{h^3} \int_V d\underline{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\underline{p} \; \theta\left(\varepsilon_F - \frac{p^2}{2m}\right)$$

$$= \frac{2}{h^3} V \frac{4\pi}{3} \left(2m\varepsilon_F\right)^{3/2} \qquad\qquad \mathcal{N}(\varepsilon) = \frac{8\pi V}{3h^3}\left(2m\varepsilon\right)^{3/2}$$

$$E = \int_0^{\varepsilon_F} \frac{d\mathcal{N}(\varepsilon)}{d\varepsilon} \, \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{8\pi V}{3h^3} \, \frac{3}{2} \left(2m\varepsilon\right)^{1/2} 2m \, \varepsilon \, d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^3} \, \frac{3}{2} \left(2m\right)^{3/2} \int_0^{\varepsilon_F} \varepsilon^{3/2} d\varepsilon$$

$$= \frac{8\pi V}{3h^3} \, \frac{3}{2} \left(2m\right)^{3/2} \frac{2}{5} \varepsilon_F^{5/2} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \, N$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \varepsilon_F \qquad\qquad \left(2m\varepsilon_F\right)^{3/2} = \frac{N}{V} \frac{3h^3}{8\pi}$$

$$\varepsilon_F = \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3} \left(\frac{3h^3}{8\pi}\right)^{2/3} \frac{1}{2m}$$

$$= \left(3\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

$$\frac{E}{N} = \frac{3}{5} \left(2\pi^2\right)^{\frac{2}{3}} \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

dipende dalla densità ed è diverso da 0.