

Interazioni deboli

- **Decadimento beta.**
- **Violazione della parità nelle int. deboli**
- **Teoria a due componenti del neutrino.**
- **Esperimento di Goldhaber.**
- **Interazione V-A.**
- **Il bosone W.**
- **Angolo di Weinberg.**
- **Decadimento del pione carico.**
- **Decadimento del K carico in muone.**
- **Angolo di Cabibbo.**
- **Organizzazione delle particelle in doppietti di isospin.**
- **Effetto GIM.**
- **Introduzione del quark charm.**
- **Matrice CKM.**

Le interazioni deboli

- Ricordiamo le vite medie di alcuni decadimenti:

$\Delta^{++} \rightarrow p\pi$	$\sim 10^{-23} \text{ s}$	Int. forte
$\Sigma^0 \rightarrow \Lambda\gamma$	$\sim 6 \cdot 10^{-20} \text{ s}$	1 γ , int. e.m.
$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$	$\sim 10^{-16}$	2 γ , int. e.m.
$\Sigma \rightarrow n\pi$	$\sim 10^{-10} \text{ s}$	} <u>Int. deboli</u>
$\pi^- \rightarrow \mu^- \nu_\mu$	$\sim 10^{-8} \text{ s}$	
$\mu^- \rightarrow e^- \nu_e \nu_\mu$	$\sim 10^{-6} \text{ s}$	
$n \rightarrow p e^- \nu_e$	$\sim 15 \text{ min}$	

Int. deboli

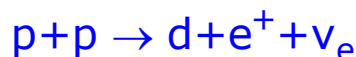
N.B. le interazioni deboli si osservano solo quando le int. forti e le int. e.m. sono proibite.

- Occorre spiegare l'enorme intervallo delle vite medie che va da 10^{-12} s fino ad un quarto d'ora.
- Le interazioni deboli sono anche caratterizzate da sezioni d'urto estremamente piccole ($\sim 10^{-39} \text{ cm}^2$)

$$\sigma(\nu_\mu + N \rightarrow N + \pi + \mu) = 10^{-38} \text{ cm}^2 \text{ a } 1 \text{ GeV}$$

$$\sigma(\pi + N \rightarrow N + \pi) = 10^{-26} \text{ cm}^2 \text{ a } 1 \text{ GeV}$$

- Le interazioni deboli violano molte leggi di conservazione (parità, coniugazione di carica, stranezza, etc.)
- Per via della loro "debolezza", le int. deboli si possono osservare nella materia "normale" solo nel decadimento β . Tuttavia esse sono alla base del funzionamento delle stelle e quindi, senza di loro, non sarebbe possibile la nostra esistenza.

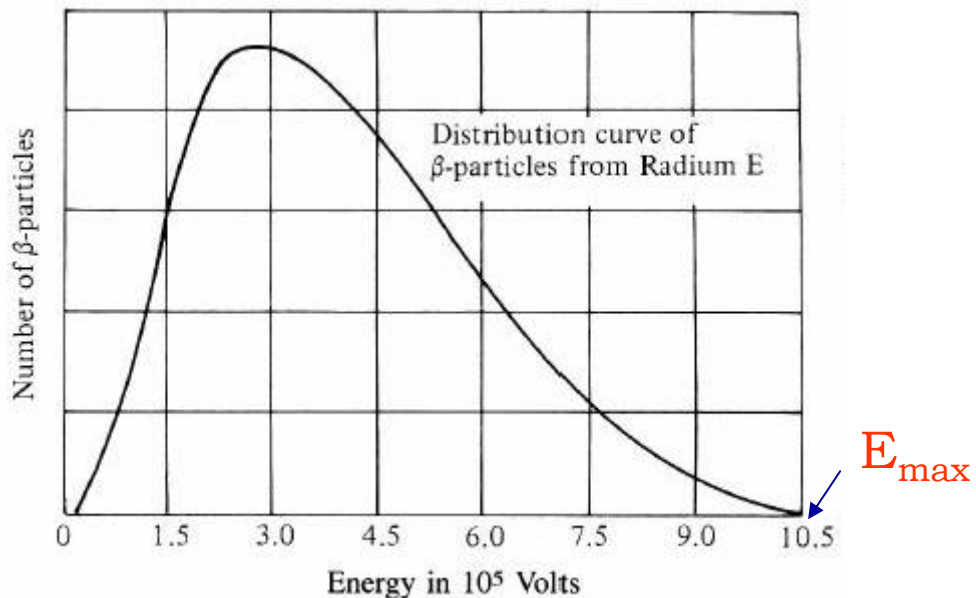


Decadimento β

- Gran parte delle conoscenze relative ai processi base del decadimento β è basata sui decadimenti β dei nuclei



- l'esistenza del decadimento β^+ fu stabilita nel 1934 da Curie e Joliot
- Nel 1919 Chadwick scoprì che l'elettrone nel decadimento β aveva uno spettro continuo.



- L'energia massima dello spettro corrisponde abbastanza bene al Q della reazione ($Q = M(A, Z) - M(A, Z+1)$), mentre per il resto dello spettro vi è una violazione della conservazione dell'energia.
- C'è inoltre anche una violazione della quantità di moto e del momento angolare.

“Creazione” del neutrino

- Per ristabilire le leggi di conservazione, Pauli ipotizzò nel 1930 l'esistenza di una particella neutra di massa molto piccola: il neutrone (ribattezzato poi da Fermi neutrino).

December 1930: public letter sent by W. Pauli to a physics meeting in Tübingen

Zürich, Dec. 4, 1930

Dear Radioactive Ladies and Gentlemen,

...because of the “wrong” statistics of the N and ${}^6\text{Li}$ nuclei and the continuous β -spectrum, I have hit upon a desperate remedy to save the law of conservation of energy. Namely, the possibility that there could exist in the nuclei electrically neutral particles, that I wish to call neutrons, which have spin $\frac{1}{2}$ and obey the exclusion principle The mass of the neutrons should be of the same order of magnitude as the electron mass and in any event not larger than 0.01 proton masses. The continuous β -spectrum would then become understandable by the assumption that in β -decay a neutron is emitted in addition to the electron such that the sum of the energies of the neutron and electron is constant.

..... For the moment, however, I do not dare to publish anything on this idea

So, dear Radioactives, examine and judge it. Unfortunately I cannot appear in Tübingen personally, since I am indispensable here in Zürich because of a ball on the night of 6/7 December.

W. Pauli

NOTES

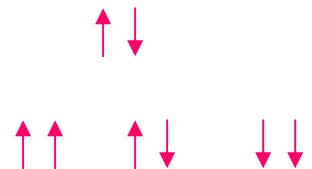
- Pauli's neutron is a light particle \Rightarrow not the neutron that will be discovered by Chadwick one year later
- As everybody else at that time, Pauli believed that if radioactive nuclei emit particles, these particles must exist in the nuclei before emission

- Questa lettera è molto importante per la fisica ... ed anche interessante da un punto di vista sociologico 😊
- La prima teoria sul decadimento β fu fatta da Fermi nel 1934
- Il neutrino fu scoperto da Reines e Cowan “soltanto” nel 1958
- Esistono tre tipi di neutrini, e di recente sono state osservate delle oscillazioni di neutrino che comportano che il neutrino debba avere una massa diversa da zero 4

Il decadimento β nucleare

- I decadimenti β nucleari vengono distinti in transizioni permesse ed in transizioni proibite.
- Quelle permesse rappresentano la situazione più comune e sono caratterizzate dal fatto che l'elettrone ed il neutrino emessi NON trasportano momento angolare orbitale, sono emessi cioè in onda s ($l=0$). Questo è giustificabile dal fatto che l'elettrone ed il neutrino hanno in genere energie dell'ordine del MeV.
- Le transizioni con $l=1$ si chiamano prime proibite, $l=2$ secondo proibite e così via, ed hanno una vita media considerevolmente più lunga rispetto a quelle permesse.
- Dato che e e ν hanno spin $\frac{1}{2}$, il cambiamento di spin del nucleo può essere 0 o 1. Le transizioni con $\Delta J=0$ si chiamano di Fermi mentre quelle con $\Delta J=1$ sono di Gamow-Teller

transizioni	ΔJ nucleo	Stato leptonic
Fermi	$\Delta J=0$	singoletto
Gamow-Teller	$\Delta J=1$ $\Delta J_z=0, \pm 1$	tripletto

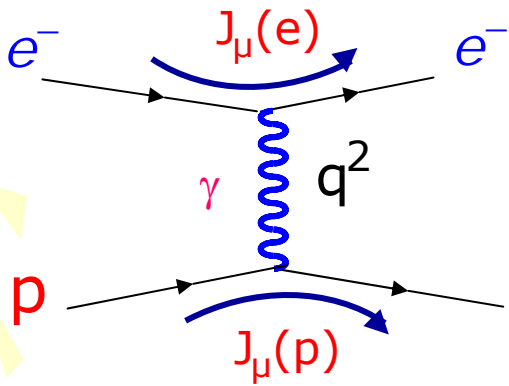


- Poiché e - ν hanno $l=0$, non c'è cambiamento nel momento angolare orbitale del nucleo, quindi la sua parità non cambia. Avviene solo uno spin flip del nucleone per le transizioni di G.T.

Fermi: $0^+ \rightarrow 0^+, \Delta \bar{J} = 0$ $^{10}\text{C} \rightarrow ^{10}\text{B}^* e^- \bar{\nu}_e$ $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^* e^+ \nu_e$	Gamow T. $1^+ \rightarrow 0^+, \Delta \bar{J} = 1$ $^{12}\text{B} \rightarrow ^{12}\text{C} e^- \bar{\nu}_e$
	Miste $\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+, \Delta \bar{J} = 0, 1$ $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$

Teoria di Fermi del decadimento β

- Nel 1934 Fermi fece la prima teoria del decadimento β ; egli prese come modello la descrizione fatta dalla QED dello scattering elettrone-protone:

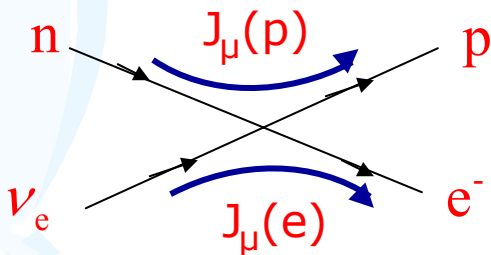


L'elemento di matrice è proporzionale a:

$$M_{fi} \approx -\frac{1}{q^2} J_\mu(e) J^\mu(p)$$

$$M_{fi} \approx (\bar{u}_e \sqrt{\alpha} \gamma^\mu u_e) \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} (\bar{u}_p \sqrt{\alpha} \gamma^\nu u_p)$$

- Il decadimento β $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$ è equivalente a: $n + \nu \rightarrow p + e^-$
- Fermi ipotizzò un'interazione puntiforme del tipo:



$$n + \nu \rightarrow p + e^-$$

➔ Non c'è il propagatore

- interazione tra due correnti (cariche): adronica e leptonica

$$M_{fi} \approx G (\bar{u}_p \gamma^\mu u_n) (\bar{u}_e \gamma_\mu u_\nu)$$

Interazione vettore-vettore

- La costante G è nota come costante di Fermi ed è collegata al quadrato della "carica debole".

- \bar{u}_p crea un protone (oppure distrugge un antiprotone)
- u_n distrugge un neutrone (crea un antineutrone)
- \bar{u}_e crea un elettrone (distrugge un positrone)
- u_ν distrugge un neutrino (crea un antineutrino)

Decadimento β nucleare

- La probabilità di transizione o tasso di decadimento per unità di tempo si trova applicando la regola d'oro di Fermi:

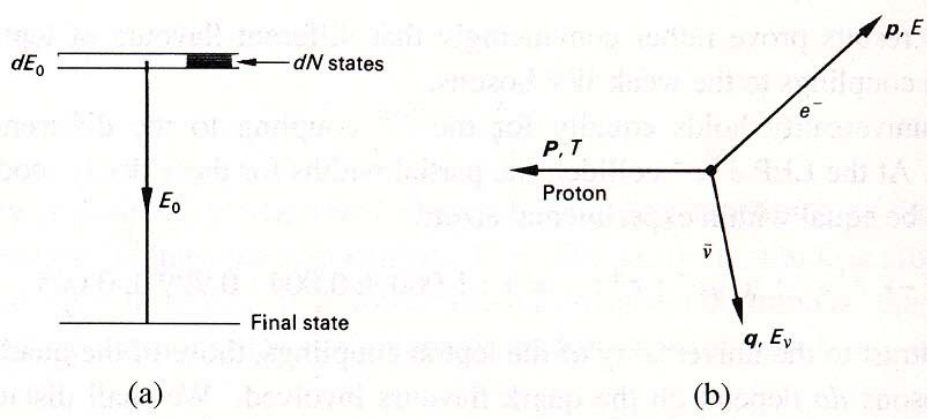
$$W = \frac{2\pi}{\hbar} G^2 |M|^2 \frac{dN}{dE_0}$$

$$\frac{dN}{dE_0} : \text{spazio delle fasi}$$

$|M|^2$ è il quadrato dell'elemento di matrice. Esso si calcola integrando su tutti gli angoli delle particelle finali, sommando sugli spin finali e mediando sugli spin iniziali. Esso è una costante dell'ordine dell'unità.

decadimenti di Fermi: $J_{\text{leptoni}}=0 \Rightarrow |M|^2 \approx 1$

decadimenti di Gamow-Teller: $J_{\text{leptoni}}=1 \Rightarrow |M|^2 \approx 3$



- E_0 è l'energia disponibile nello stato finale (è uguale al Q della reazione). Lo spread in energia dE_0 deriva dal fatto che l'energia dello stato iniziale non è completamente determinata a causa della vita media finita.

$$\vec{p} + \vec{q} + \vec{p} = 0$$

$$T + E_\nu + E = E_0$$

- Trascuriamo la massa dell'elettrone. E_0 è dell'ordine di 1 MeV. L'energia cinetica del protone è dell'ordine di 10^{-3} MeV e può essere trascurata. Il protone serve solo ad assicurare la conservazione della quantità di moto.

$q_\nu = E_0 - E_e$ L'energia è suddivisa solo tra l'elettrone ed il neutrino

Spazio delle fasi

- Il numero di stati disponibili per un elettrone di impulso compreso tra p e $p+dp$, confinato nel volume V , dentro l'elemento di angolo solido $d\Omega$, vale:

$$\frac{Vd\Omega}{(2\pi)^3\hbar^3} p^2 dp$$

- Normalizzando la funzione d'onda al volume unitario, integrando sull'intero angolo solido, ed ignorando gli effetti dello spin sulle distribuzioni angolari, si ottiene il fattore dello spazio delle fasi per l'elettrone e per il neutrino:

$$\frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi)^3\hbar^3} \quad ; \quad \frac{4\pi q_\nu^2 dq_\nu}{(2\pi)^3\hbar^3}$$

- Consideriamo i due fattori indipendenti in quanto tra q e p non vi è correlazione perché è un processo a tre corpi, dove il protone assorbe l'impulso risultante di q e p . L'impulso del protone è fissato e quindi non c'è il fattore dello spazio delle fasi del protone.

- Il numero di stati finali è: $dN = \frac{(4\pi)^2}{(2\pi)^6\hbar^6} p^2 q_\nu^2 dp dq_\nu$

- Per un dato valore dell'energia dell'elettrone, l'energia del neutrino è fissata e quindi anche il suo impulso:

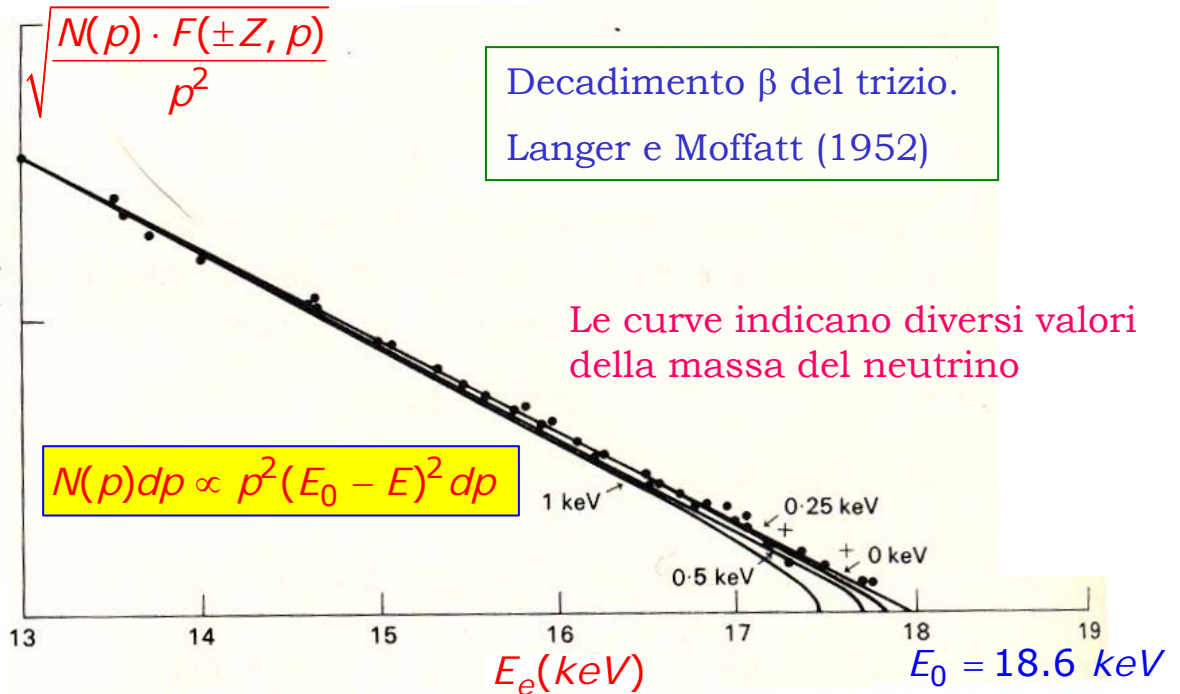
$$q_\nu \equiv E_\nu = (E_0 - E) \quad ; \quad \Rightarrow dq_\nu = dE_0$$

$$\Rightarrow \frac{dN}{dE_0} = \frac{dN}{dq_\nu} = \frac{1}{4\pi^4\hbar^6} p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

- Una volta che abbiamo integrato la probabilità di transizione W su tutto l'angolo solido, M^2 è uguale ad una costante, pertanto lo spettro di energia dell'elettrone è dato dalla forma dello spazio delle fasi:

$$N(p)dp \propto p^2 (E_0 - E)^2 dp$$

Kurie plot



- Se si plotta $(N(p)/p^2)^{1/2}$ versus l'energia dell'elettrone, si ottiene una linea retta che incrocia l'asse delle ascisse a $E=E_0$. Questo viene chiamato plot di Kurie.
- Sperimentalmente occorre includere un fattore di correzione $F(Z, p)$ che tenga conto dell'interazione Coulombiana tra l'elettrone ed il nucleo.
- Nel caso in cui il neutrino avesse massa, il suo effetto è di modificare la distribuzione nel modo seguente:

$$N(p)dp \propto p^2(E_0 - E)^2 \sqrt{1 - \left(\frac{m_\nu}{E_0 - E}\right)^2} dp$$

- Il plot di Kurie si modifica in modo tale che la curva interseca l'asse delle ascisse a $E=E_0 - m_\nu$. Questo è il modo in cui si cerca di misurare la massa del neutrino-e. Purtroppo in quella regione ci sono pochissimi eventi ed è difficile fare la misura, per cui si è riuscito a mettere solo un limite superiore.

$$m_{\nu_e} \leq 10 \text{ eV}$$

Regola di Sargent

- La rate di decadimento totale si ottiene integrando lo spettro $N(p)dp$. Questo può essere fatto analiticamente, tuttavia in molti casi l'elettrone è relativistico e si può usare l'approssimazione $p \approx E$. In questo caso si ottiene una formula molto semplice:

$$N \propto \int_0^{E_0} E^2 (E_0 - E)^2 dE \propto E_0^5$$

- La rate di decadimento è proporzionale alla quinta potenza dell'energia disponibile nel processo. Questa è la regola di Sargent.

- Considerando tutti i fattori numerici del processo, si ottiene:

$$W = \frac{G^2 |M|^2 E_0^5}{60\pi^3 (\hbar c)^6 \hbar} \quad (\text{per } E_0 \gg m_e)$$

- La costante di Fermi G può essere ricavata, come vedremo più avanti, dalla misura della vita media di alcuni decadimenti β (e con alcune considerazioni teoriche, vedi angolo di Cabibbo), oppure in maniera più precisa dalla vita media del muone

- Dal PDG si ottiene: $\frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.16637(1) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$

- Sostituendo i valori numerici si ottiene:

$$\frac{1}{\tau} = W = \frac{1.11}{10^4} |M|^2 E_0^5 \text{ s}^{-1} \quad (E_0 \text{ in MeV})$$

- Ad esempio, se $E_0 \approx 100 \text{ MeV}$ come nel decadimento del muone e $M^2=1$, si ha:

$$\tau_\mu = \frac{1}{W} \approx 10^{-6} \text{ s} \quad (\tau_\mu = 2.2 \mu\text{s})$$

N.B. è la dipendenza da E_0^5 che spiega il grande intervallo di variabilità delle vite medie dei decadimenti deboli.

Misura della costante di Fermi

- La rate di decadimento si può scrivere in un altro modo rispetto alla regola di Sargent, esplicitando la massa del protone m , ed inglobando i termini relativi allo spazio delle fasi ed alla correzione Coulombiana $F(\pm Z, p)$ in una funzione adimensionale $f(\pm Z, E_0/m_e)$ calcolabile analiticamente.

$$\frac{1}{\tau} = W = \frac{(mc^2)^5}{2\pi^3 \hbar (\hbar c)^6} G^2 |M|^2 f(\pm Z, E_0)$$

E_0 (MeV) $\text{MeV}^2 \cdot \text{fm}^6$
↓

decadimento	transizione	τ (s)	W	p_e^{max}	$f \tau$	$g^2 M_{if} ^2$
$n \rightarrow p e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	890	1.29	1.18	$1.61 \cdot 10^3$	$4.25 \cdot 10^{-8}$
${}^3_1H \rightarrow {}^3_2He e^- \bar{\nu}$	$\frac{1}{2}^+ \rightarrow \frac{1}{2}^+$	$5.60 \cdot 10^8$	0.53	0.14	$1.63 \cdot 10^3$	$4.20 \cdot 10^{-8}$
${}^{14}_8O \rightarrow {}^{14}_7N^* e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	102	2.32	2.26	$4.51 \cdot 10^3$	$1.52 \cdot 10^{-8}$
${}^{34}_{17}Cl \rightarrow {}^{34}_{16}S e^+ \nu$	$0^+ \rightarrow 0^+$	2.21	4.97	4.94	$4.54 \cdot 10^3$	$1.51 \cdot 10^{-8}$
${}^6_2He \rightarrow {}^6_3Li e^- \bar{\nu}$	$0^+ \rightarrow 1^+$	1.15	4.02	3.99	$1.17 \cdot 10^3$	$5.85 \cdot 10^{-8}$
${}^{13}_5B \rightarrow {}^{13}_6C e^- \bar{\nu}$	$\frac{3}{2}^- \rightarrow \frac{1}{2}^-$	$2.51 \cdot 10^{-3}$	13.4	13.4	$1.11 \cdot 10^3$	$6.17 \cdot 10^{-8}$

• Nonostante la grande variazione della vita media, dovuta alla forte dipendenza dell'integrale f da p_e^{max} , il prodotto $G^2 M^2$ è approssimativamente lo stesso in tutti i decadimenti.

• Si osserva tuttavia una piccola differenza in funzione del tipo di transizione: Fermi pure, Gamow-Teller pure oppure miste.

• Per estrarre da questi dati il valore della costante di Fermi si considera il rapporto:

$$G^2 |M|^2 = \frac{\text{costante}}{f \cdot \tau} \quad (\text{costante} = \frac{2\pi^3}{m^5})$$

• Se consideriamo una transizione pura di Fermi, si ottiene:

$$\frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.140(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$$

leggermente diverso dal valore quotato dal PDG. La ragione la vedremo più avanti (angolo di Cabibbo)

Generalizzazione del decadimento β di Fermi

- Non c'è nessuna ragione a priori perché la corrente debole debba essere una corrente vettoriale.
- La Lagrangiana più semplice che sia invariante di Lorentz e non contenga derivate dei campi è:

$$L_i = \sum_r C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \psi_\nu) + \underbrace{\sum_r C_r (\bar{\psi}_n O_r^\dagger \psi_p) (\bar{\psi}_\nu O_r^\dagger \psi_e)}_{\text{Hermitiano coniugato}}$$

- I C_r sono delle costanti che determinano l'intensità dell'interazione. Gli operatori O_r sono:

$$O_S = 1 \quad \text{scalare} \quad ; \quad O_A = \gamma^\mu \gamma_5 \quad \text{vettore assiale}$$

$$O_V = \gamma^\mu \quad \text{vettore} \quad ; \quad O_P = i\gamma_5 \quad \text{pseudoscalare}$$

$$O_T = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu) \quad \text{Tensore antisimmetrico}$$

- Oggi sappiamo che le interazioni deboli non conservano la parità, questo implica che devono esserci nella Lagrangiana dei termini pseudoscalari. Per fare questo è sufficiente costruire altri 5 operatori $O'_r = O_r \gamma_5$

- Quindi per ogni termine del tipo: $C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \psi_\nu) + \text{h.c.}$ aggiungiamo alla Lagrangiana un termine del tipo:

$$C'_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) (\bar{\psi}_e O_r \gamma_5 \psi_\nu) + \text{h.c.}$$

questo termine connette stati con parità diversa.

- La lagrangiana completa si può scrivere come:

$$L_i = \sum_r C_r (\bar{\psi}_p O_r \psi_n) \left[\bar{\psi}_e O_r \left(1 + \frac{C'_r}{C_r} \gamma_5 \right) \psi_\nu \right] + \text{h.c.}$$

N.B. L'elemento di matrice M_{fi} si ricava dalla Lagrangiana

Determinazione dei C_r

- Dall'analisi della forma della Lagrangiana, risulta che nel termine pseudoscalare, l'elemento di matrice viene moltiplicato per il $\beta (=v/c)$ del nucleone, quindi questo termine può essere trascurato.
- Inoltre, dallo studio delle correlazioni degli spin dell'elettrone e del neutrino, risulta che ai decadimenti di Fermi ($\Delta J = 0$) possono contribuire solo i termini vettoriali o scalari, mentre ai decadimenti di Gamow-Teller possono contribuire solo i termini assiali o tensoriali.
- I coefficienti C_r si determinano sperimentalmente osservando la forma dello spettro dell'elettrone del decadimento β e la sua correlazione angolare con la direzione del neutrino.
- Se consideriamo solo i decadimenti β permessi ($\Delta I = 0$), non c'è cambiamento di parità, quindi possiamo ignorare nella Lagrangiana i termini che contengono γ_5 . Possiamo riscrivere la Lagrangiana separando i contributi dei decadimenti di Fermi da quelli di Gamow-Teller:

$$L_i = \sum_{i=S,V} C_i (\bar{\psi}_p O_i \psi_n) (\bar{\psi}_e O_i \psi_\nu) + \sum_{j=T,A} C_j (\bar{\psi}_p O_j \psi_n) (\bar{\psi}_e O_j \psi_\nu)$$

- Lo spettro in energia dell'elettrone (n^-) e del positrone (n^+) nel decadimento β si può scrivere come:

$$\frac{dn_{\pm}}{dE_e} = \frac{P_e E_e}{2\pi^3} (E_0 - E)^2 \left[|M_F|^2 (C_S^2 + C_V^2) + |M_{GT}|^2 (C_T^2 + C_A^2) \pm \frac{2me}{Ee} (|M_F|^2 C_S C_V + |M_{GT}|^2 C_T C_A) \right]$$

M_F e M_{GT} sono gli elementi di matrice di Fermi e Gamow-Teller e E_0 è la massima energia possibile dell'elettrone.

- Da questa espressione si nota come non ci sia interferenza tra le transizioni di Fermi e quelle di Gamow-Teller, mentre c'è interferenza tra i termini S e V ed i termini A e T.
- Dato che sono osservate transizioni pure di Fermi o di Gamow-Teller, non possiamo avere:

$$C_S = C_V = 0 \quad \text{oppure} \quad C_A = C_T = 0$$

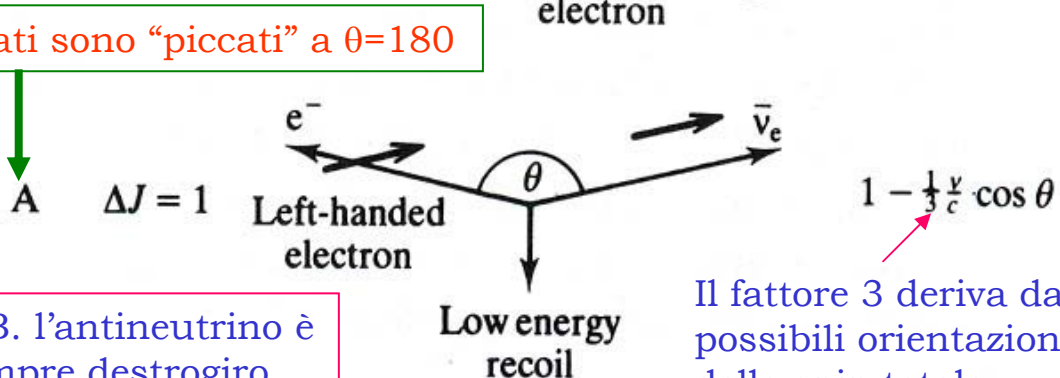
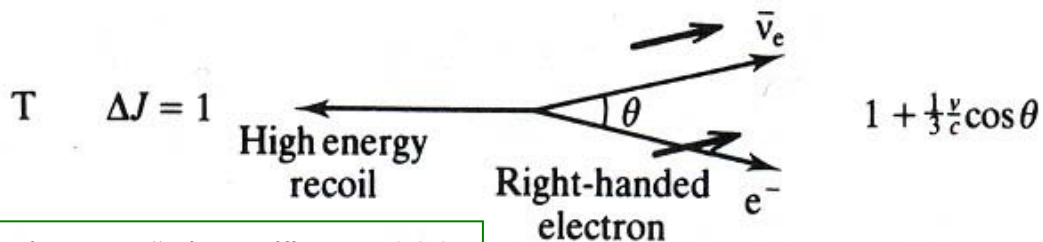
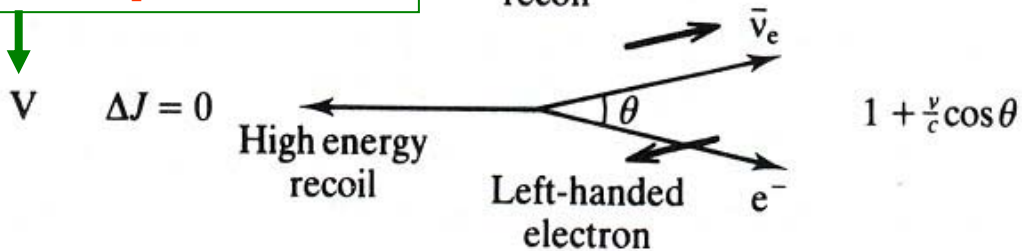
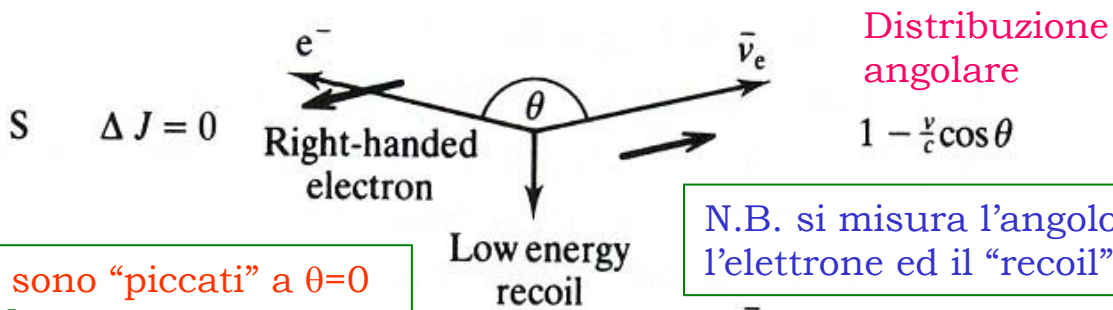
Determinazione dei C_r

- Analizzando lo spettro (Kurie plot) per le transizioni pure di Fermi o di Gamow-Teller, si può determinare il rapporto:

$$\frac{C_S \cdot C_V}{C_S^2 + C_V^2} = 0.00 \pm 0.15 \quad ; \quad \frac{C_T \cdot C_A}{C_T^2 + C_A^2} = 0.00 \pm 0.02$$

quindi i dati suggeriscono che (Michel, 1957) C_S o C_V sono zero e che C_T o C_A sono zero.

- Per decidere quale termine è nullo si analizza la correlazione tra la direzione dell'elettrone e quella del neutrino.



Misura di C_V e C_A

- Utilizzando le semplificazioni ottenute, lo spettro dell'elettrone si può riscrivere nel modo seguente:

$$\frac{dn}{dE_e} = \frac{P_e E_e}{2\pi^3} (E_0 - E)^2 \left[C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2 \right]$$

- integrando su tutto lo spettro si ottiene il numero di conteggi per unità di tempo, che è inversamente proporzionale alla vita media τ

$$n = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{2\pi^3} \left[C_V^2 |M_F|^2 + C_A^2 |M_{GT}|^2 \right] \underbrace{\int_{m_e}^{E_0} P_e E_e (E_0 - E)^2 dE_e}_{m^5 \cdot f}$$

N.B. per rendere f adimensionale, si normalizzano le energie alla massa m , che può essere la massa dell'elettrone oppure quella del protone. N.N.B. f tiene conto anche della correzione Coulombiana dell'energia, che è diversa per elettrone e positrone

- Abbiamo detto che: $|M_F|^2 \approx 1$; $|M_{GT}|^2 \approx 3$
- I parametri C_V e C_A si ricavano dalla misura delle vite medie di alcuni decadimenti β nucleari. In realtà si preferisce misurare il tempo di dimezzamento piuttosto che la vita media

$$N(t_2) = \frac{1}{2} N_0 = N_0 \cdot e^{-\frac{t_2}{\tau}} \Rightarrow t_2 = \tau \cdot \ln 2$$

- Dai decadimenti puri di Fermi (ad esempio $^{14}\text{O} \rightarrow ^{14}\text{N}^*$ si ottiene:

$$C_V = \frac{G}{(\hbar c)^3} = 1.140(2) \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} = \frac{10^{-5}}{M_p^2} \quad (\hbar = c = 1)$$

- Dal decadimento del neutrone (decadimento misto) si ottiene:

$$\frac{1}{f \cdot t} = \left[C_V^2 + 3 \cdot C_A^2 \right] \frac{m^5}{2\pi^3 \ln 2} = (1080 \pm 16)^{-1} \text{ s}^{-1}$$

- Si confronta con il dec. dell' ^{14}O (2 protoni che decadono)

$$\frac{(ft)^{14}\text{O}}{(ft)_n} = \frac{C_V^2 + 3 \cdot C_A^2}{2C_V^2} = \frac{3100 \pm 20}{1080 \pm 16} \Rightarrow \left| \frac{C_A}{C_V} \right| = 1.25 \pm 0.2$$

- dai neutroni polarizzati si ricava che il segno di C_A è negativo 15

τ - θ puzzle

- Vi erano due particelle strane, aventi la stessa massa e la stessa vita media, che decadevano in due stati finali con parità diverse:

$$\theta \rightarrow \pi \pi \quad ; \quad \tau \rightarrow \pi \pi \pi$$

- Parità del mesone θ ($K \rightarrow \pi \pi$):

I pioni hanno spin zero, quindi per la conservazione di J, lo spin del K deve essere uguale al momento angolare orbitale relativo del sistema di due pioni.

La parità del sistema di conseguenza è uguale a: $\eta = (-1)^l$

$$\Rightarrow J^P = 0^+, 1^-, 2^+, 3^- \dots \quad (\text{spin parity naturale})$$

Se consideriamo il decadimento del K neutro in $2\pi^0$, che sono due bosoni identici, la funzione d'onda deve essere simmetrica, quindi sono permessi solo i pari:

$$\Rightarrow J^P = 0^+, 2^+ \dots \Rightarrow \text{spin pari del K e parità positiva}$$

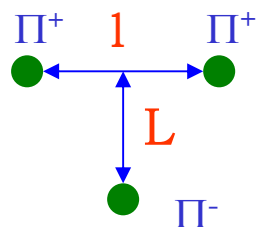
- Parità del mesone τ ($K \rightarrow \pi \pi \pi$):

Si può trattare il sistema come un di-pione (ad esempio due pioni con la stessa carica con in aggiunta il terzo pione).

Chiamiamo l il momento angolare relativo dei due pioni e chiamiamo L il momento del terzo pione rispetto alla coppia di pioni.

La parità del sistema di tre pioni è:

$$\eta = (-1)^3 \cdot (-1)^l \cdot (-1)^L = -(-1)^L$$



N.B. l deve essere pari perché i due pioni della stessa carica sono due particelle identiche.

(il pione ha parità intrinseca negativa)

τ - θ puzzle

- Lo spin totale J del sistema di 3 pioni deva cadere nell'intervallo:

$$|L - I| \leq J \leq |L + I|$$

quindi abbiamo le seguenti combinazioni:

I	L	J^P
0	0	0^-
0	1	1^+
0	2	2^-
2	0	2^-
2	1	$1^+, 2^+, 3^+$
2	2	$0^-, 1^-, 2^-, 3^-, 4^-$

$$\eta = -(-1)^L$$

Per determinare qual'è l'assegnazione giusta degli spin occorre studiare la distribuzione angolare dei decadimenti in funzione delle diverse assegnazioni di J (sviluppo in onde parziali e Dalitz plot)

- Da queste si deduce che la combinazione deve essere:

$$J^P = 0^- \quad \text{oppure} \quad 1^+ \quad \text{ma non} \quad 1^-$$

Includendo anche gli effetti dello spazio delle fasi, risulta che:

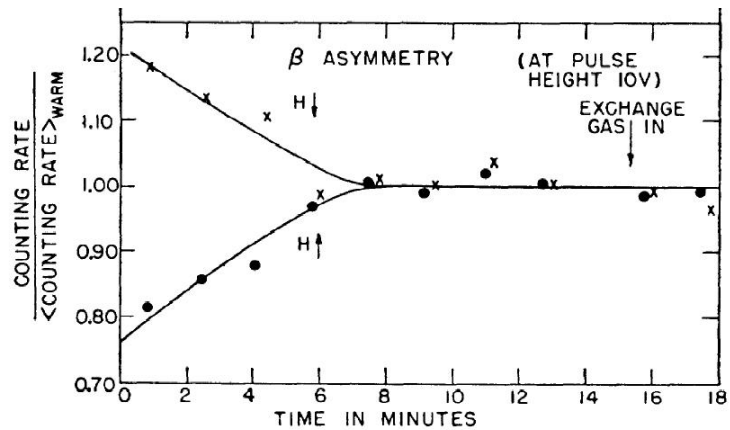
$$J^P = 0^- \quad (\text{N.B. il K ha spin } 0)$$

- Quindi il τ aveva parità negativa mentre il θ aveva parità positiva, da qui il puzzle che fu risolto da T.D.Lee e C.N.Yang che ipotizzarono che le interazioni deboli non conservassero la parità e suggerirono alcuni metodi per verificarlo.

Esperimento di Madame Wu



C.S. Wu (1913-1997)



Phys. Rev., 105, 1413 (1957)

One day in the early spring of 1956, Prof. T.D. Lee came up to my little office, explaining: "...the violation should also be observed in the space distribution of the beta-decay of polarized nuclei..."

This was a golden opportunity for a beta-decay physicist to perform a crucial test, and how could I let it pass? ...That spring, my husband, Chia-Liu Yuan, and I had planned to attend a conference in Geneva and then proceed to the Far East. Both of us had left China in 1936, exactly twenty years earlier. Our passages were booked on the Queen Elizabeth before I suddenly realized that I had to do the experiment immediately, before the rest of the Physics community recognized the importance of this experiment and did it first. So I asked Chia-Liu to let me stay and go without me. On Christmas eve I told Professor Lee that the observed asymmetry was reproducible and huge.

• Anche questa lettera è fondamentale per la fisica ... e per capire la sociologia dei fisici e dei ricercatori in generale!

• R.L.Garwin, L.M.Lederman, M.Weinrich

Phys. Rev., 105, 1415 (1957)

• J.I.Friedman, V.L.Telegdi

Phys. Rev., 106, 1290 (1957)

(violazione della parità nel decadimento del pione)

Equazione di Weyl: teoria a due componenti del neutrino

- Nel 1929, subito dopo la pubblicazione dell'equazione di Dirac, Weyl presentò una teoria molto semplice ed elegante per le particelle senza massa di spin $\frac{1}{2}$, per le quali l'elicità risulta essere un buon numero quantico.
- Al tempo della pubblicazione questa teoria suscitò un interesse limitato perché non si conoscevano particelle senza massa di spin $\frac{1}{2}$
- Tuttavia, anche dopo l'introduzione del neutrino da parte di Pauli, lo stesso Pauli rifiutò la teoria di Weyl perché violava la simmetria di parità.
- Solo dopo il 1957 la teoria di Weyl ricevette il giusto credito.
- **Ripartiamo dall'equazione di Dirac nello spazio dei momenti:**

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi(p_\mu) = 0$$

se mettiamo $m=0$ e ricordiamo che $\gamma^0=\beta$ e $\gamma^i = \beta\alpha^i$, abbiamo:

$$(\gamma^0 E - \vec{\gamma} \cdot \vec{p})\psi(p_\mu) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\beta E - \beta\vec{\alpha} \cdot \vec{p})\psi(p_\mu)$$

$$\Rightarrow H\psi(p) \equiv \vec{\alpha} \cdot \vec{p}\psi(p) = E\psi(p)$$

- Per studiare l'equazione di Weyl è preferibile usare la rappresentazione di Weyl (o rappresentazione chirale), in cui γ^5 è diagonale, invece della rappresentazione che abbiamo già visto di Dirac-Pauli.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} -I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Equazione di Weyl

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{p} \psi = E \psi$$

- Lo spinore ψ a 4 componenti si può scrivere come:

$$\psi = \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \chi \text{ e } \varphi \text{ sono spinori a 2 componenti}$$

L'equazione di Weyl diventa:
$$\begin{pmatrix} -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} = E \cdot \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix}$$

- Le equazioni si disaccoppiano:
$$\begin{cases} -\vec{\sigma} \cdot \vec{p} \chi = E \chi \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \varphi = E \varphi \end{cases}$$

- Dato che il neutrino non ha massa, ne consegue che $E^2 = P^2$. Per ognuna delle due equazioni si avranno due soluzioni, una con energia positiva e l'altra con energia negativa.

- Le soluzioni con energia positiva corrispondono ai neutrini mentre quelle a energia negativa corrispondono agli antineutrini

- Ricordiamo che $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|}$ è il proiettore di elicità

- soluzioni a energia positiva: $E = |\vec{p}|$

$$\Rightarrow \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi = -\chi \quad ; \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \varphi = \varphi$$

(neutrino levogiro ; neutrino destrogiro)

- soluzioni a energia negativa: $E = -|\vec{p}|$

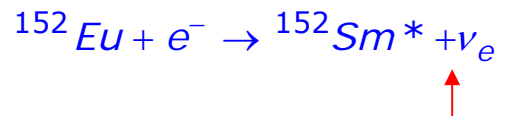
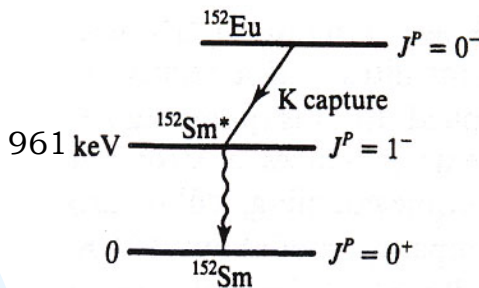
$$\Rightarrow \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \chi = \chi \quad ; \quad \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|\vec{p}|} \varphi = -\varphi$$

(antineutrino destrogiro ; antineutrino levogiro)

N.B. l'equazione viola la parità perché il neutrino levogiro ed il neutrino destrogiro sono descritti da spinori diversi (χ e φ) disaccoppiati

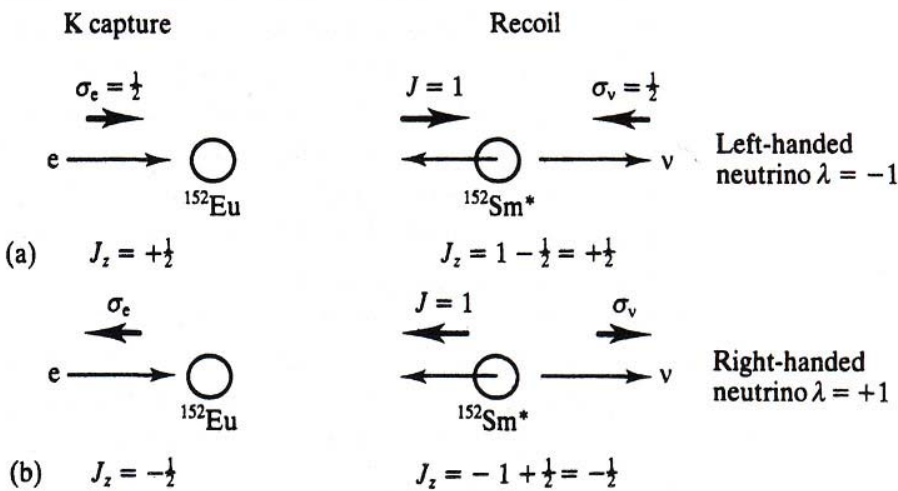
Misura dell'elicità del neutrino

- Nel 1958 Goldhaber, Grodzins e Sunyar realizzarono un esperimento molto ingegnoso per la misura dell'elicità del neutrino.
- Si prende uno stato metastabile di ^{152}Eu che, attraverso una cattura elettronica K, decade nel 24% dei casi in uno stato eccitato di $^{152}\text{Sm}^*$, il quale decade a sua volta nello stato fondamentale emettendo un fotone di 961 keV.



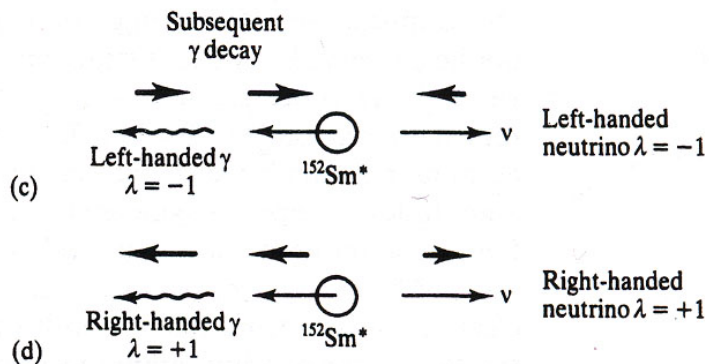
Decadimento a due corpi: $E_\nu = 840 \text{ keV}$
 N.B. l'impulso del neutrino è circa uguale a quello del fotone!!

- In base alla conservazione del momento angolare si può definire l'elicità del neutrino:



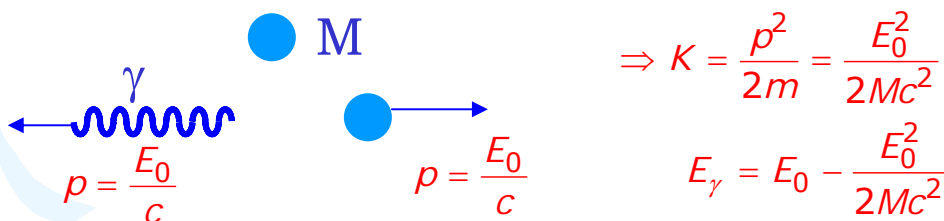
- infine vediamo la polarizzazione dei fotoni emessi nella direzione di volo del Samario.

N.B. il fotone ha la stessa elicità del neutrino



Misura dell'elicità del neutrino

- La vita media del $^{152}\text{Sm}^*$ è di circa 10^{-14} s, quindi il decadimento avviene quando ancora il Samario è in "volo", pertanto il fotone "ricorda" il momento angolare del $^{152}\text{Sm}^*$.
- In particolare il fotone emesso nella direzione di rinculo ha la stessa elicità del nucleo di $^{152}\text{Sm}^*$ e quindi la stessa elicità del neutrino.
- L'elicità del fotone si misura esaminando la trasmissione dei fotoni attraverso il ferro magnetizzato. Il processo dominante nell'interazione con la materia per fotoni di 961 keV è lo scattering Compton, la cui sezione d'urto dipende dagli spin.
- La trasmissione maggiore (ovvero la sezione d'urto minore) si ha quando lo spin del fotone è parallelo a quello dell'elettrone.
- Va tenuto presente che solo i fotoni emessi in direzione opposta a quella del neutrino hanno la stessa elicità, quindi occorre selezionare solo questi fotoni.
- Se si emette un fotone da uno stato avente energia di eccitazione E_0 , bisogna fornire un impulso E_0/c al nucleo che rincula e di conseguenza l'energia del fotone è ridotta della quantità $E_0^2/2Mc^2$ (M =massa del nucleo) (N.B. questa formula approssimata è valida perché $Mc^2 \gg E_0^2$)



- Quando un fotone viene assorbito occorre fornirgli un'energia aggiuntiva per tener conto del rinculo del nucleo: $E_\gamma = E_0 + \frac{E_0^2}{2Mc^2}$
- In genere l'energia persa $E_0^2/2Mc^2$ è più grande della larghezza del livello, per cui un nucleo non può riassorbire il fotone che esso emette (assorbimento risonante) a meno che non venga fornita al fotone l'energia che manca.

Resonant Scattering

- Perché avvenga scattering risonante l'energia del fotone deve essere pari all'energia del livello eccitato del Sm
- Nell'emissione della radiazione gamma bisogna considerare anche l'energia persa nel rinculo nucleare:

$$|\vec{p}_\gamma| = |\vec{p}_{Sm}| \sim E_0 \quad (M_{Sm} \gg E_0)$$

$$E_\gamma = E_0 - T_{Sm^*} = E_0 - \frac{E_0^2}{2M_{Sm}c^2}$$

- Analogamente nell'assorbimento dovremmo avere

$$E'_\gamma = E_0 + T_{Sm^*} = E_0 + \frac{E_0^2}{2M_{Sm}c^2}$$

- In definitiva dobbiamo fornire al fotone uno shift doppler pari a

$$E'_\gamma - E_\gamma = \frac{E_0^2}{M_{Sm}c^2}$$

- Nella cattura K dell'Eu abbiamo

$$T_{Sm^*} = \frac{1}{2} M_{Sm} v^2 = \frac{E_v^2}{2M_{Sm}c^2} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{E_v}{M_{Sm}c^2}$$

$$E' = E \left(1 + \frac{v}{c} \cos(\theta)\right) = E \left(1 + \frac{E_v}{M_{Sm}c^2} \cos(\theta)\right)$$

$$E_v \cos(\theta) = E_0 \Rightarrow \cos(\theta) \sim 1$$

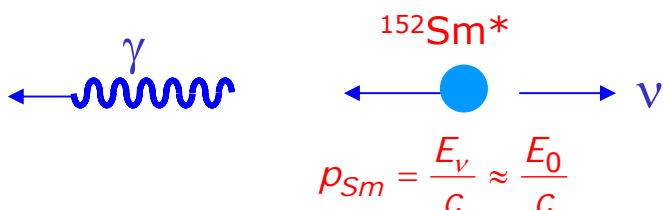
di risonanza

Condizione



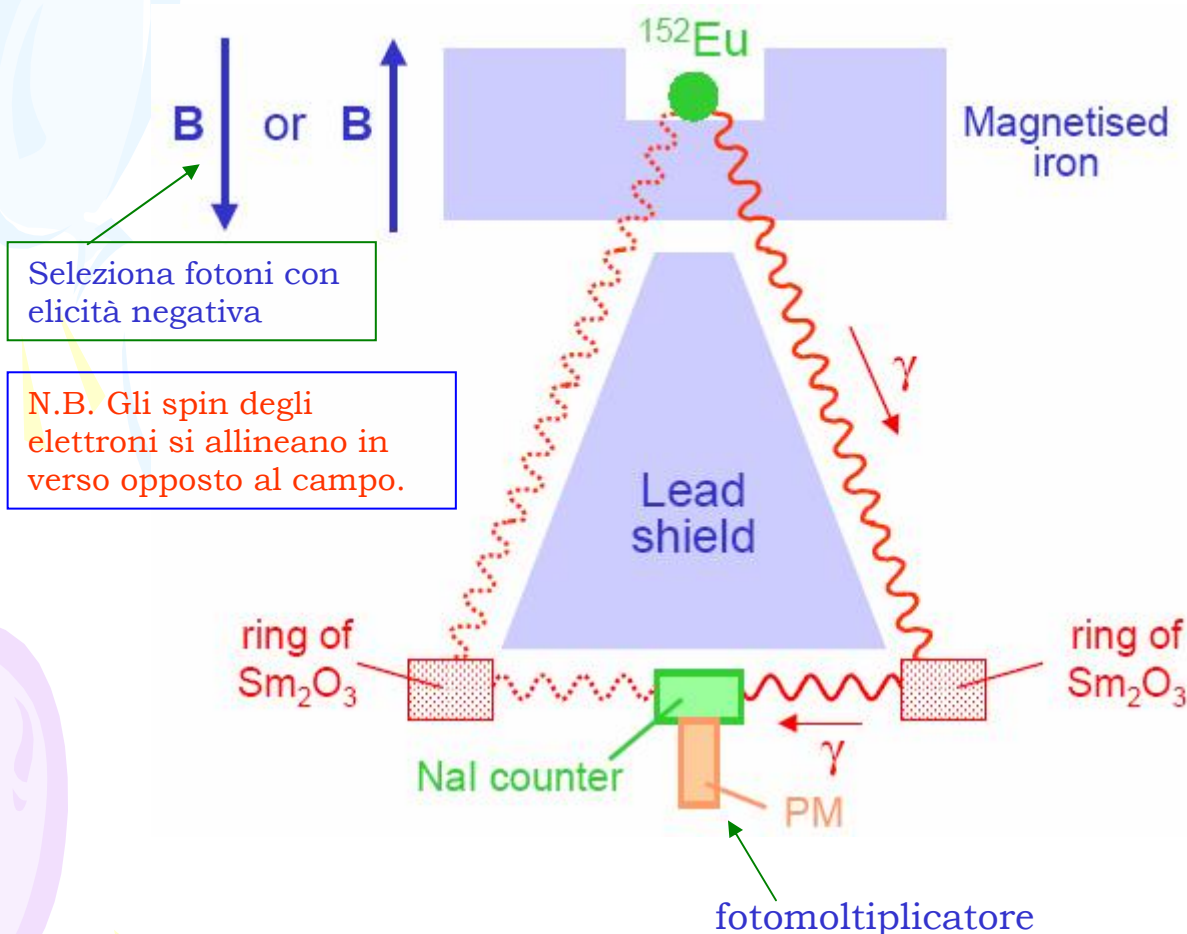
Esperimento di Goldhaber

- Nell'esperimento di Goldhaber i fotoni emessi nella direzione del rinculo del Samario acquistavano energia per effetto Doppler ed avevano così l'energia giusta per fare assorbimento risonante da parte di un anello di ossido di Samario che circondava un rivelatore di fotoni.



L'agitazione termica fa sì che la risonanza avvenga in pratica

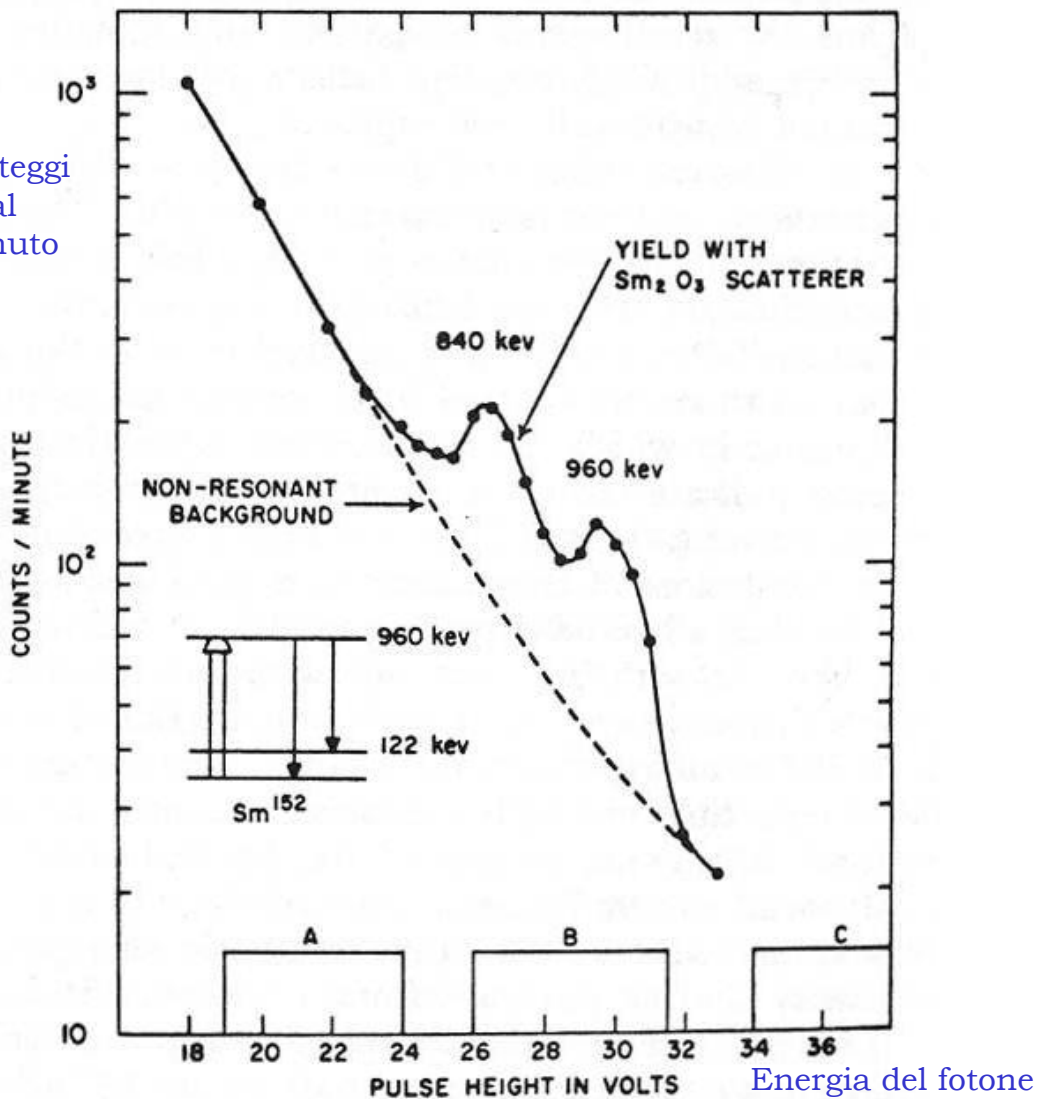
- Nel ferro magnetizzato gli spin degli elettroni hanno una direzione preferenziale, pertanto esso lascia "passare" più facilmente i fotoni che hanno lo spin allineato con quello degli elettroni. Il campo B poteva essere invertito.



Elicità del neutrino

- Risultati dell'esperimento:

Conteggi
al
minuto



- La presenza del picco risonante (anzi, dei due picchi) si ottenne per una configurazione del campo magnetico corrispondente a fotoni levogiri, pertanto anche i neutrini sono levogiri.
- L'elicità dell'antineutrino è stata misurata studiando il decadimento di neutroni polarizzati, e risulta che gli antineutrini sono destrogiri.

il neutrino è levogiro

L'antineutrino è destrogiro

Interazione V-A

- Ricapitoliamo quanto abbiamo verificato sperimentalmente fino a qui sulle interazioni deboli:

1. Nelle interazioni di Fermi compare solo il termine vettoriale ($O_i = \gamma^\mu$) mentre in quelle di Gamow-Teller compare solo quello assiale ($O_j = i\gamma^\mu\gamma^5$)
2. **Il neutrino ha elicità negativa**
3. Le interazioni deboli violano la parità, quindi nella Lagrangiana occorre introdurre dei termini pseudoscalari. Questo si fa con la sostituzione:

$$C_i \rightarrow (C_i + C_i' \gamma^5) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(il fattore $1/\sqrt{2}$ si inserisce per riottenere il valore di $G \cdot C_V$ (costante di Fermi) trovato in precedenza)

- Possiamo riscrivere la Lagrangiana di Fermi, includendo in essa la violazione della parità, nel modo seguente:

$$L_i = \sum_{i=V,A} \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{\psi}_p O_i \psi_n) \left[\bar{\psi}_e O_i (C_i + C_i' \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

- Dai risultati sull'elicità del neutrino si trova che: $C_i = 1$; $C_i' = -1$
- Facciamo comparire esplicitamente la costante di Fermi:

$$\Rightarrow L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left\{ C_V (\bar{\psi}_p \gamma^\mu \psi_n) \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right] + C_A (\bar{\psi}_p i \gamma^\mu \gamma^5 \psi_n) \left[\bar{\psi}_e i \gamma_\mu \gamma^5 (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right] \right\}$$

- utilizzando le proprietà di anticommutazione delle matrici γ si ha:

$$\Rightarrow L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (C_V + C_A \gamma^5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

Interazione V-A

- Ricordiamo che da una transizione pura di Fermi si misura il prodotto $G \cdot C_V$. Se confrontiamo questo numero con la misura di G determinata in un decadimento puramente leptónico, come ad esempio il decadimento del muone, dove non compare il termine C_V , si trova che le misure sono in buon accordo, quindi da ciò si deduce che:

$$C_V = 1 \quad \Rightarrow \quad C_A = -1.26 \pm 0.02$$

- C_A non è uguale a 1 perché le interazioni forti modificano la corrente assiale degli adroni, mentre lasciano invariata la parte vettoriale della corrente debole, come vedremo più avanti. Infatti se prendiamo altri decadimenti deboli adronici, oltre a quello del neutrone, abbiamo:

$$\Lambda \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e \Rightarrow \frac{C_A}{C_V} = -0.72 \quad ; \quad \Sigma^- \rightarrow n + e^- + \bar{\nu}_e \Rightarrow \frac{C_A}{C_V} = +0.34$$

- Tuttavia se ignoriamo gli effetti delle interazioni forti sulla corrente assiale, possiamo porre:

$$C_A = -C_V = -1$$

(nelle interazioni dei neutrini con i quark si può verificare che questa assunzione è giusta anche per i quark)

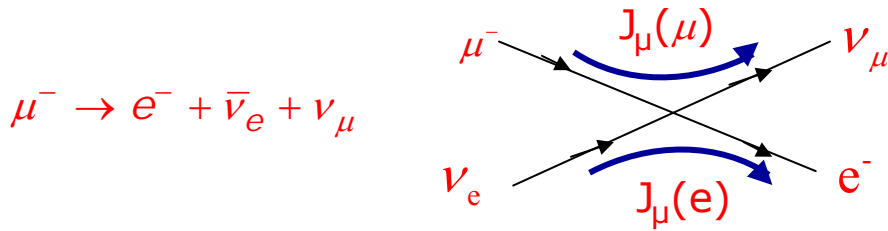
- Pertanto possiamo riscrivere la Lagrangiana nel modo seguente:

$$L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\mu (1 - \gamma^5) \psi_\nu \right]$$

- Questa è la cosiddetta interazione V-A. A parte il fattore $(1 - \gamma^5)$, essa è la stessa Lagrangiana proposta originariamente da Fermi.
- Il fattore $(1 - \gamma^5)$ è molto importante perché, come vedremo, seleziona solo una determinata elicità (chiralità) dei fermioni che partecipano all'interazione debole.

Interazione universale di Fermi

- Consideriamo il decadimento del muone



- La lagrangiana si può scrivere come:

$$L_i = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \psi_\mu \right] \left[\bar{\psi}_e \gamma_\rho (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \right]$$

- Si tratta di un'interazione V-A pura, vale a dire che le correnti vettoriali e assiali hanno la stessa intensità ma segno opposto.
- Dal calcolo della vita media del muone, tenendo conto dello spazio delle fasi, si ottiene:

$$\frac{1}{\tau_\mu} = W = \frac{G^2 m_\mu^5}{192 \pi^3}$$

$$m_\mu = 105.658369 (9) \text{ MeV}$$

$$\tau_\mu = (2.19703 (4)) \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

- Dai valori misurati della massa e della vita media del mu, si ha:

$$G = (1.4358 (1)) \cdot 10^{-62} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

- Dalle misure dei decadimenti β puri di Fermi ($0 \rightarrow 0$), si misura:

$$G \cdot C_V = (1.4116 (8)) \cdot 10^{-62} \text{ J} \cdot \text{m}^3$$

confrontando i due valori si trova $C_V = 0.98$ (vedi angolo di Cabibbo)

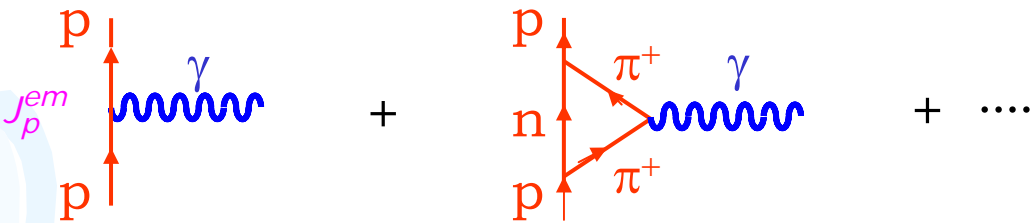
- Dalla somiglianza dei due valori misurati per G discende l'universalità delle interazioni deboli, vale a dire un'unica costante di accoppiamento per tutti i tipi di interazioni deboli. Questa situazione è simile all'universalità delle interazioni elettromagnetiche, nelle quali compare un'unica costante di accoppiamento, la carica elettrica e .

N.B. Il grande range delle vite medie è un effetto cinematico

Ipotesi della corrente vettoriale conservata

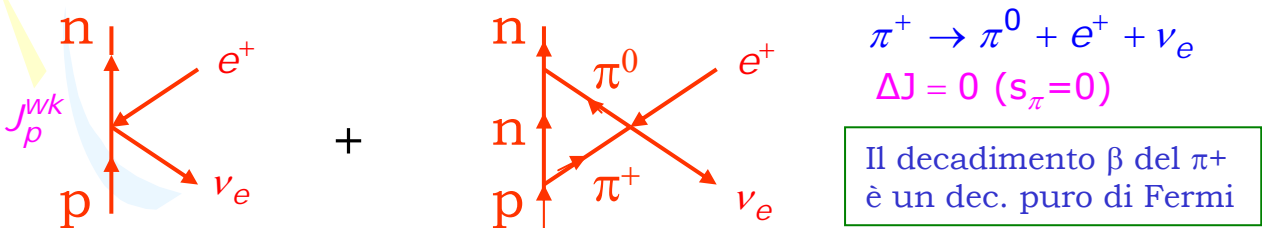
- Dato che protone e neutrone sono oggetti composti soggetti all'interazione forte, ci si aspetta che la loro costante di accoppiamento debole venga modificata rispetto a quella dell'accoppiamento puramente leptonic.

Infatti $C_A \approx -1.26$ ed è quasi una sorpresa che $C_V \approx 1$
- La situazione fu chiarita da Gerstein e Zeldovitch ed indipendentemente da Feynman e Gell-Mann con l'ipotesi della Corrente Vettoriale Conservata (CVC)
- Prendiamo un protone che interagisce e.m. con un fotone:



- ci si aspetta che l'accoppiamento del protone con il fotone sia modificato dall'emissione del π^+ . Questo non succede perché l'accoppiamento del π^+ con il fotone è lo stesso di quello del protone con il fotone, quindi $\delta_\mu J^\mu(em) = 0$ (corrente conservata).

- Prendiamo ora l'interazione debole:



- la CVC dice che la parte vettoriale della corrente adronica è esattamente analoga alla corrente e.m. e pertanto si conserva.
- Questo vuol dire che l'accoppiamento del π^+ con la corrente leptonica è uguale a quella del protone, in modo tale che la corrente del protone non viene rinormalizzata.

(La CVC è il primo indizio dell'unificazione delle interazioni e.m. con le interazioni deboli)

(Esiste anche la PCAC – corrente assiale parzialmente conservata)

Ipotesi Corrente-Corrente

- Il decadimento del neutrone è descritto dal prodotto di due correnti:

$$J_n^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n \quad \text{Corrente del neutrone se } C_A = -1$$

$$J_e^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \quad \text{Corrente dell'elettrone}$$

- Il decadimento del muone è descritto da prodotto di due correnti leptoniche, quella dell'elettrone e quella del muone

$$J_\mu^\rho = \bar{\psi}_\mu \gamma^\rho (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_\mu} \quad \text{Corrente del muone}$$

- Queste sono correnti cariche, perché c'è un cambiamento della carica tra la particella iniziale e quella finale della corrente

- Questa descrizione fu generalizzata da Feynman e Gell-Mann per includere tutti i processi deboli (in realtà solo quelli a corrente carica perché all'epoca non si conoscevano ancora processi deboli a corrente neutra, vedi Modello Standard).

- Si definisce una corrente debole che è la somma di tutte le correnti leptoniche:

$$J_l^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} + \quad \text{le corrispondenti correnti per gli altri leptoni, con uguali ampiezze per via dell'universalità leptonica}$$

ed una corrente adronica:

$$J_h^\mu = \bar{\psi}_p \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \psi_n + \quad \text{gli altri termini per le particelle strane}$$

- quindi tutte le ampiezze dei processi deboli sono della forma:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu \cdot J_\mu^\dagger$$

Per via della conservazione della carica deve comparire una corrente carica di innalzamento della carica ed una di abbassamento

- N.B. Nella formulazione moderna, si preferisce definire la corrente introducendo il fattore $\frac{1}{2} (1 - \gamma^5)$ invece del vecchio $(1 - \gamma^5)$, allora:

$$\mathcal{M} = 4 \frac{G}{\sqrt{2}} J^\mu \cdot J_\mu^\dagger$$

Richiamo dell'eq. di Dirac

- Ricordiamo la rappresentazione di Dirac-Pauli delle matrici γ

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

In questa rappresentazione è β ad essere diagonale e non γ^5

$$\gamma_0 = \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Hu \equiv (\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta m)u = Eu \quad (\text{eq. di Dirac nella sua forma originale})$$

$$\Rightarrow Hu \equiv \begin{pmatrix} m & \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix}$$

spinori a due componenti

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_B = (E - m)u_A \\ \vec{\sigma} \cdot \vec{p} u_A = (E + m)u_B \end{cases}$$

Per $E > 0$ si prende: $u_A^{(s)} = \chi^{(s)}$ ($s=1,2$)
dove: $\chi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \chi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u_B^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \quad \Rightarrow u^{(s)} = N \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E + m} \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Per } E > 0}$$

Fattore di normalizzazione

- Per le due soluzioni ad energia negativa si procede in modo analogo:

$$u_B^{(s)} = \chi^{(s)} \quad \Rightarrow u_A^{(s)} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E - m} \chi^{(s)} = -\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)}$$

$$\Rightarrow u^{(s+2)} = N \begin{pmatrix} \frac{-\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{|E| + m} \chi^{(s)} \\ \chi^{(s)} \end{pmatrix} \quad \underline{\text{Per } E < 0} \quad u^{(3,4)}(-p) \equiv v^{(2,1)}(p)$$

- Le soluzioni $u(1,2)$ ad energia positiva descrivono gli elettroni e le $u(3,4)$, ad energia negativa, descrivono i positroni

$$[\text{Parità: } \psi(x) \rightarrow \psi'(-x) = \gamma^0 \psi]$$

Operatore di elicità

- Gli autostati dell'equazione di Dirac ad energia definita hanno una doppia degenerazione (esistono cioè due stati che hanno la medesima energia), questo vuol dire che deve esistere un altro osservabile che commuti con l'Hamiltoniana (e quindi con l'operatore della quantità di moto visto che parliamo di una particella libera) che permetta di distinguere i due stati.
- Guardando la forma dell'Hamiltoniana si può vedere che l'operatore seguente gode di questa proprietà:

$$\vec{\Sigma} \cdot \hat{p} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} \cdot \hat{p} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{p} \end{pmatrix}$$

$$\vec{\Sigma} \equiv \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix} \text{ operatore di spin ; } \hat{p} = \frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} \text{ versore della quantità di moto}$$

- La componente dello spin nella direzione della quantità di moto, $\vec{\sigma} \cdot \hat{p}$ è pertanto un buon numero quantico che può essere usato per distinguere le due soluzioni.
- Questo numero quantico viene chiamato elicità dello stato. I suoi due autovalori sono:

$$h = \begin{cases} +1 & \text{→} \\ -1 & \text{←} \end{cases}$$

- Se scegliamo la direzione dell'asse z in modo che punti nella direzione della quantità di moto, $\vec{p}=(0,0,p)$, abbiamo:

$$\vec{\sigma} \cdot \hat{p} \chi^{(s)} = \sigma_3 \chi^{(s)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \chi^{(s)} = h \chi^{(s)}$$

quindi lo spinore $\chi^{(s)}$ è autostato dell'elicità con autovalore ± 1 (N.B. a volte si inserisce il fattore $\frac{1}{2}$ nella definizione dell'elicità)

Relazione tra elicità e γ^5

- La matrice γ^5 applicata ad uno spinore di Dirac gode della seguente proprietà:

$$\gamma^5 u(p) = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} & 0 \\ 0 & \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \end{pmatrix} u(p) \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$$

(rap. di Dirac)

- Può essere verificata facendo il calcolo esplicito:

$$\gamma^5 u^{(1,2)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} ; \quad \gamma^5 u^{(3,4)} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \chi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi \\ \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} \chi \end{pmatrix}$$

(nella verifica si tenga presente che: $\frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E+m} \cdot \frac{\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{E-m} = 1$)

- Se la particella ha massa nulla oppure $E \gg m$, si ha $E=p$, quindi :

$$\gamma^5 u(p) = (\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) u(p)$$



γ^5 coincide con l'operatore elicità per particelle di massa nulla

- Si può ora verificare che l'operatore $\frac{1}{2} (1-\gamma^5)$ agisce come un proiettore di elicità:

$$\frac{1}{2} (1 - \gamma^5) u(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } u(p) \text{ ha elicità } +1 \\ u(p) & \text{se } u(p) \text{ ha elicità } -1 \end{cases} \quad (\text{per } m=0)$$

- Ricordiamo la forma della corrente debole:

$$J_l^\mu = \bar{\psi}_e \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_{\nu_e} \quad ; \quad J_l^{\mu \dagger} = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 - \gamma^5) \psi_e$$

- Ne consegue che nelle interazioni deboli partecipano solo stati con un'elicità definita; in particolare solo neutrini levogiri e, come vedremo, antineutrini destrigiri. Nel limite di alta energia vengono selezionati, anche per i fermioni massivi, solo gli stati levogiri.

N.B. per un antiparticella di massa nulla si ha:

$$\gamma^5 v(p) = -(\vec{\Sigma} \cdot \hat{p}) v(p)$$

Autostati chirali

- Si possono ora definire gli autostati chirali (dal greco chiros, mano, cioè stati che distinguono la mano destra dalla mano sinistra). Questi stati coincidono con gli stati aventi elicità definita solo per particelle senza massa. Questo perché l'elicità è un buon numero quantico solo per una particella senza massa che si muove alla velocità della luce, mentre per una particella massiva si può sempre trovare un sistema di riferimento in cui l'elicità cambia segno.
- Questi autostati vengono chiamati levogiri e destrogiri; essi hanno elicità ± 1 solo per particelle a massa nulla oppure, con buona approssimazione, per particelle con $E \gg m$.

Definizione:

$$u_L(p) \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} u(p) \quad ; \quad v_L(p) \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} v(p)$$

$$u_R(p) \equiv \frac{1+\gamma^5}{2} u(p) \quad ; \quad v_R(p) \equiv \frac{1-\gamma^5}{2} v(p)$$

← antiparticelle

- Per gli spinori aggiunti ricordiamo che γ^5 è hermitiano ($\gamma^5 = \gamma^{5\dagger}$) e anticommuta con le altre matrici γ ($\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$), quindi:

$$\bar{u}_L = u_L^\dagger \gamma^0 = u^\dagger \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^0 = u^\dagger \gamma^0 \frac{1+\gamma^5}{2} = \bar{u} \frac{1+\gamma^5}{2}$$

$$\bar{v}_L(p) \equiv \bar{v}(p) \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \bar{u}_R(p) \equiv u(p) \frac{1-\gamma^5}{2} \quad ; \quad \bar{v}_R(p) \equiv \bar{v}(p) \frac{1+\gamma^5}{2}$$

- Vediamo alcune proprietà del proiettore:

$$\left(\frac{1-\gamma^5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} [1 - 2\gamma^5 + (\gamma^5)^2] = \frac{1-\gamma^5}{2} \quad \text{un proiettore applicato due volte da sempre lo stesso risultato}$$

$$\gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1-\gamma^5}{2} \gamma^\mu \quad \Rightarrow \quad \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} = \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} \frac{1-\gamma^5}{2} = \frac{1+\gamma^5}{2} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2}$$

- Ricordiamo un esempio di corrente debole: (vertice W-e- ν)

$$J_\mu = \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e \quad (\text{distrugge un elettrone e crea un neutrino})$$

$$J_\mu = \bar{\nu} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e = \bar{\nu} \frac{(1+\gamma^5)}{2} \gamma_\mu \frac{(1-\gamma^5)}{2} e = \bar{v}_L \cdot \gamma_\mu \cdot e_L$$

Abbiamo ottenuto una corrente puramente vettoriale tra due particelle levogire (alla fine aveva ragione Fermi ☺)

Simmetria chirale

- Come abbiamo visto la corrente vettoriale debole (carica) accoppia soltanto elettroni levogiri con neutrini levogiri, mentre la corrente elettromagnetica non distingue la "chiralità" delle particelle coinvolte.
- Tuttavia anche per la QED si possono fare intervenire gli autostati chirali:

$$u = \frac{1 - \gamma^5}{2} u + \frac{1 + \gamma^5}{2} u = u_L + u_R \quad (\text{anche } \bar{u} = \bar{u}_L + \bar{u}_R)$$

$$\Rightarrow J_\mu^{em} = -\bar{e}\gamma_\mu e = -(\bar{e}_L + \bar{e}_R)\gamma_\mu(e_L + e_R) = -\bar{e}_L\gamma_\mu e_L - \bar{e}_R\gamma_\mu e_R$$

- questo succede perché i termini in "croce" sono nulli:

$$\bar{e}_L\gamma_\mu e_R = \bar{e} \frac{1 + \gamma^5}{2} \gamma_\mu \frac{1 + \gamma^5}{2} e = \bar{e}\gamma_\mu \frac{1 - \gamma^5}{2} \frac{1 + \gamma^5}{2} e = 0$$

$$\text{perché: } (1 - \gamma^5)(1 + \gamma^5) = 1 - (\gamma^5)^2 = 1 - 1 = 0$$

- quindi l'interazione elettromagnetica conserva la chiralità dei fermioni coinvolti. Ciò accade perché essa è di tipo vettoriale. Si può dimostrare che anche una corrente assiale conserva la chiralità.

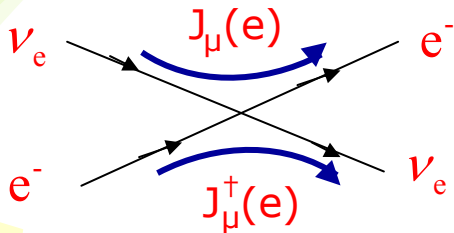
- Vediamo invece cosa accade per un termine scalare, come appare nei termini di massa della Lagrangiana:

$$m\bar{e}e = m\bar{e} \left[\frac{1 - \gamma^5}{2} + \frac{1 + \gamma^5}{2} \right] e = m \left[\bar{e} \left(\frac{1 - \gamma^5}{2} \right)^2 e + \bar{e} \left(\frac{1 + \gamma^5}{2} \right)^2 e \right] = m(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)$$

- I termini di massa mescolano stati con chiralità diversa, quindi essi rompono la simmetria chirale. Questo ha causato non pochi problemi nella prima versione della teoria unificata delle interazioni elettrodeboli di Glashow dove tutti i fermioni e bosoni erano rigorosamente a massa nulla. Il problema fu risolto da Weinberg e Salam introducendo nella teoria il meccanismo di Higgs della rottura spontanea di una simmetria di gauge locale.

Violazione dell'unitarietà

- Consideriamo il processo: $\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-$
- nella teoria di Fermi è rappresentata dal grafico seguente:



$$\mathcal{M} = \frac{4G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_{\nu_e} \right] \left[\bar{u}_{\nu_e} \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_e \right]$$

- Utilizzando questo elemento di matrice e considerando che ad alte energie la massa dell'elettrone è trascurabile, si ottiene:

$$\sigma(\nu_e + e^- \rightarrow \nu_e + e^-) = \frac{G^2}{\pi} s \quad \text{s è il quadrato dell'energia del centro di massa}$$

- In unità naturali σ ha le dimensioni di $[M]^{-2}$, G ha le dimensioni di $[M]^{-2}$, quindi per far tornare le dimensioni occorre moltiplicare per s
- Dal formalismo dello sviluppo in onde parziali si trova la massima sezione d'urto in uno scattering elastico che sia compatibile con la conservazione dell'unitarietà
- Se ignoriamo lo spin delle particelle, si ha che la massima sezione d'urto possibile è:

$$\sigma_{el}^{max} = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} (2l+1) = \frac{4\pi\hbar^2}{p_{cm}^2} = \frac{4\pi}{p_{cm}^2} \quad (\hbar=1) \quad \text{Scattering in onda S per particelle puntiformi}$$

[ad alte energie neutrino ed elettrone sono levogiri, $\longrightarrow J=0$ (onda S)]

- Quindi: $\frac{G^2}{\pi} s \leq \frac{4\pi}{p_{cm}^2}$; ricordiamo che: $s = (p_\nu + p_e)^2$

- Nel laboratorio $s=2m_e E_0$, mentre nel centro di massa:

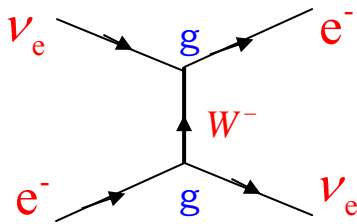
$$s = (2p_{cm})^2 \Rightarrow p_{cm}^2 = \frac{s}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{G^2}{\pi} s \leq \frac{16\pi}{s} \Rightarrow \sqrt{s} \leq 2\sqrt{\frac{\pi}{G}} = 2\sqrt{\frac{\pi}{1.67 \cdot 10^{-5}}} \approx 870 \text{ GeV}$$

Considerando anche gli spin, la sezione d'urto di Fermi viola l'unitarietà quando $\sqrt{s} \approx \sqrt{G} \approx 300 \text{ GeV}$

Bosone vettore intermedio

- Il comportamento divergente della sezione d'urto può essere evitato se, analogia con la QED, si introduce un bosone vettore intermedio come propagatore delle interazioni deboli.
- Il diagramma dello scattering diventa:



Il propagatore di un bosone massivo di spin 1 è del tipo:

$$\frac{g^{\mu\nu} - \frac{q^\mu q^\nu}{M_W^2}}{M_W^2 - q^2}$$

- L'elemento di matrice lo possiamo scrivere come:

$$\mathcal{M} = \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_e \gamma^\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_{\nu_e} \right] \frac{1}{M_W^2 - q^2} \left[\frac{g}{\sqrt{2}} \bar{u}_{\nu_e} \gamma_\mu \frac{1-\gamma^5}{2} u_e \right]$$

- g è una costante di accoppiamento adimensionale
- i fattori $\sqrt{2}$ e $1/2$ vengono introdotti per ottenere la definizione convenzionale di g
- Dato che il range delle interazioni deboli è estremamente piccolo (dell'ordine di 10^{-3} fm) allora la massa del bosone intermedio deve essere molto grande.
- Per processi deboli in cui il q^2 trasferito è piccolo, tipo il decadimento β o il decadimento del muone, si ha che $q^2 \ll M_W^2$, quindi si può trascurare rispetto alla massa del W nell'espressione del propagatore.

- confrontando l'elemento di matrice di Fermi:

$$\mathcal{M} = \frac{G}{\sqrt{2}} \left[\bar{u}_p \gamma^\mu (1-\gamma^5) u_n \right] \left[\bar{u}_e \gamma_\mu (1-\gamma^5) u_\nu \right]$$

con quello in cui c'è il bosone W , si ottiene:

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2}$$

Massa del bosone W

- Dalla relazione precedente si ricava la massa del bosone W

$$\frac{G}{\sqrt{2}} = \frac{g^2}{8M_W^2} \quad \longrightarrow \quad M_W = \sqrt{\frac{g^2 \sqrt{2}}{8G}}$$

- se facciamo l'ipotesi che $g \approx e$, abbiamo:

$$\frac{e^2}{4\pi} = \alpha = \frac{1}{137} \quad \Rightarrow \quad g^2 \approx e^2 = \frac{4\pi}{137} ; \quad G = \frac{10^{-5}}{M_p^2}$$

- Mettendo tutto insieme si ottiene: $M_W = \sqrt{\frac{4\pi \sqrt{2}}{8 \cdot 10^{-5}}} \cdot M_p \approx 37.4 \text{ GeV}$

- in realtà: $e = g \sin(\theta_w) \quad \Rightarrow \quad M_W \approx \frac{37.4}{\sin(\theta_w)} = 80.425 \pm 0.038 \text{ GeV}$

(θ_w è l'angolo weak noto anche come angolo di Weinberg)

Le interazioni deboli sono "deboli" non a causa della costante di accoppiamento piccola, bensì a causa dell'alto valore della massa del bosone W.

- Dato che $g \approx e$ e non è necessario introdurre una nuova carica per comprendere le interazioni deboli.

- Si ha una nuova scala di massa: la scala di Fermi, pari alla massa del bosone W $\approx 100 \text{ GeV}$

- Questo è un caso simile all'elettromagnetismo:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e_m \vec{v} \times \vec{B} \quad (e=e_m \Rightarrow \text{unificazione})$$

- gli effetti magnetici diventano importanti quando v è grande e divengono confrontabili a quelli elettrici

- Quando vi è l'unificazione di due fenomeni viene introdotta in genere una nuova scala; nel caso dell'elettromagnetismo si tratta della velocità della luce.

È la scala che determina l'accoppiamento relativo delle forze