MECCANICA QUANTISTICA E MECCANICA STATISTICA
A.A. 2017/2018 – Prof. C. Presilla

Prova A1 – 30 gennaio 2018

Cognome	
Nome	
Matricola	

penalità										

esercizio	voto
1	
2	
3	
4	
5	
6	

1 Sia ξ un operatore autoaggiunto e $|A\rangle$ un vettore normalizzato. Posto $(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2$, dimostrare che $\Delta\xi = 0$ se e solo se $|A\rangle$ è un autovettore di ξ.

[punteggio 4]

---

2 Siano α e β due osservabili che commutano entrambe con l'osservabile ξ ma non commutano tra di loro:

$$[\alpha, \xi] = 0, \qquad [\beta, \xi] = 0, \qquad [\alpha, \beta] \neq 0.$$

Dimostrare che ξ è un'osservabile degenere.

[punteggio 4]

---

3 Un sistema quantistico all'equilibrio con una riserva termica a temperatura T è formato da due sottosistemi. Assumendo che l'hamiltoniana del sistema sia $H = H_1 + H_2$, dove H_1 e H_2 sono le hamiltoniane dei due sottosistemi, dimostrare che l'entropia del sistema è additiva, cioè $S = S_1 + S_2$.

[punteggio 4]

---

4 Un sistema, il cui spazio di Hilbert ha dimensione 3, è descritto dalla hamiltoniana

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Si considerino le seguenti due osservabili

$$A = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\mathrm{i} \\ 0 & 2 & 0 \\ \mathrm{i} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

All'istante $t = 0$ viene eseguita una misura di A trovando il valore a. Sia $|\psi_0\rangle$ lo stato del sistema subito dopo tale misura. Determinare:
1) il valore di aspettazione di A al tempo t;
2) i possibili risultati di una misura di B al tempo t e le corrispondenti probabilità;
3) la variazione dell'energia dello stato fondamentale di H, al primo ordine perturbativo, quando ad H viene aggiunto il termine $\hbar\omega B$.

[punteggio 7]

---

5 Un sistema quantistico (rotatore) è descritto dall'hamiltoniana

$$H = \frac{L^2}{2I} + gBL_z,$$

dove $\boldsymbol{L}$ è il momento angolare orbitale, I il momento di inerzia, B il modulo di un campo magnetico esterno diretto lungo l'asse z che si accoppia con il momento magnetico $g\boldsymbol{L}$.
1) Determinare lo stato $|\psi_0\rangle$ del sistema sapendo che a) una misura di L^2 su $|\psi_0\rangle$ fornisce con certezza il risultato $2\hbar^2$ e b) una misura di $(L_x + L_z)/\sqrt{2}$ su $|\psi_0\rangle$ fornisce con certezza il risultato $\hbar$.
2) Assumendo $|\psi_0\rangle$ come lo stato del sistema al tempo $t = 0$, determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$.
3) Determinare il valore di aspettazione di L_x in funzione del tempo.
Si ricordi che

$$L_\pm = L_x \pm \mathrm{i}L_y, \qquad L_\pm|l,m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}\,|l, m \pm 1\rangle.$$

[punteggio 7]

---

6 Si consideri un gas ideale di N particelle di massa m, vincolate all'interno di un cilindro di altezza L e raggio R. L'hamiltoniana di singola particella è

$$H = \frac{|\boldsymbol{p}|^2}{2m} + mgz,$$

dove z è la quota dalla base del cilindro e g l'accelerazione di gravità, assunta costante. Nell'ipotesi di equilibrio termico a temperatura T e considerando le particelle come classiche, calcolare, al primo ordine nell'approssimazione $k_{\mathrm{B}}T \ll mgL$:
1) la pressione $P(z)$ del gas alla quota z;
2) l'energia media E del gas.
Considerando invece le N particelle come fermioni di spin 1/2 a temperatura $T = 0$, e nell'ipotesi che N sia sufficientemente piccolo così che $\epsilon_{\mathrm{F}} \leq mgL$, calcolare:
3) l'energia di Fermi ϵ_{F};
4) l'energia media E del gas.

[punteggio 7]

Esercizio 1

Se $\xi|A\rangle = \xi'|A\rangle$ allora $\xi^2|A\rangle = \xi'^2|A\rangle$

quindi $\langle A|\xi|A\rangle = \xi'\langle A|A\rangle = \xi'$

$\langle A|\xi^2|A\rangle = \xi'^2\langle A|A\rangle = \xi'^2$

cioè $(\Delta\xi)^2 = \langle A|\xi^2|A\rangle - \langle A|\xi|A\rangle^2 = \xi'^2 - \xi'^2 = 0$

Viceversa se $\Delta\xi = 0$ si ha

$$0 = (\Delta\xi)^2 = \langle A|\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)^2|A\rangle =$$

$$= \langle A|\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)^\dagger\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle$$

$$= \left\|\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle\right\|^2$$

cioè $\left(\xi - \langle A|\xi|A\rangle\right)|A\rangle = 0$

ovvero $\xi|A\rangle = \langle A|\xi|A\rangle\,|A\rangle$

Esercizio 2

Se ξ fosse non degenere, poichè $[\alpha, \xi] = [\beta, \xi] = 0$, ogni autovettore $|A\rangle$ di ξ sarebbe anche autovettore di α e β.

Allora α e β avrebbero un sistema comune di autovettori che è possibile se e solo se $[\alpha, \beta] = 0$

Assurdo.

Esercizio 3

$$\rho = \rho_1 \rho_2 = \frac{e^{-\beta H}}{Z} = \frac{e^{-\beta H_1}}{Z_1} \frac{e^{-\beta H_2}}{Z_2}$$

$$Z_1 = \mathrm{tr}_1\, e^{-\beta H_1} \qquad Z_2 = \mathrm{tr}_2\, e^{-\beta H_2}$$

$$Z = Z_1 Z_2 = \mathrm{tr}\, e^{-\beta H}$$

$$S = \langle \log \rho \rangle = \frac{1}{Z} \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H} \log \rho \right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \mathrm{tr}\left(e^{-\beta H_1} e^{-\beta H_2} \left(\log \rho_1 + \log \rho_2 \right) \right)$$

$$= \frac{1}{Z_1 Z_2} \Big[\mathrm{tr}_1 \left(e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) \mathrm{tr}_2 \left(e^{-\beta H_2} \right)$$

$$+ \mathrm{tr}_1 \left(e^{-\beta H_1} \right) \mathrm{tr}_2 \left(e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right) \Big]$$

$$= \frac{1}{Z_1} \mathrm{tr}_1 \left(e^{-\beta H_1} \log \rho_1 \right) + \frac{1}{Z_2} \mathrm{tr}_2 \left(e^{-\beta H_2} \log \rho_2 \right)$$

$$= S_1 + S_2$$

Esercizio 4

Poiché H, A, B sono osservabili cioè operatori autoaggiunti deve essere $\omega, a, b \in \mathbb{R}$ assumiamo $\omega > 0$

spettro di H

$$\hbar\omega \qquad 0 \qquad -\hbar\omega$$

$$|1,0,0\rangle \qquad |0,1,0\rangle \qquad |0,0,1\rangle$$

spettro di A

$$2a \qquad a \qquad -a$$

$$|0,1,0\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}|-i,0,1\rangle \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}|i,0,1\rangle$$

spettro di B

$$0 \qquad b\sqrt{2} \qquad -b\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|1,-1,0\rangle \qquad \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle \qquad \left|-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|-i,0,1\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}|1,0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|0,0,1\rangle$$

$$|\psi,t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_0\rangle$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|1,0,0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|0,0,1\rangle$$

$$A\,|\psi,t\rangle = -a\begin{pmatrix}0 & 0 & -i\\ 0 & 2 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$+a\begin{pmatrix}0 & 0 & -i\\ 0 & 2 & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$= -\frac{ia}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} + \frac{a}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\begin{pmatrix}-i\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\langle\psi,t|A\,|\psi,t\rangle = \left(+\frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}\langle 1,0,0| + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\langle 0\,0\,1|\right)$$

$$\left(+\frac{a}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}|0\,0\,1\rangle - \frac{ia}{\sqrt{2}}e^{i\omega t}|1\,0\,0\rangle\right)$$

$$= +\frac{a}{2}e^{-2i\omega t} + \frac{a}{2}e^{2i\omega t}$$

$$= a\cos(2\omega t)$$

Misurando B i risultati possibili sono

0 con prob $= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1,-1,0|\psi,t\rangle\right|^2$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{-i\,e^{-i\omega t}}{\sqrt{2}}\right|^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}\right|^2 = \frac{1}{4}$$

$b\sqrt{2}$ con prob $= \left| \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} | \psi, t \rangle \right|^2$

$$= \left| \frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right|^2$$

$$= \left(\frac{-i}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{2} e^{i\omega t} \right) \left(\frac{i}{2\sqrt{2}} e^{i\omega t} + \frac{1}{2} e^{-i\omega t} \right)$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{-i2\omega t} + \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{2i\omega t}$$

$$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\omega t) = \frac{3}{8} \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(2\omega t) \right)$$

$-b\sqrt{2}$ con prob $= \left| \langle -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}} | \psi, t \rangle \right|^2$

$$= \left| \frac{i}{2\sqrt{2}} e^{-i\omega t} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t} \right|^2$$

$$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{-2i\omega t} - \frac{i}{4\sqrt{2}} e^{2i\omega t}$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin(2\omega t) = \frac{3}{8} \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin(2\omega t) \right)$$

al primo ordine perturbativo

$$-\hbar\omega \to -\hbar\omega + \langle 0\,0\,1 | \hbar\omega B | 0\,0\,1 \rangle$$

$$= -\hbar\omega + (0, 0, 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hbar\omega b$$

$$= -\hbar\omega + \hbar\omega b \cdot 0$$

$$= -\hbar\omega$$

Nota bene:

se $A = a \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}$

gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$\det(A - \lambda I) = 0$

cioè $\det\left(a \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

$= \det \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -ia \\ 0 & 2a-\lambda & 0 \\ ia & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} = 0$

non $\det\left(a \begin{pmatrix} 0-\lambda & 0 & -i \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ i & 0 & 0-\lambda \end{pmatrix} \right) = 0$

come molti hanno scritto!

Esercizio 5

$$L^2 \, |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) \, |l, m\rangle \qquad l = 0, 1, 2, \dots$$
$$L_z \, |l, m\rangle = \hbar m \, |l, m\rangle \qquad -l \leq m \leq l$$

a) $|\psi_0\rangle$ deve essere uno stato con $l = 1$

$$|\psi_0\rangle = \alpha \, |1, 1\rangle + \beta \, |1, 0\rangle + \gamma \, |1, -1\rangle$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z) \, |\psi_0\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}(L_+ + L_- + 2L_z) \, |\psi_0\rangle$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}(L_+ + L_- + 2L_z) \, \alpha \, |1 1\rangle$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(L_+ + L_- + 2L_z) \, \beta \, |1, 0\rangle$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}}(L_+ + L_- + 2L_z) \, \gamma \, |1, -1\rangle$$

$$= \frac{\alpha\hbar}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} \, |1, 0\rangle + 2 \, |1 1\rangle\right)$$
$$+ \frac{\beta\hbar}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} \, |1, 1\rangle + \sqrt{2} \, |1, -1\rangle\right)$$
$$+ \frac{\gamma\hbar}{2\sqrt{2}}\left(\sqrt{2} \, |1, 0\rangle - 2 \, |1, -1\rangle\right)$$

$$= |1 1\rangle \left(\frac{\alpha\hbar}{\sqrt{2}} + \frac{\beta\hbar}{2}\right) + |1, 0\rangle \left(\frac{\alpha\hbar}{2} + \frac{\gamma\hbar}{2}\right)$$
$$+ |1, -1\rangle \left(\frac{\beta\hbar}{2} - \frac{\gamma\hbar}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \hbar \, |\psi_0\rangle$$

$$= \hbar\alpha \, |1 1\rangle + \hbar\beta \, |1, 0\rangle + \hbar\gamma \, |1 -1\rangle$$

$|\psi_0\rangle$ deve essere autostato di $\frac{1}{\sqrt{2}}(L_x + L_z)$ con autovalore $\hbar$

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{\sqrt{2}} + \frac{\beta}{2} = \alpha \\ \frac{\alpha}{2} + \frac{\gamma}{2} = \beta \\ \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} = \gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} (2-\sqrt{2})\alpha - \beta = 0 \\ \alpha - 2\beta + \gamma = 0 \\ (2+\sqrt{2})\gamma - \beta = 0 \end{cases}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2-\sqrt{2}} \qquad \gamma = \frac{\beta}{2+\sqrt{2}} \qquad \alpha + \gamma = 2\beta$$

β determinato dalla normalizzazione

$$|\psi_0\rangle = \beta\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}|1,1\rangle + |1,0\rangle + \frac{1}{2+\sqrt{2}}|1,-1\rangle\right)$$

$$1 = \langle\psi_0|\psi_0\rangle = \left(\left(\frac{1}{2-\sqrt{2}}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)^2\right)|\beta|^2$$

$$= 4|\beta|^2$$

scegliamo $\beta = \frac{1}{2}$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle + \frac{1}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle$$

$$H\,|l,m\rangle = \left(\frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} + gB\hbar m\right)|l,m\rangle$$

$$= E_{lm}\,|l,m\rangle$$

$$E_{lm} = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2I} + gB\hbar m$$

$$|\psi_t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht}|\psi_0\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}E_{11}t}\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + e^{-\frac{i}{\hbar}E_{10}t}\frac{1}{2}|1,0\rangle$$

$$+ e^{-\frac{i}{\hbar}E_{1-1}t}\frac{1}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle$$

$$= e^{-\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar^2 2}{2I}t}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}gB\hbar t}\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle\right.$$

$$\left.+ e^{-\frac{i}{\hbar}gB0t}\frac{1}{2}|1,0\rangle + e^{+\frac{i}{\hbar}gBt\hbar}\frac{1}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle\right)$$

$$= e^{-i\frac{\hbar t}{I}}\left(e^{-igBt}\frac{1}{2(2-\sqrt{2})}|1,1\rangle + \frac{1}{2}|1,0\rangle\right.$$

$$\left.+ e^{igBt}\frac{1}{2(2+\sqrt{2})}|1,-1\rangle\right)$$

$$L_x|\psi_t\rangle = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)|\psi_t\rangle$$

$$= e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\hbar\sqrt{2}\,|1,1\rangle + \frac{e^{igBt}}{2(2+\sqrt{2})}\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle\right.$$

$$\left.+ \frac{e^{-igBt}}{2(2-\sqrt{2})}\hbar\sqrt{2}\,|1,0\rangle + \frac{1}{2}\hbar\sqrt{2}\,|1,-1\rangle\right)$$

$$= e^{-i\frac{\hbar}{I}t}\frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\left(|1,1\rangle + \left(\frac{e^{igBt}}{2+\sqrt{2}} + \frac{e^{-igBt}}{2-\sqrt{2}}\right)|1,0\rangle\right.$$

$$\left.+ |1,-1\rangle\right)$$

$$\langle \psi_t | L_x | \psi_t \rangle = \frac{e^{igBt}}{2(2-\sqrt{2})} \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{\hbar}{2\sqrt{2}} \left(\frac{e^{igBt}}{2+\sqrt{2}} + \frac{e^{-igBt}}{2-\sqrt{2}} \right)$$

$$+ \frac{e^{-igBt}}{2(2+\sqrt{2})} \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \left(e^{igBt} \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right) \right.$$

$$\left. + e^{-igBt} \left(\frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2+\sqrt{2}} \right) \right)$$

$$= \frac{\hbar}{4\sqrt{2}} \left(2 e^{igBt} + 2 e^{-igBt} \right)$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \cos(gBt)$$

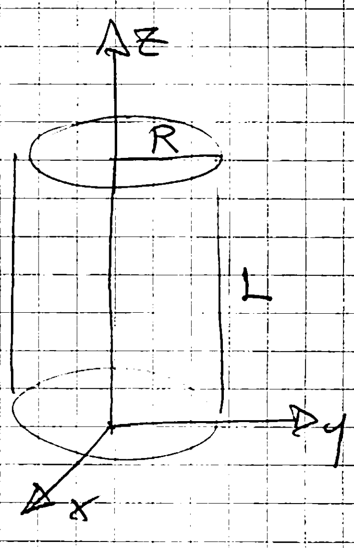
Esercizio 6

Equazione di stato del gas perfetto applicata al volumetto $d^3\underline{q}$ intorno al punto $\underline{q}$

$$P(\underline{q})\, d^3\underline{q} = dN(\underline{q})\, k_B T$$

$$dN(\underline{q}) = N \frac{e^{-\beta V(\underline{q})}\, d^3\underline{q}}{\int e^{-\beta V(\underline{q})}\, d^3\underline{q}}$$

$$P(\underline{q}) = N k_B T \frac{e^{-\beta V(\underline{q})}}{\int e^{-\beta V(\underline{q})}\, d^3\underline{q}}$$



$$P(z) = N k_B T \frac{e^{-\beta V(z)}}{\int_0^L e^{-\beta V(z)}\, dz\, \pi R^2}$$

$$= N k_B T \frac{e^{-\beta m g z}}{\int_0^L e^{-\beta m g z}\, dz\, \pi R^2} \qquad \beta m g z = u$$

$$= \frac{N k_B T}{\pi R^2} \frac{e^{-\beta m g z}}{\int_0^{L\beta m g} e^{-u} \frac{du}{\beta m g}}$$

$$= \frac{N \cancel{k_B T}\, \cancel{\beta} m g}{\pi R^2} \frac{e^{-\beta m g z}}{1 - e^{-\beta m g L}} \qquad \beta m g L \gg 1$$

$$\simeq \frac{N m g}{\pi R^2} e^{-\beta m g z}$$

$$Z_1 = \frac{1}{h^3}\int_0^L \pi R^2 dz \int dp_x\, dp_y\, dp_z\, e^{-\beta\left(\frac{p_x^2}{2m}+\frac{p_y^2}{2m}+\frac{p_z^2}{2m}+mgz\right)}$$

$$= \frac{1}{h^3}\,\pi R^2 \int_0^L dz\, e^{-\beta mgz}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} dp_x\, e^{-\beta\frac{p_x^2}{2m}}\right)^3$$

$$= \frac{1}{h^3}\,\frac{\pi R^2}{\beta mg}\left(1-e^{-\beta mgL}\right)\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2} \qquad \beta mgL \gg 1$$

$$\simeq \frac{1}{h^3}\,\frac{\pi R^2}{mg\beta}\left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{3/2}$$

$$E = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z = -\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1^N = -N\frac{\partial}{\partial\beta}\log Z_1$$

$$= N\left(\beta^{-1}+\frac{3}{2}\beta^{-1}\right)$$

$$= N\,\frac{5}{2}k_B T$$

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^3} \int d^3\underline{q} \int d^3\underline{p} \; \delta\left(\varepsilon - \frac{p^2}{2m} - mgz\right)$$

$$f(p) \equiv \varepsilon - \frac{p^2}{2m} - mgz$$

$$\delta(f(p)) = \sum_i \frac{1}{|f'(p_i)|} \, \delta(p - p_i)$$

p_i radici di $f(p) = 0$

$$f(p) = 0 \Rightarrow p = \pm p_0 \qquad p_0 = \sqrt{2m(\varepsilon - mgz)}$$

$$f'(p) = -\frac{p}{m}$$

$$G(\varepsilon) = \frac{2}{h^3} \int_0^L \pi R^2 dz \int_0^\infty 4\pi p^2 dp \; \frac{m}{p_0} \left(\delta(p - p_0) + \delta(p + p_0) \right)$$

$$= \frac{2}{h^3} \, 4\pi \pi R^2 \int_0^L dz \; m \, p_0(z) \, \theta(\varepsilon - mgz) \, \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2 m}{h^3} \int_0^{\min(L, \varepsilon/mg)} dz \; \sqrt{2m(\varepsilon - mgz)} \; \theta(\varepsilon)$$

poiché $\varepsilon \leq \varepsilon_F < \max_{z \in [0,L]} V(z) = mgL$

$$\min\left(L, \frac{\varepsilon}{mg}\right) = \frac{\varepsilon}{mg}$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2 m \sqrt{2m}}{h^3} \int_0^{\varepsilon/mg} dz \; \sqrt{\varepsilon - mgz} \quad \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2}{2h^3} (2m)^{3/2} \left(-\frac{2}{3mg} (\varepsilon - mgz)^{3/2} \right) \Big|_0^{\varepsilon/mg} \theta(\varepsilon)$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2}{3h^3 mg} (2m\varepsilon)^{3/2} \, \theta(\varepsilon)$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon) = \int^{\varepsilon} G(\varepsilon')\, d\varepsilon' = \frac{8\pi^2 R^2}{3h^3 mg} \int_0^{\varepsilon} (2m\varepsilon')^{3/2}\, d\varepsilon'$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2}{3h^3 mg} \frac{2}{5} (2m\varepsilon)^{5/2} \frac{1}{2m}$$

$$= \frac{8\pi^2 R^2}{15\, h^3 m^2 g} (2m\varepsilon)^{5/2}$$

$$= A\ \varepsilon^{5/2} \qquad A \equiv \frac{32\sqrt{2}}{15} \frac{\pi^2 R^2 \sqrt{m}}{h^3 g}$$

$$\mathcal{N}(\varepsilon_F) = N \qquad A\, \varepsilon_F^{5/2} = N \qquad \varepsilon_F = \left(\frac{N}{A}\right)^{2/5}$$

$$\langle E \rangle = \int_0^{\varepsilon_F} G(\varepsilon)\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{d}{d\varepsilon}\left(A\, \varepsilon^{5/2}\right) \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \int_0^{\varepsilon_F} \frac{5}{2} A\, \varepsilon^{3/2}\, \varepsilon\, d\varepsilon$$

$$= \frac{5}{2} A\, \frac{2}{7} \varepsilon_F^{7/2} = \frac{5}{7} A\, \varepsilon_F^{5/2}\, \varepsilon_F = \frac{5}{7} \varepsilon_F\, N$$