

Capitolo 4: **Interazioni tra particelle e materia** **e** **Metodi di misura**

**Corso di Fisica Nucleare e
Subnucleare I**

Professor Carlo Dionisi

A.A. 2004-2005

Interazione Particelle-Materia

L' interazione particella-materia costituisce il presupposto per tutte le tecniche di rivelazione in Fisica Nucleare e Subnucleare.

Le interazioni tra campo elettrico della particella incidente e mezzo attraversato danno luogo a diversi processi di frenamento quali quelli di **eccitazione/ ionizzazione degli atomi**. Come vedremo questi saranno utilizzati nei rivelatori a gas, negli scintillatori, nei rivelatori a stato solido etc.

Per capire come il trasferimento di energia dipenda dal materiale attraversato, dal tipo di particella e dalla sua velocità, e' necessario descrivere come il campo elettromagnetico associato alla sua carica **TRASFERISCA impulsi agli elettroni del mezzo NEI DIVERSI PROCESSI**.

I vari fenomeni che si manifestano quando una particella carica passa in prossimità di un atomo possono essere descritti in funzione della distanza di avvicinamento al nucleo atomico: b .

1) $b >$ raggio atomico :

Si ha **ECCITAZIONE** e/o **IONIZZAZIONE** del mezzo attraversato (l' atomo interagisce in blocco) con perdita di energia della particella incidente ($\sigma \cong 10^{-17} \text{ cm}^2$): **NON VI E' DEFLESSIONE** della particella incidente.

2) $b \cong$ raggio atomico :

Si ha **ancora ECCITAZIONE** e/o **IONIZZAZIONE** del mezzo attraversato **SENZA DEFLESSIONE**. L' elettrone atomico si puo' considerare libero

3) $b <$ raggio atomico e $b >$ raggio nucleare :

In questa situazione l' effetto piu' importante diventa **LA DEFLESSIONE** della traiettoria della particella incidente nel campo coulombiano del nucleo. Come vedremo, nel caso degli elettroni incidenti si ha anche **PERDITA DI ENERGIA PER IRRAGGIAMENTO**.



Le tecniche sperimentali per la **RIVELAZIONE DELLE PARTICELLE E DELLA RADIAZIONE** si differenziano a seconda della carica e della natura della particella da rilevare:

A) Particelle Cariche

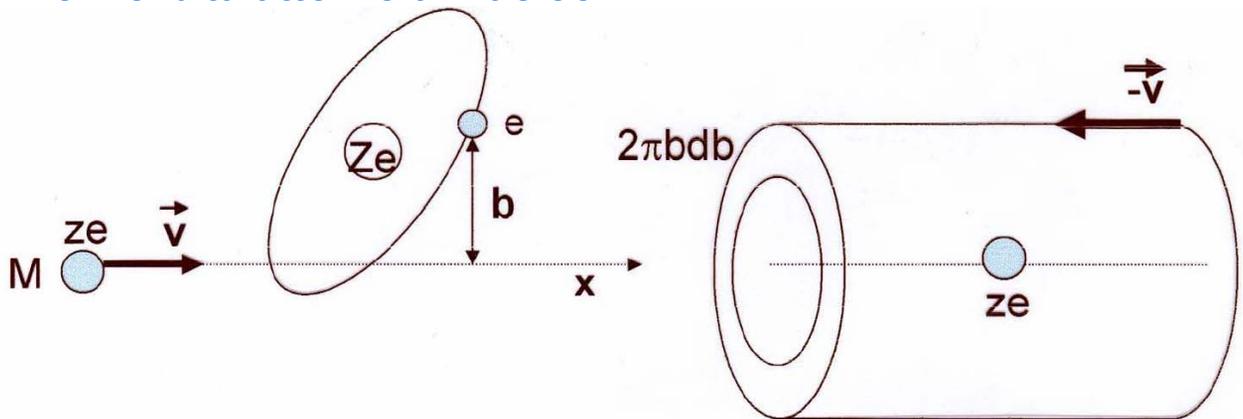
- IONIZZAZIONE DEGLI ATOMI (gas/ liquido/ solido)
- EMISSIONE DI LUCE (di scintillazione, radiazione Cerenkov o di Transizione)

B) Particelle Neutre

- FOTONI (effetto fotoelettrico, effetto compton, produzione di coppie $e^+ e^-$)
- NEUTRONI (urti con nuclei con protoni di rinculo)
- NEUTRINI (diffusione su bersagli di decine e decine di tonnellate)
- DECADIMENTI (π^0 , K^0 , Z^0 etc)

Perdita di Energia per Ionizzazione

Consideriamo un atomo, nucleo di carica Ze con Z elettroni, ed una particella incidente di carica ze massa $M \gg m_e$ e velocità tale da poter considerare fermo l'elettrone nell'orbita attorno al nucleo.



Inoltre l'impulso trasferito durante la collisione sia piccolo in modo che la particella incidente non venga deflessa.

Per simmetria avremo :

$$\Delta \vec{p}_e = \vec{p}'_e = \int e \cdot \vec{\varepsilon}'_{\perp} dt' = \int e \cdot \vec{\varepsilon}'_{\perp} \frac{dx'}{v} \approx \frac{e}{v} \int \varepsilon'_{\perp} dx'$$

con $v \approx$ costante durante l'urto. Applicando Gauss :

$$\Phi(\vec{\varepsilon}') = \int_{S'} \vec{\varepsilon}' \cdot \vec{n}' dS' = 2\pi b \int \varepsilon'_{\perp} dx' = \frac{ze}{\varepsilon_0}$$

Nota Bene : l'indice (') indica un sistema di riferimento solidale con la particella di massa M .

$$p'_e = \frac{e}{v} \cdot \frac{ze}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{b} = \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} \cdot \frac{2b}{v} \quad \text{dove} \quad \frac{2b}{v} = \text{Tempo d'urto} ;$$

$$e \frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b^2} = \text{forza di Coulomb a distanza } b$$

- L' impulso trasferito p'_e e' invariante difatti abbiamo che:

$$\varepsilon_{\perp} = \gamma \varepsilon'_{\perp} \text{ e quindi si contrae di } \gamma;$$

$$\frac{\Delta t'}{\gamma} = \Delta t \text{ e quindi si espande di } \gamma$$

⇒ il prodotto e' quindi invariante.

- Nell' ipotesi $p_e \ll m_e c$:

$$T_e = \frac{p_e^2}{2m_e} = \left(\frac{ze^2}{4\pi\varepsilon_0 b} \right)^2 \cdot \frac{2}{m_e v^2} =$$

$$= 2z^2 \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} \right)^2 \cdot \frac{(m_e c^2)^2}{b^2 m_e v^2}$$

$$T_e = 2m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \frac{r_e^2}{b^2} = \text{Energia perduta dalla particella}$$

di massa M in un singolo urto

$$r_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e c^2} = \text{raggio classico dell' elettrone}$$

- Se n_e e' il numero di elettroni per unita' di volume, in un tratto dx con parametro di impatto tra b e $b+db$ il numero di urti sara' :

$$\text{numero di urti} = n_e \cdot 2\pi b db dx$$

- L'energia perduta sara' allora :

$$\frac{d^2 E}{dbdx} = n_e \cdot r_e^2 \cdot m_e c^2 \cdot \frac{4\pi}{b^2} \cdot b \cdot \frac{z^2}{\beta^2}$$

$$\frac{dE}{dx} = \int_{b_{\min}}^{b_{\max}} 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{db}{b} = 4\pi n_e r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{b_{\max}}{b_{\min}}$$

- b_{\max} : b grande corrisponde a Δt_{urto} grande.
Se Δt_{urto} e' grande rispetto al tempo di rivoluzione dell' elettrone **NON VI SARA' TRASFERIMENTO DI ENERGIA:**

$$\frac{b}{v\gamma} > T_e \quad \Rightarrow \quad b_{\max} \simeq \frac{v\gamma}{\omega_e} = v\gamma T_e$$

- b_{\min} : b NON puo' essere inferiore della dimensione dell' elettrone vista dalla particella incidente:

$$\lambda_e = \frac{\hbar}{p_e} \quad ; \quad p_e = m_e c \beta \gamma \quad : \quad b_{\min} \simeq \frac{\hbar}{m_e c \beta \gamma}$$

- Se il materiale ha numero atomico Z, peso atomico A e densita' ρ :

$$n_e = N_A Z \rho / A$$

Ed otteniamo la formula ricavata da Bohr nel 1915:

$$\frac{dE}{dx} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 \frac{N_A Z \rho}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\hbar \omega_e} \quad \left[\text{eV cm}^{-1} \right]$$

Formula di Bohr

- E' conveniente esprimere lo spessore del materiale dx [cm] come ρdx [gr cm^{-2}].

Ponendo :

$$C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A = 0.30 \frac{\text{MeV}}{\text{gr} \cdot \text{cm}^{-2}}$$

La PERDITA DI ENERGIA PER UNITA' DI PERCORSO :

$$\frac{dE}{\rho dx} = C \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \ln \frac{m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{\langle I \rangle} \left[\frac{\text{MeV}}{\text{gr} \cdot \text{cm}^{-2}} \right]$$

dove $\langle I \rangle = \hbar \cdot \langle \omega_e \rangle =$ Potenziale medio di Ionizzazione

E' conveniente esprimere lo spessore del materiale come ρdx [gr cm^{-2}] perche' otteniamo una perdita di energia quasi indipendente dal tipo di atomo:

$$\frac{dE}{\rho dx} \propto \left(\frac{Z}{A} \right) \ln \frac{\text{costante}}{Z}$$

- Dalla relazione che lega l' energia perduta in un singolo urto in funzione di b abbiamo :

$$b^2 = 2r_e^2 \frac{z^2}{\beta^2} \frac{m_e c^2}{E_e} \quad \longrightarrow \quad |2 \cdot b \cdot db| = 2r_e^2 \frac{z^2}{\beta^2} m_e c^2 \frac{dE_e}{E_e^2}$$

La Probabilita' che percorrendo un tratto unitario la particella subisca una collisione con parametro d' urto tra b e $b+db$ sara' :

$$d\sigma = (2\pi b) \cdot db \cdot n_e = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2} \frac{dE_e}{E_e^2}$$

$$\frac{d\sigma}{dE_e} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 n_e \frac{z^2}{\beta^2} \frac{1}{E_e^2}$$

vediamo quindi che : le collisioni con

trasferimento di energia E_e elevato SONO RARE.

- Se invece di considerare l' urto con gli **ELETTRONI** (carica = e ; massa = m_e ; densita' = n_e) avessimo considerato quello con i **NUCLEI** (carica = Ze ; massa $\approx 1840 A m_e$;) dovremmo moltiplicare la dE/dx per $Z/(1840 A) \approx 2.5 \cdot 10^{-4}$:

Il contributo dovuto alle collisioni con i nuclei puo' essere del tutto trascurato !

- La formula di Bohr e' derivata in modo classico ed e' una approssimazione molto buona per particelle di massa $M \gg m_e$.
Un calcolo piu' accurato e' stato fatto da Bethe e Block nel 1930 tenendo conto degli effetti quantistici :

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 \frac{z^2 Z}{\beta^2} \frac{\rho N_A}{A} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e v^2 \gamma^2 T_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta \right]$$

Formula di Bethe e Block

Dove δ e' il termine di correzione degli effetti di densita' di carica (vedi di seguito);

E T_{\max} e' la massima energia cinetica trasferita all' elettrone in un singolo urto.

- Per **ELETTRONI e POSITRONI** il termine sotto logaritmo va modificato per tener conto che in questo caso nell' urto le masse sono uguali.
INOLTRE nel caso dell' urto elettrone-elettrone si deve tener anche conto del fatto che le particelle sono **IDENTICHE** :



FORZE di SCAMBIO



Troviamo $T_{\max} = \frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{1 + 2\gamma \frac{m_e}{M} + \left(\frac{m_e}{M}\right)^2} \approx 2m_e v^2 \gamma^2$ per $M \gg 2\gamma m_e$

Con questa approssimazione otteniamo quindi:

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 \cdot \frac{z^2 Z}{\beta^2} \cdot \frac{\rho N_A}{A} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e v^2 \gamma^2 \cdot 2m_e v^2 \gamma^2 c^2}{I^2 \cdot c^2} \right) - 2\beta^2 - \delta \right]$$

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi r_e^2 m_e c^2 \cdot \frac{z^2 Z}{\beta^2} \cdot \frac{\rho N_A}{A} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - 2\beta^2 - \delta \right]$$

ed infine: $-\frac{dE}{dx} = 4\pi r_e^2 m_e c^2 \cdot \frac{z^2 Z}{\beta^2} \cdot \frac{\rho N_A}{A} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right]$

Per semplificare definiamo la costante

$C = 4\pi r_e^2 m_e c^2 N_A \approx 0.307 \text{ MeV} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{cm}^2$ e dividendo per ρ abbiamo:

$$-\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx} = C \cdot \frac{z^2}{\beta^2} \cdot \frac{Z}{A} \cdot \left[\ln \left(\frac{2m_e c^2 \beta^2 \gamma^2}{I} \right) - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right] \text{ MeV} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot \text{cm}^2$$



Osserviamo che:

a) $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} \propto z^2$: allo stesso β e nello stesso mezzo

una particella α ($z=2$) perde 4 volte l'energia persa da un protone ($z=1$);

b) $-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dE}{dx} \propto \frac{Z}{A}$: a parte l'idrogeno, $\frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2}$ per la

maggior parte dei materiali.

Mass thickness



Ripetiamo che e' molto utile introdurre la quantita':

$$\text{Mass thickness} \equiv x = \rho \cdot L$$

$$[x] = \text{g} \cdot \text{cm}^{-2}$$

Material density

Material thickness



E' utile per "normalizzare" lo spessore del materiale alla sua densita'.



Normalmente "spessori di massa" uguali di materiali diversi hanno lo stesso effetto sullo stesso tipo di radiazioni.

$$0.307 \text{ MeV cm}^2 \text{ g}^{-1}$$

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi N_A \alpha^2 (\hbar c)^2}{m_e} \cdot \frac{Z}{A} \cdot z^2$$

$$\cdot \frac{1}{\beta^2} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 \beta^2}{I} \right) - \beta^2 - \delta(\gamma) - \frac{2C}{Z} \right]$$

Mean ionization potential
(~10 Z[eV])

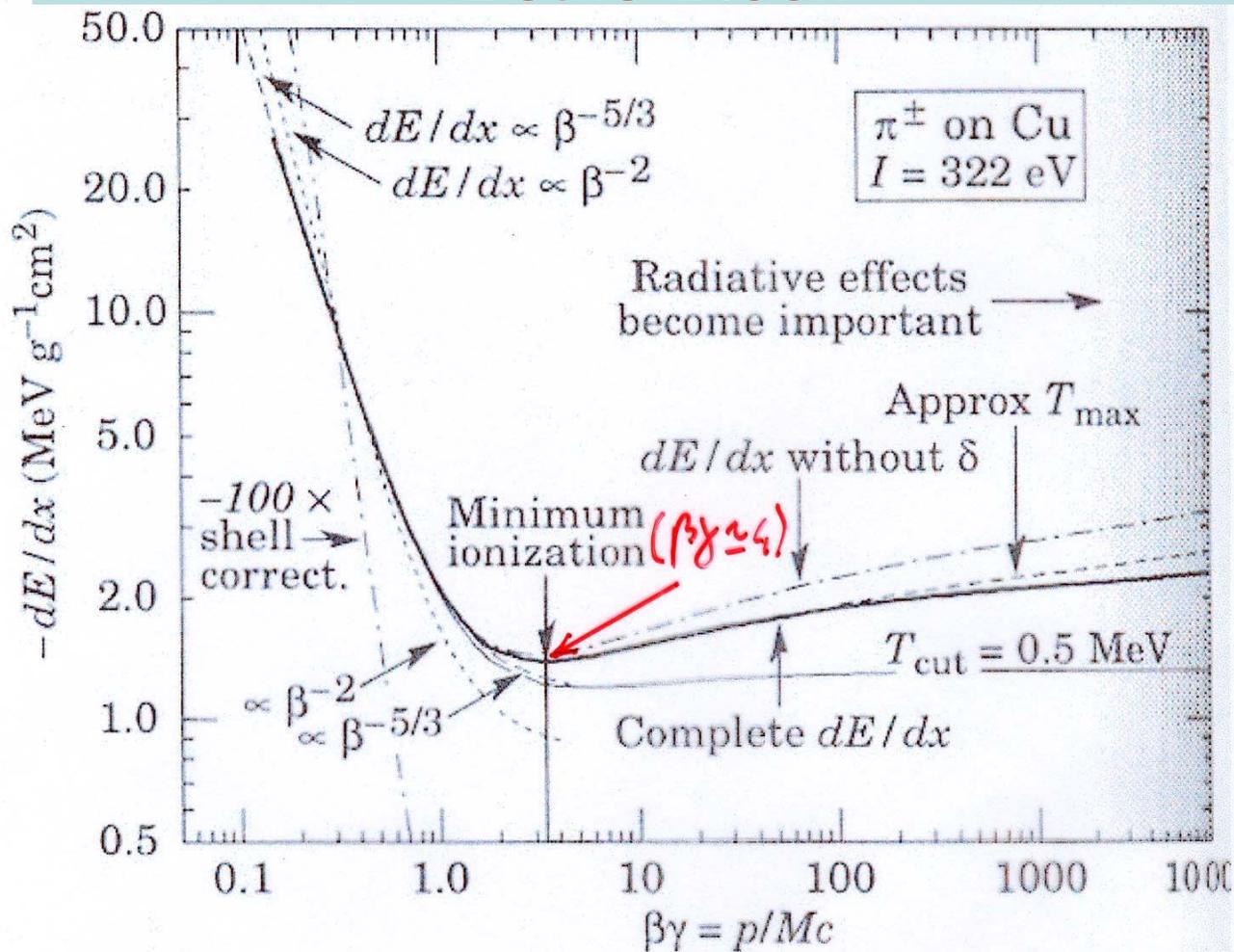
"Density" correction

"Shell" correction

Traversed medium

Incident particle

Bethe-Block



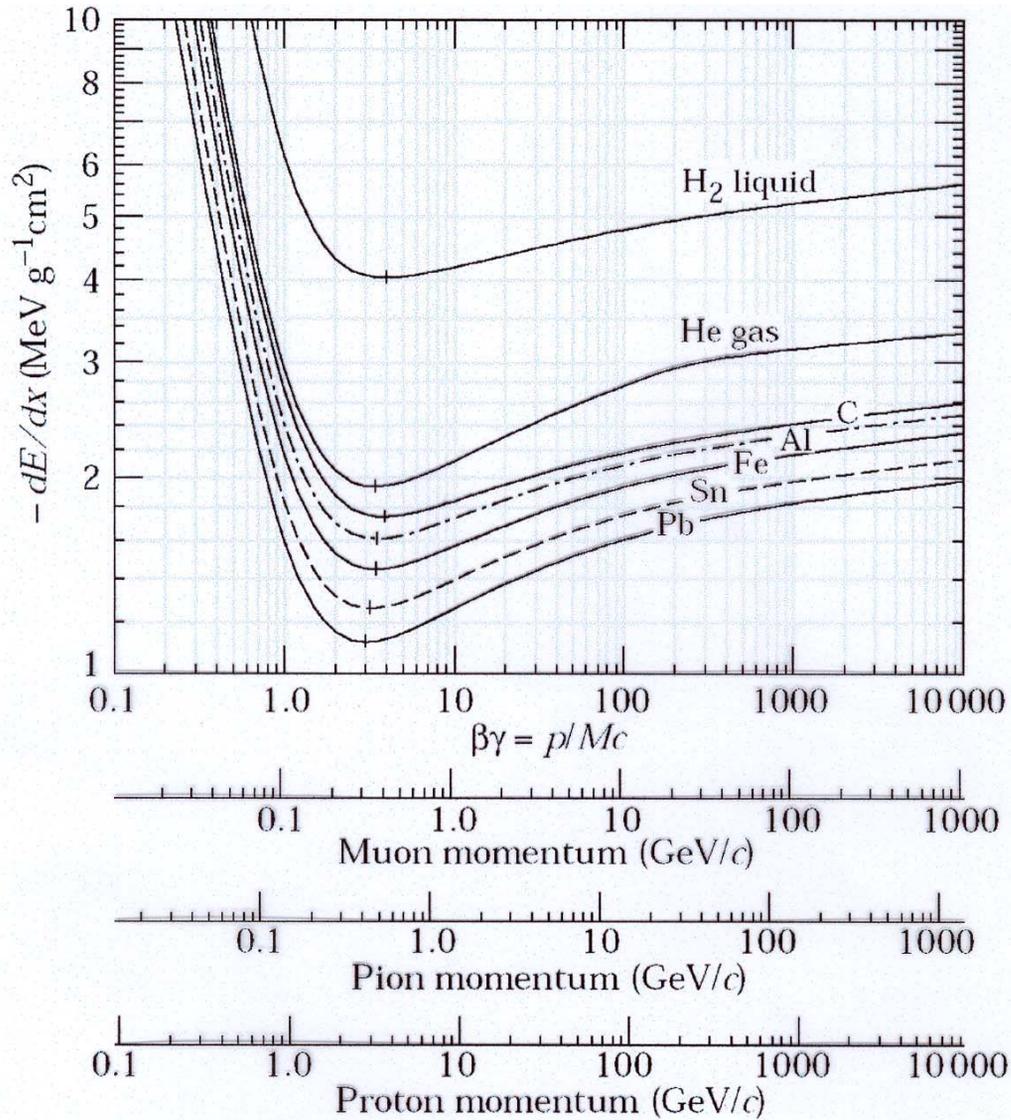
•La formula di Bethe -Block e' precisa al livello di qualche per cento per particelle pesanti fino a qualche centinaia di GeV.

⇒ Ad energie molto elevate (TeV), la perdita di energia per radiazione diviene importante e la formula deve essere completata con termini supplementari.

⇒ Ad energie molto basse, quando la velocita' della particella e' paragonabile a quelle degli elettroni atomici, la formula NON e' valida

•Come detto δ e' la correzione a dE/dx dovuta all' effetto densita': all' aumentare dl' energia della particella incidente il suo campo elettrico si estende nello spazio e la distanza di interazione aumenta come $\ln\beta\gamma$. Tuttavia il mezzo attraversato in conseguenza di questo si polarizza ed elimina la crescita logaritmica

dE/dx



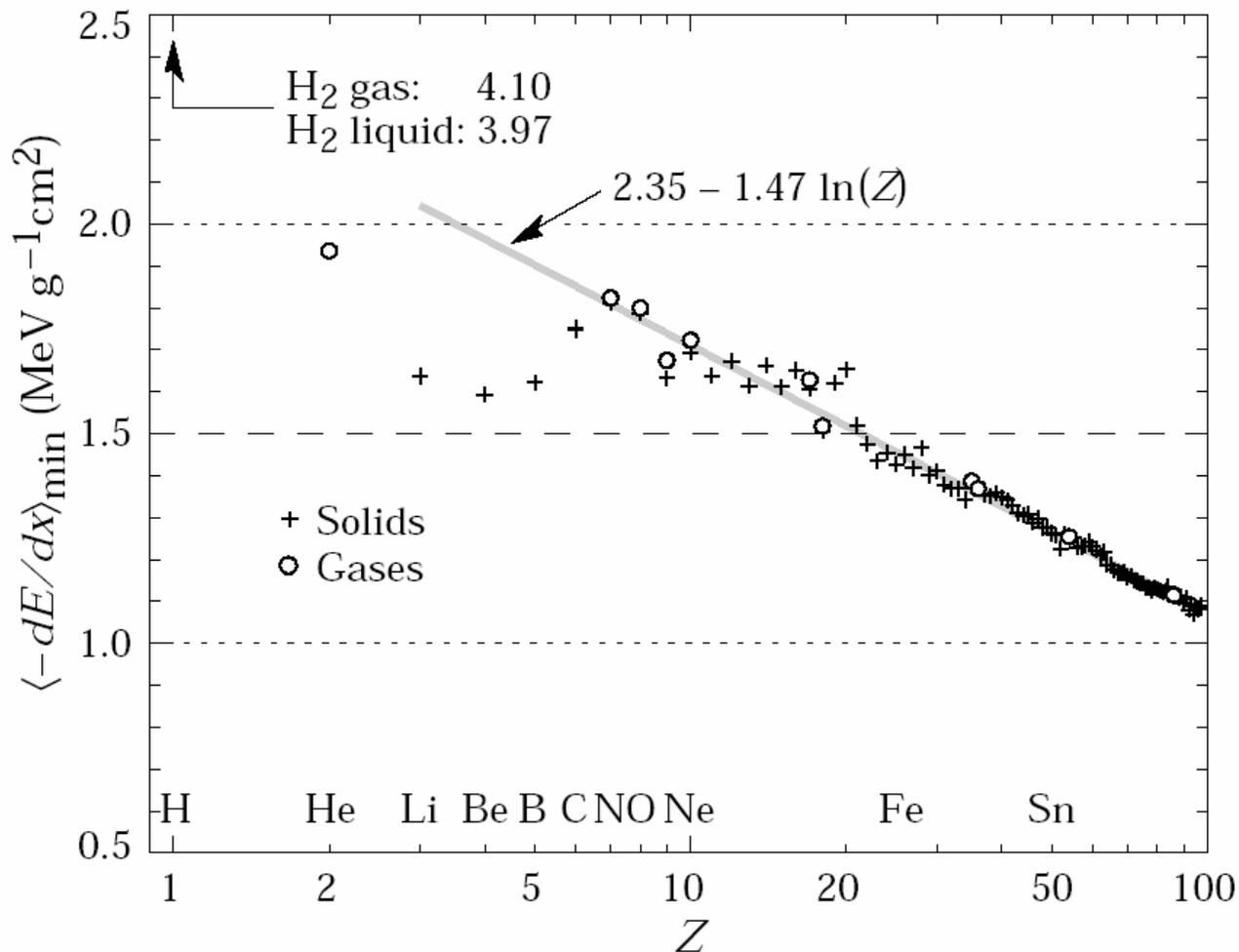
$\frac{1}{\rho} \frac{dE}{dx}$ dipende poco dal materiale

Per $\text{H}_2 \rightarrow \frac{Z}{A} = 1$; In generale $\frac{Z}{A} \approx \frac{1}{2}$

Esempio:

Un protone di 10 MeV perde la stessa energia attraversando 1 g cm^{-2} di rame, alluminio e ferro.

Ionizzazione al minimo Vs Z



- ◆ La perdita di energia **AL MINIMO** vale **1 ÷ 2 MeV g⁻¹ cm⁻²**
Le particelle al Minimo di Ionizzazione si chiamano
MIP: Minimum Ionizing Particle.
- ◆ La posizione del minimo passa da **$\beta\gamma=3.5$ a $\beta\gamma=3.0$**
per $Z=7$ a $Z=100$.

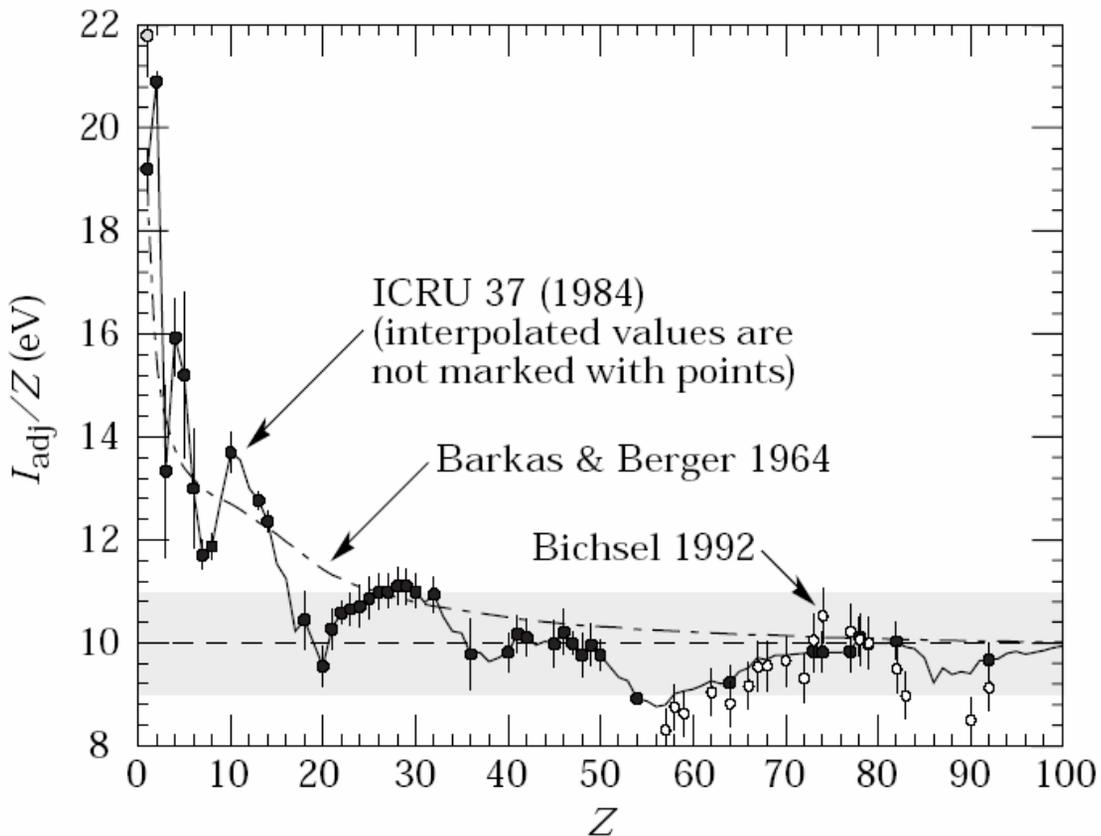
- **La costante di ionizzazione I**, chiamato anche il potenziale medio di eccitazione, raggruppa le proprietà globali degli atomi (livelli di eccitazione e le sezioni d'urto relative a queste eccitazioni).



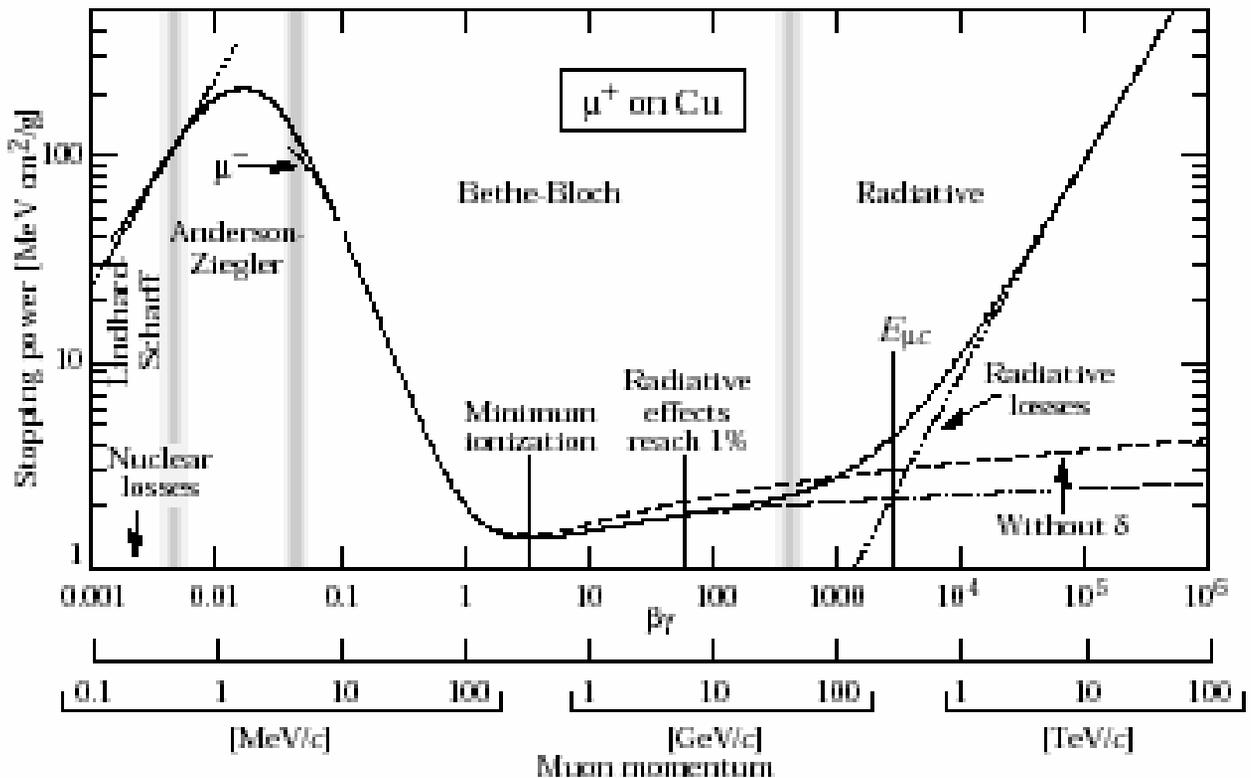
E' un valore difficile da calcolare. Si e' preferito misurarlo per diversi materiali e poi parametrizzarlo in funzione di Z:

$$\frac{I}{Z} = 12 + \frac{7}{Z} \text{ eV} \quad \text{per } Z < 13$$

$$\frac{I}{Z} = 9.76 + 58.8 \cdot Z^{-1.19} \text{ eV} \quad \text{per } Z \geq 13$$



Bethe-Bloch



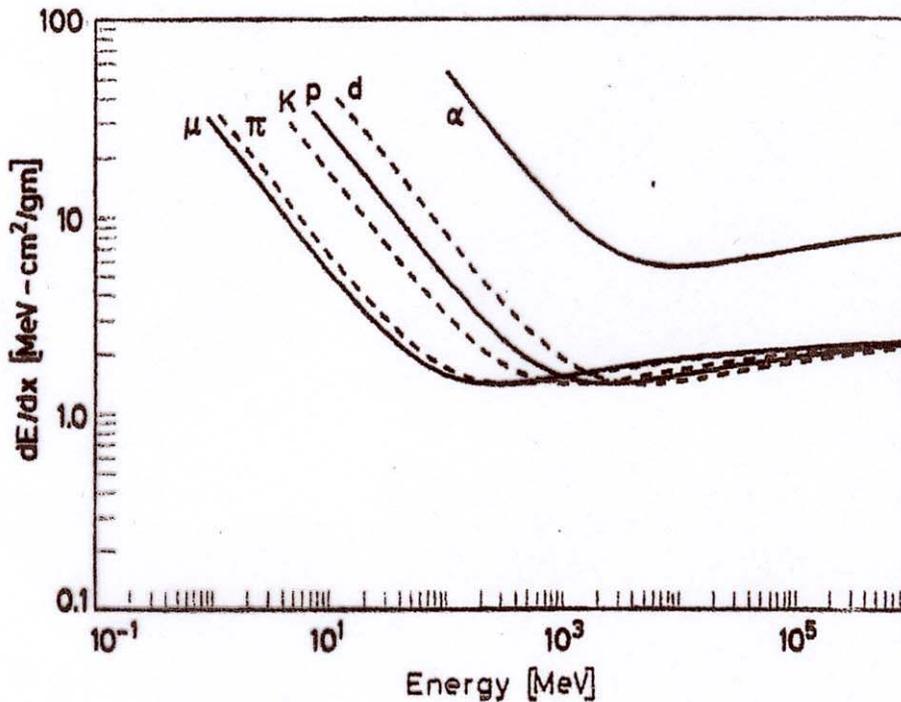
- ◆ Per piccoli valori di $\beta\gamma$ (< 0.05) la teoria di Bethe-Bloch non funziona piu'. La velocita' della particella e' confrontabile con quella degli elettroni atomici \Rightarrow correzioni di shell: C/Z
- ◆ La particella tende a catturare elettroni riducendo il campo elettrico e perdendo quindi meno energia

Bethe-Block in funzione dell' energia

In un dato materiale la perdita di energia per dE/dx dipende solo dalla carica e dalla velocità della particella incidente.

Questo immediatamente suggerisce la seguente " **Legge di Scala** " :

$$-\frac{dE_2}{dx}(T_2) = -\frac{z_2^2}{z_1^2} \cdot \frac{dE_1}{dx} \left(T_2 \frac{M_1}{M_2} \right)$$



A parità di energia cinetica, le particelle più pesanti perdono più energia :

Vediamo che per energie minori del minimo ciascuna particella ha una curva di dE/dx distinta dalle altre: questa caratteristica può essere usata per distinguere le varie particelle tra di loro.

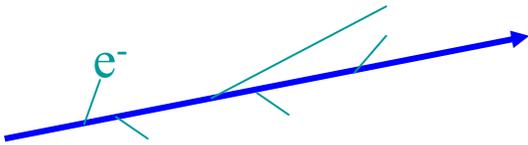
È anche evidente che ad energie sempre più basse l'energia persa per unità di lunghezza attraversata sarà sempre più grande : **curve di Bragg**.

Code di Landau

La granularità limitata dei rivelatori permette solo di misurare le energie ΔE depositate in spessore finito δx di materiale

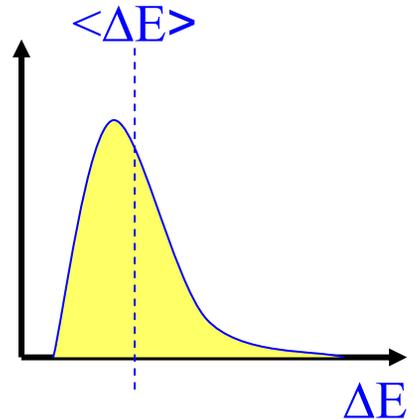
Per **spessori sottili** (e materiali a bassa densità):

→ si hanno poche collisioni, alcune delle quali con grande energia trasferita.



→ Le distribuzioni della perdita di energia evidenziano grandi fluttuazioni per le perdite di grandi quantità di energia:

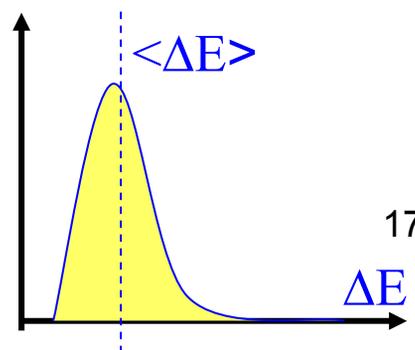
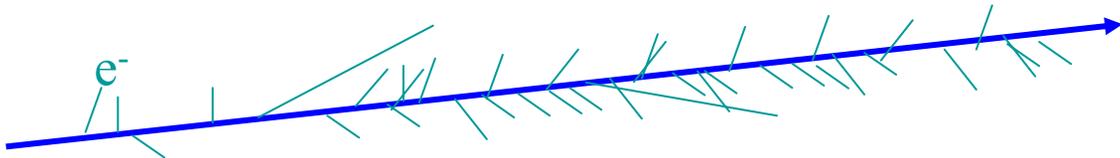
"Landau tails"



Per grandi spessori e materiali ad alta densità:

→ Molte collisioni.

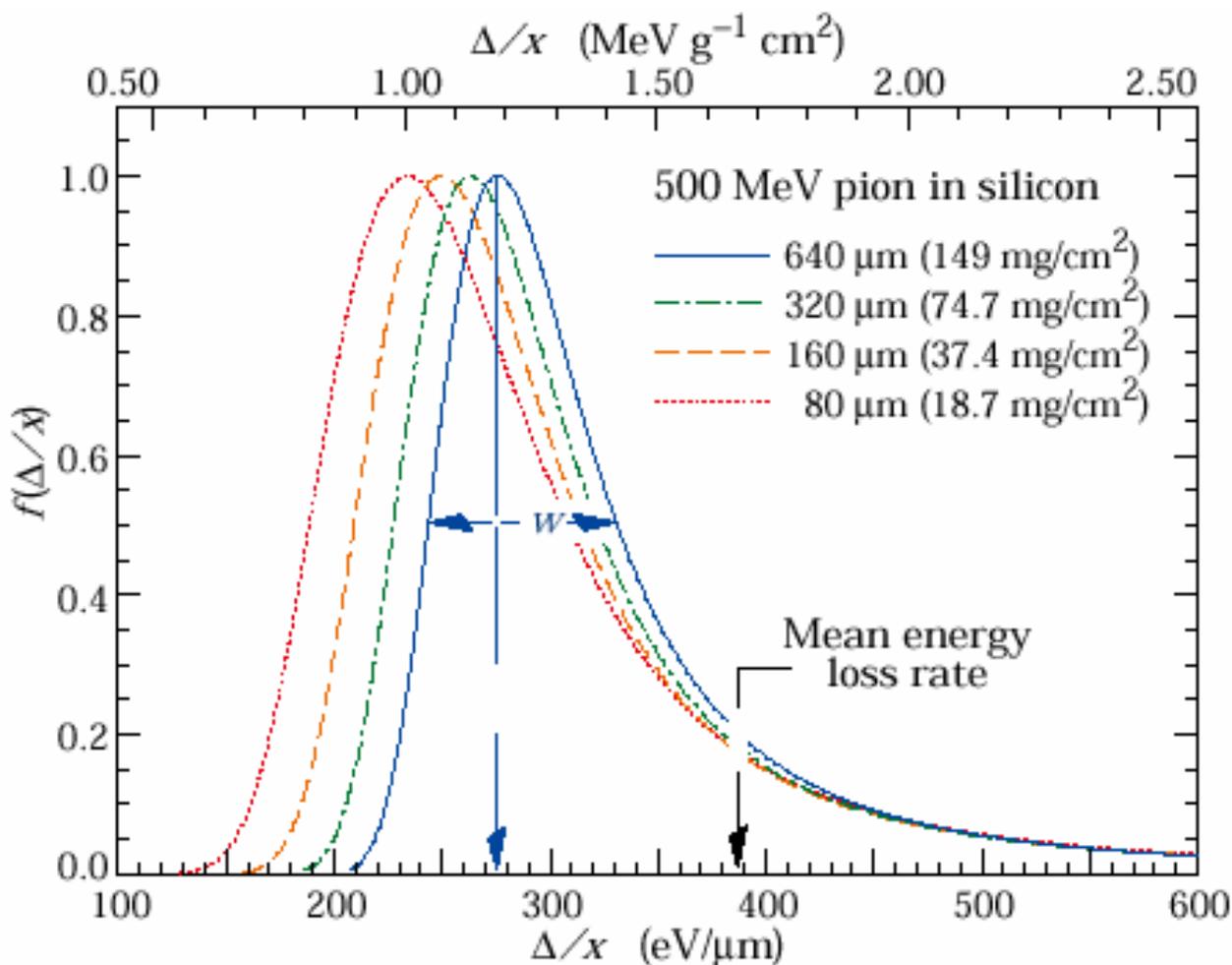
→ Teorema del Limite Centrale → Distribuzioni Gaussiane.



Fluttuazioni Statistiche in dE/dx

- ◆ Le collisioni sono indipendenti l'una dall'altra: il fenomeno è **STATISTICO**: particelle identiche attraversano uno stesso spessore x con diverse $(dE/dx)_{ioniz}$.
- ◆ Le quantità calcolate rappresentano quindi solo valori medi !
- ◆ Abbiamo dimostrato che **SONO MOLTO PIU' PROBABILI gli URTI CON PICCOLE E'** (grandi b e piccoli Δp) che producono elettroni di qualche decine di eV.

Le collisioni con grande Δp (raggi delta) sono piu' rare e producono elettroni di centinaia di eV.



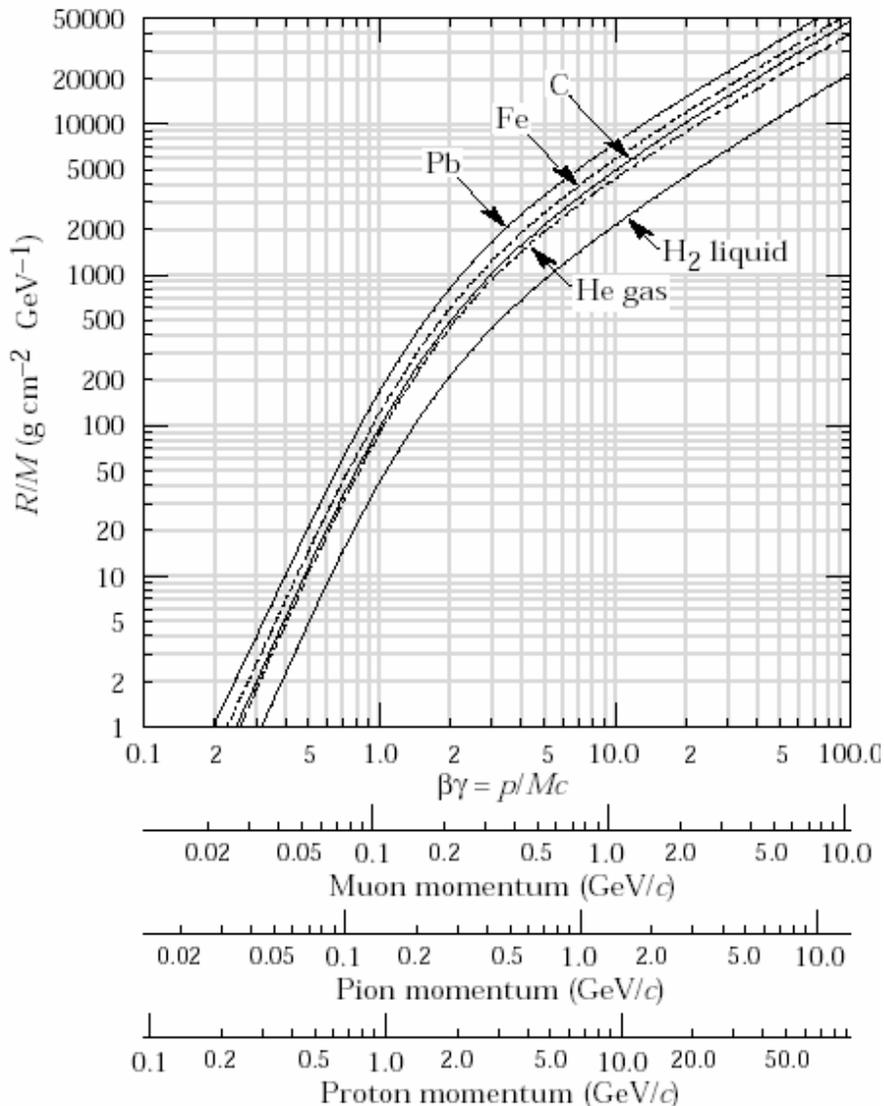
Percorso Residuo: Range

Si definisce **“RANGE”** il cammino che una particella può compiere entro un materiale prima di perdere tutta la sua energia cinetica.

Sia

$$-\frac{dE}{dx} = f(E) \rightarrow dx = -\frac{dE}{f(E)}$$
$$\int_0^R dx = -\int_E^0 \frac{dE}{f(E)} = \int_0^E \frac{dE}{f(E)} = \int_0^E \frac{dE}{\left(-\frac{dE}{dx}\right)_{\text{ioniz.}}} = R(E)$$

Naturalmente $R(E) \geq x$ ed inoltre le fluttuazioni statistiche in dE/dx si riflettono su R (**straggling**).



Range

- ◆ Esempio: ricavare il range per dei K^+ ($M_{K^+} = 494 \text{ MeV}/c^2$) di impulso $p = 700 \text{ MeV}/c$ nel piombo:

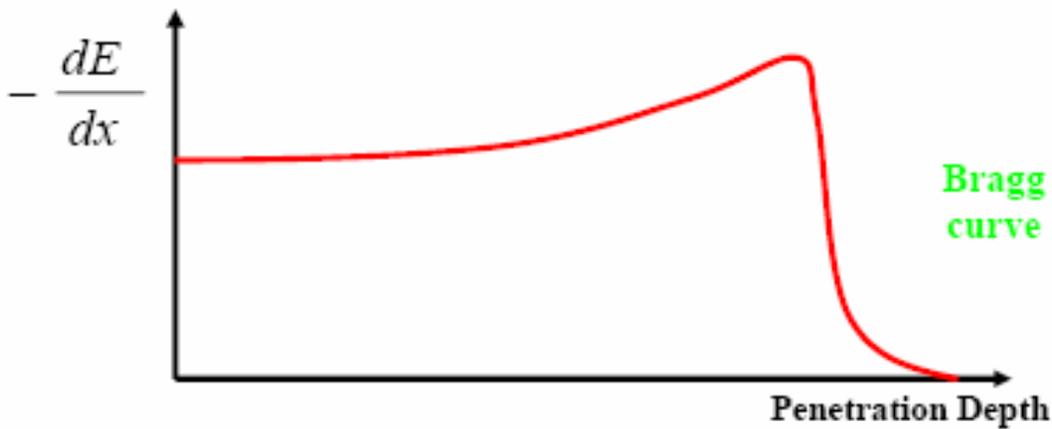
$\beta\gamma = 1.42$ e dal grafico per il piombo si ottiene $R/M = 396$ da cui: $R = 396 M_{K^+} = 195 \text{ gr cm}^{-1}$

$$R = \rho_{pb} 195 = 11.35 \cdot 195 = 2213.25 \text{ cm}$$

Naturalmente il K^+ NON ha bisogno di 22 m per essere assorbito: **vedi le interazioni adroniche !**

Il range e' utile solo per adroni di bassa energia ($R \leq \lambda$) e per muoni di energie inferiori a 200-300 GeV.

Penetration Depth



- ☆ L' energia per unita' di lunghezza e' depositata di piu' verso la fine del cammino nel materiale dipendendo la perdita di energia da $1/\beta^2$.

Questo e' utile nelle applicazioni mediche per la cura del cancro:

⇒ Alte dosi sui tessuti maligni posizionati dentro il corpo

⇒ minima energia depositata nei tessuti sani che lo precedono.

Diffusione Coulombiana Multipla

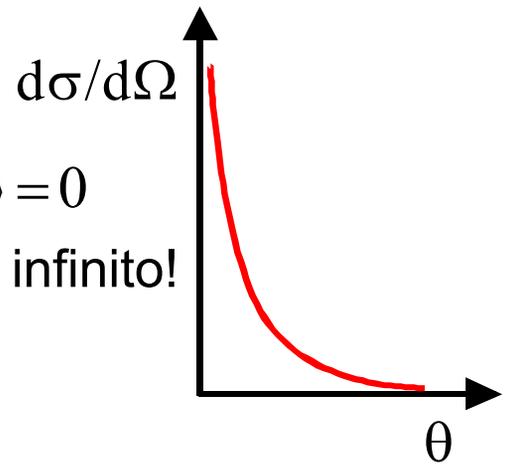
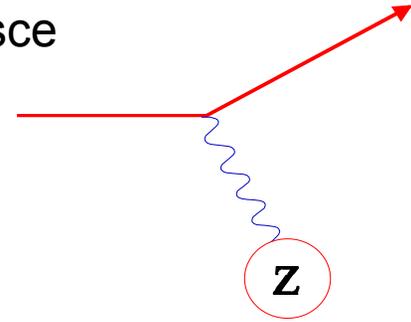
Scattering

Una particella incidente con carica z interagisce con una targhetta con nuclei di carica Z .
La sezione d'urto per questo processo elettromagnetico e':

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 4zZr_e^2 \left(\frac{m_e c}{\beta p} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \theta/2}$$

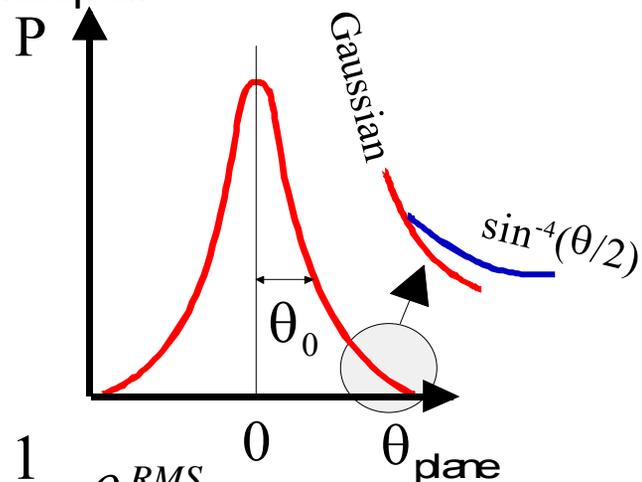
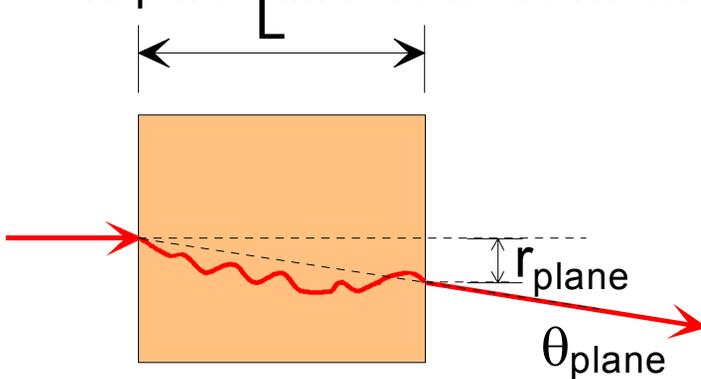
Rutherford formula

- L'angolo medio di diffusione e' $\langle \theta \rangle = 0$
- La sezione d'urto per $\theta \rightarrow 0$ e' = infinito!



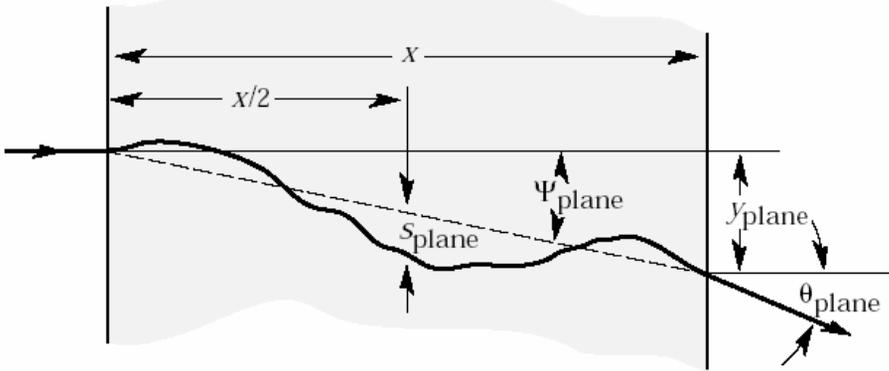
Multiple Scattering

Per un materiale sufficientemente spesso
→ la particella subira' diffusione multipla.



$$\theta_0 = \theta_{plane}^{RMS} = \sqrt{\langle \theta_{plane}^2 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}} \theta_{space}^{RMS}$$

Diffusione Coulombiana Multipla



- ◆ Nella ipotesi che le successive collisioni siano tra loro **INDIPENDENTI** e' ragionevole assumere che la distribuzione dell' angolo medio di diffusione sia **Gaussiana** e che sia centrata a zero con varianza data da:

$$\langle \vartheta^2 \rangle = \frac{\int \vartheta^2 \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}{\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega}; \quad \bar{\vartheta} = \sqrt{\langle \vartheta^2 \rangle} = 21(\text{MeV}) \times \frac{z}{c\beta p} \sqrt{\frac{x}{X_0}}$$

- ◆ Dove X_0 e' la **Lunghezza di Radiazione** definita come:

$$\frac{1}{X_0} = 4r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \ln \left(183 \times Z^{-\frac{1}{3}} \right)$$

$$\bar{\theta}_{spazio} = \sqrt{2} \times \bar{\theta}_{proiettato}$$

Lunghezza di radiazione ed Energia Critica

Nucleo	Z	X_0 (g cm ⁻²)	E_c (MeV)
H	1	63.1	340
He	2	94.3	220
C	6	42.7	103
Al	11	24.0	47
Fe	26	6.4	24
Pb	82	6.4	6.9

Diffusione Coulombiana Multipla

◆ Esercizio:

elettroni da $p_e = 20 \text{ MeV}$ attraversano uno spessore di piombo di 0.5 mm . Sapendo che la densità del piombo è

$$\rho_{\text{pb}} = 11.35 \text{ g/cm}^3; \quad \text{e che}$$

$$X_0(\text{piombo}) = 6.37 \text{ g/cm}^2,$$

calcolare l'angolo quadratico medio di diffusione dovuto allo scattering multiplo coulombiano.

Soluzione:

$$X_0(\text{piombo}) = X_0 / \rho_{\text{pb}} = 0.56 \text{ cm}$$

$$\sqrt{\langle \theta^2 \rangle} = 21 \times \frac{z}{\beta p} \sqrt{\frac{x}{X_0}} = 6^\circ$$

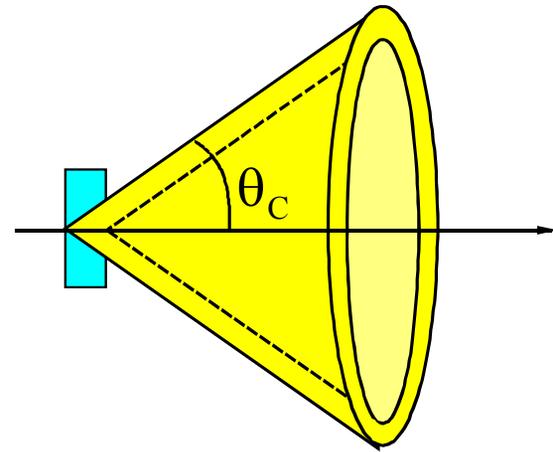
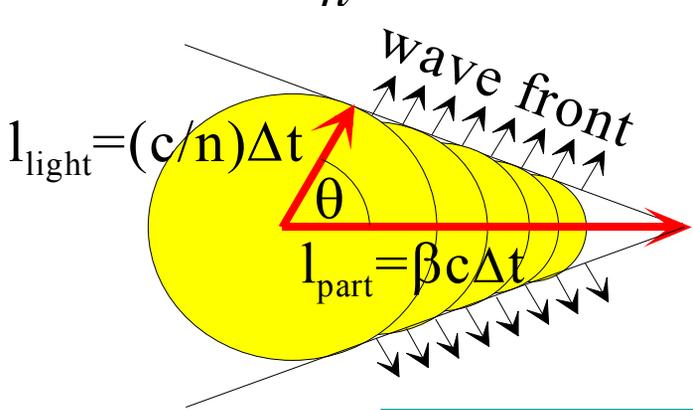
◆ In aria [$X_0(\text{aria}) = 330 \text{ m}$] si ottengono 6 gradi per $x = 3.3 \text{ m}$.

Effetto Cerenkov

Radiazione Cerenkov

Si ha emissione di radiazione Cerenkov quando una particella carica passa in un mezzo dielettrico con velocità tale che :

$$\beta \geq \beta_{thr} = \frac{1}{n} \quad n : \text{indice di rifrazione}$$



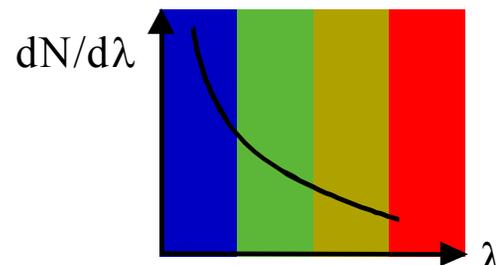
$$\cos \theta_C = \frac{1}{n\beta}$$

with $n = n(\lambda) \geq 1$

$$\beta_{thr} = \frac{1}{n} \rightarrow \theta_C \approx 0 \quad \text{soglia}$$

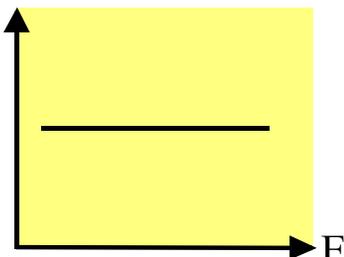
$$\theta_{max} = \arccos \frac{1}{n} \quad \text{Angolo 'saturated' } (\beta=1)$$

Numero di fotoni emessi per unita' di lunghezza e intervallo unitario di lunghezza d' onda:



$$\frac{d^2 N}{dx d\lambda} = \frac{2\pi z^2 \alpha}{\lambda^2} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right) = \frac{2\pi z^2 \alpha}{\lambda^2} \sin^2 \theta_C \frac{dN}{dE}$$

$$\frac{d^2 N}{dx d\lambda} \propto \frac{1}{\lambda^2} \quad \text{with } \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{E} \quad \frac{d^2 N}{dx dE} = \text{const.}$$



Effetto Cerenkov

- ◆ parte dell' energia persa da particelle cariche ad alto β per polarizzare il dielettrico e' riemessa coerentemente con uno spettro di frequenza continuo e con fotoni linearmente polarizzati.

$$\theta_{\max} = \arccos \frac{1}{n} \quad \theta_C > 0$$

- ◆ $p > p_{\text{soglia}} = m v_{\text{soglia}} \gamma_{\text{soglia}} = m \beta_{\text{soglia}} c \gamma_{\text{soglia}} =$

$$m \beta_{\text{soglia}} c \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta_{\text{soglia}}^2)}} = m \frac{1}{n} c \frac{n}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

da cui :

$$pc \sqrt{n^2 - 1} > mc^2$$

- ◆ La radiazione Cerenkov viene utilizzata per individuare quella classe di particelle di dato momento p in grado di emettere luce in un mezzo di indice di rifrazione n : **in grado cioe' di selezionare particelle di massa** tale da soddisfare la seguente condizione:

$$mc^2 < pc \sqrt{n^2 - 1}$$

- ◆ Per identificare particelle di qualche GeV di impulso occorre utilizzare materiale trasparente con indice di rifrazione piu' vicino possibile a 1:

Aerogel, Freon, miscele Ar-Ne, etc con i quali variando la pressione e' possibile lavorare con indice di rifrazione n da 1.0001 a 1.002

Effetto Cerenkov

- ◆ L' **Energia Persa per effetto Cerenkov** e' data (Frank e Tamm 1937) da

$$\left(-\frac{dE}{dx} \right)_{Cer} = \frac{4\pi z^2 e^2}{c^2} \int_{\beta n > 1} v dv \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2} \right)$$

- ◆ Corrisponde a qualche keV per cm; quindi a circa un millesimo della dE/dx per ionizzazione
- ◆ Esercizio: sia $\beta=0.96$ e $\rho=1 \text{ gr/cm}^3$ inoltre l' energia media di un fotone Cerenkov sia di circa 4 eV e supponiamo di ottenere 500 fotoni. Avremo:

$$1/\rho \times (dE/dx)_C = 500 \times 4 / 1 \cong 2 \text{ KeV} / (\text{gr cm}^{-2})$$

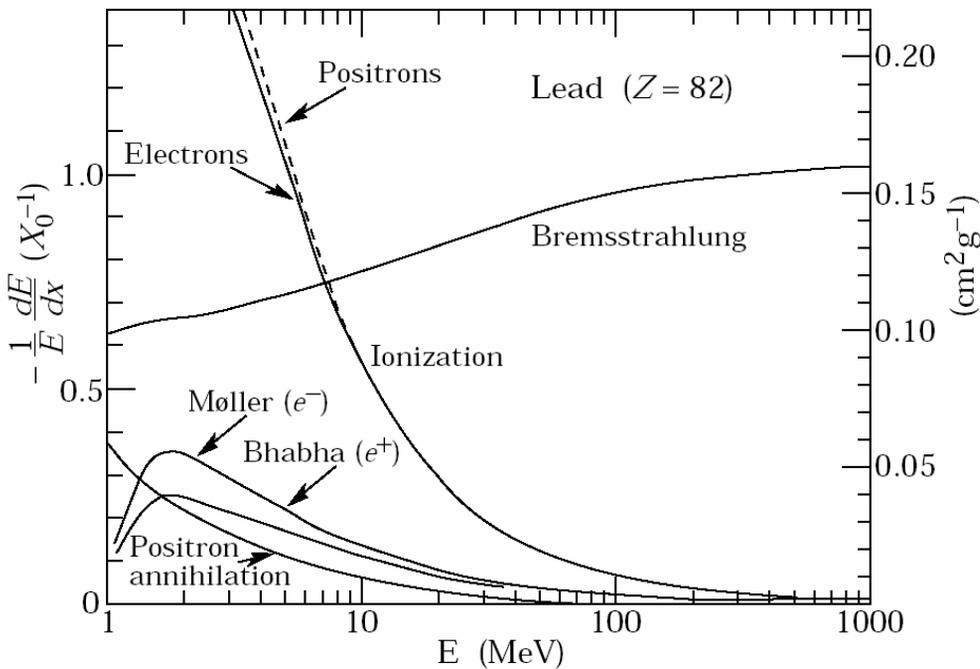
Mentre:

$$1/\rho \times (dE/dx)_{ioniz} \cong 2 \text{ MeV} / (\text{gr cm}^{-2}) \cong 1000 (1/\rho \times dE/dx)_C$$

$$N_\gamma / \text{cm} \cong 500 \times \sin^2 \theta$$

- ◆ quindi, essendo θ funzione di n , il numero di fotoni da effetto Cerenkov dipende da n .

Perdita di energia per elettroni e positroni



- ◆ La perdita di energia per radiazione, " **bremsstrahlung** " e' data da

$$\left(-\frac{dE}{dx} \right)_{rad} = 4r_e^2 \alpha \frac{N_A Z^2 \rho}{A} \left\{ \ln \left[\left(\frac{183}{Z^3} \right) + \frac{1}{18} \right] \right\} \times E$$

$$\left(-\frac{dE}{dx} \right)_{rad} \cong \frac{E}{X_0}; E = E_0 e^{-\frac{x}{X_0}}$$

$$dove \Rightarrow E(X_0) = \frac{E_0}{e}$$

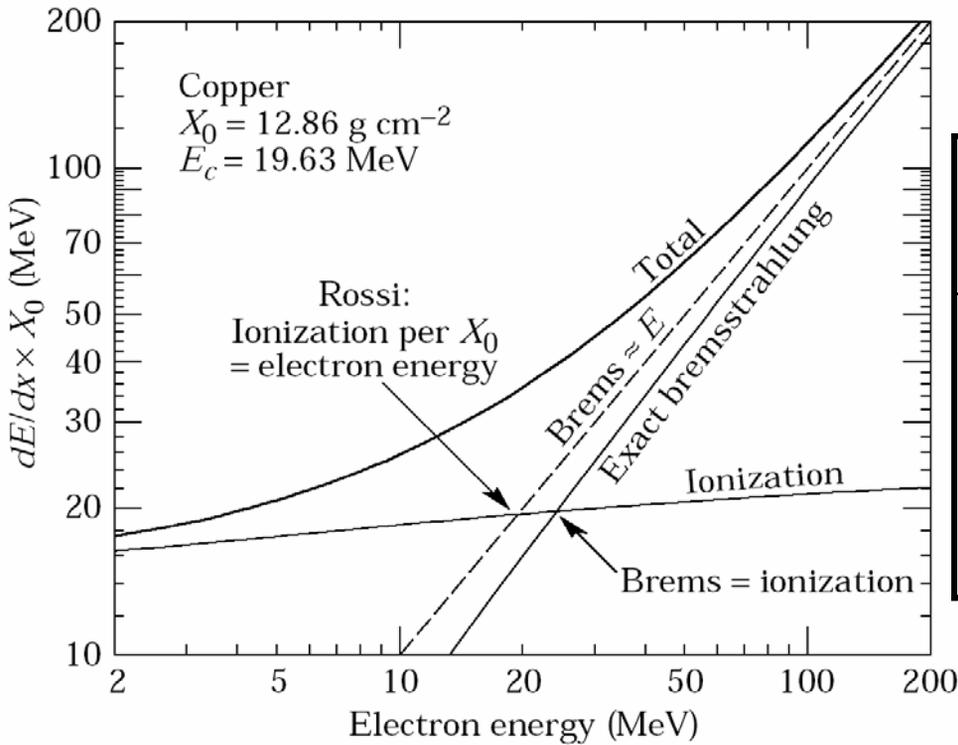
- ◆ Ricordiamo che molti fenomeni fisici avvengono circa nello stesso modo attraversando lo stesso spessore di materiale espresso in unita' di X_0 (la lunghezza di radiazione) :

i) ΔE in Pb \cong Cu per $\Delta x/X_0$ uguali

ii) $\langle \theta \rangle$ in " " " "

iii) Prod di $e^+ e^-$ da γ " etc

Energia Critica



Materiale	En Critica (MeV)
Pb	9.5
Cu	24.8
Fe	27.4
Al	51.0
Lucite	100.0

- ◆ L' energia Critica e' definita dalla condizione :

$$\left(\frac{dE}{dx} \right)_{ioniz.} = \left(\frac{dE}{dx} \right)_{rad.}$$

$$E_c = \frac{600}{Z} \text{ MeV}$$

- ◆ Ricordiamo che si tratta sempre di valori medi e che le fluttuazioni sono molto importanti

Perdita di energia per elettroni e positroni

- ◆ Il campo elettrico di un nucleo accelera e decelera le particelle cariche che attraversano il materiale causando la loro perdita di energia per emissione di fotoni di “**bremsstrahlung**”.
Queste perdite sono trascurabili per particelle non relativistiche e dominanti per quelle relativistiche.
- ◆ Inoltre elettroni e positroni tendono a “diffondersi” nel materiale anziché ad attraversarlo, per cui il concetto di range perde per essi molto del suo significato.
- ◆ Se il parametro di impatto b è grande rispetto al raggio del nucleo r_N , e piccolo rispetto a quello atomico r_a , il campo che agisce sulla particella durante il processo di radiazione è in pratica il campo coulombiano di una carica puntiforme Ze al centro del nucleo.
- ◆ Se invece b è dell'ordine di r_a o più grande, si deve tener conto dell'effetto di schermo dovuto agli elettroni.
- ◆ Se b è dell'ordine di r_N , la carica del nucleo, come vedremo in seguito, non si può considerare puntiforme.
- ◆ Si dimostra che i processi di radiazione degli elettroni avvengono a distanze grandi rispetto a r_N , per cui il nucleo può sempre essere considerato una carica puntiforme mentre l'effetto di schermo degli elettroni è un effetto importante.
- ◆ $\sigma(\text{brems}) \propto (e^2/M)^2$ da cui
- ◆ $\Delta E_\mu(\text{brems}) \cong \Delta E_{\text{elet}}(\text{brems})/40000$

Perdita di energia per elettroni e positroni

◆ Spettro in energia dei fotoni di Bremsstrahlung

I fotoni uscenti hanno energia compresa tra

$$0 < E_{\gamma} < E_0$$

con probabilita' data da:

$$\text{Prob.}(E_{\gamma}) = 1/ E_{\gamma}$$

◆ Distribuzione angolare dei fotoni di Bremsstrahlung

Ad energie $E \gg mc^2$, l' angolo medio di emissione di un fotone e' :

$$\langle \theta \rangle \cong mc^2/E_0$$

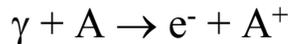
ed e' quindi indipendente dalla energia del quanto emesso.

Interazioni dei Fotoni

Abbiamo tre diversi fenomeni che predominano in diversi intervalli di energia.

1) EFFETTO FOTOELETTRICO

Per E_γ compresa tra l' energia di ionizzazione e 100 keV, l' effetto fotoelettrico domina :



L' elettrone atomico NON è libero e il nucleo rincula per conservare il momento. Questo NON è possibile per un elettrone libero :

l' assorbimento di un fotone da parte di un elettrone richiede la presenza di un TERZO partner nell' urto. In questo caso : il nucleo atomico.

La sua massa è tale da NON assorbire energia !

Meno il nucleo rincula piu' è facile assorbire il Δp : la probabilita' dell' effetto fotoelettrico aumenta al diminuire di E_γ .

Se $h\nu < \Delta E_{\text{legame}} \implies$ Probabilita' dell' effetto fotoelettrico = 0

Questo spiega I denti nella distribuzione.

$T = h\nu - A = h(\nu - \nu_0)$; dove A è l' energia di estrazione e ν_0 è l' energia di soglia.

Sezione d' urto totale σ_{ph}

$$a) \quad E_\gamma \ll m_e \cdot c^2 \quad : \quad \sigma_{\text{ph}} \simeq k \cdot Z^5 \cdot \frac{1}{E_\gamma^3}$$

$$b) \quad E_\gamma \gg m_e \cdot c^2 \quad : \quad \sigma_{\text{ph}} \simeq k \cdot Z^5 \cdot \frac{1}{E_\gamma}$$

Effetto fotoelettrico

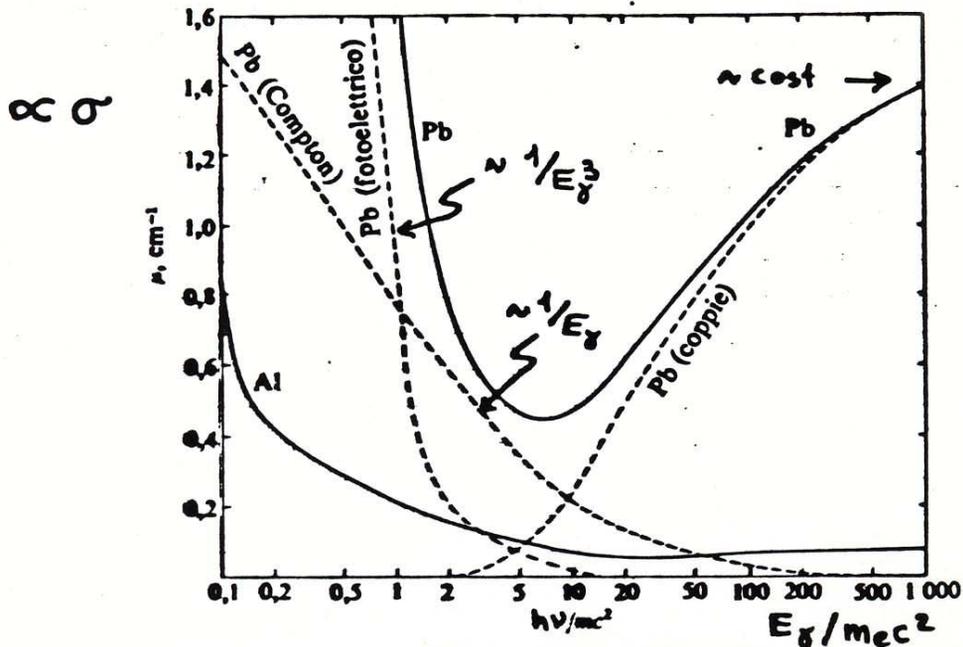


Figura 40 Coefficienti di assorbimento totale dei raggi X in piombo e alluminio in funzione dell'energia (curve continue). L'assorbimento fotoelettrico dell'alluminio è trascurabile alle energie qui considerate. Le curve tratteggiate mostrano i contributi separati dell'effetto fotoelettrico, della diffusione Compton, e della produzione di coppie in Pb. Ascissa, energia in scala logaritmica; $h\nu/\text{m.e.c.}^2 = 1$ corrisponde a 511 keV.

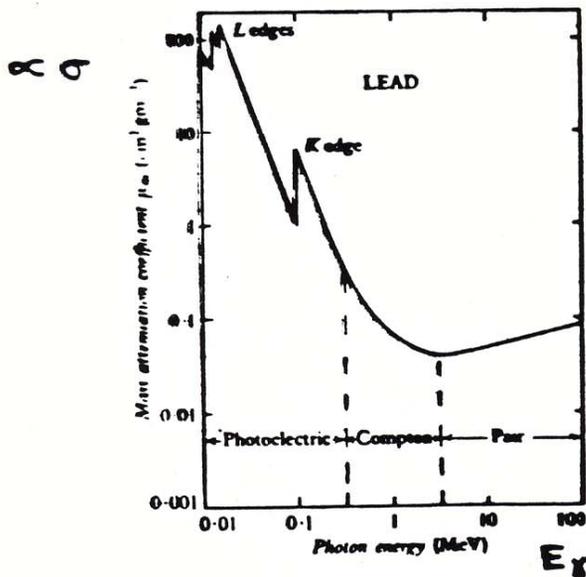
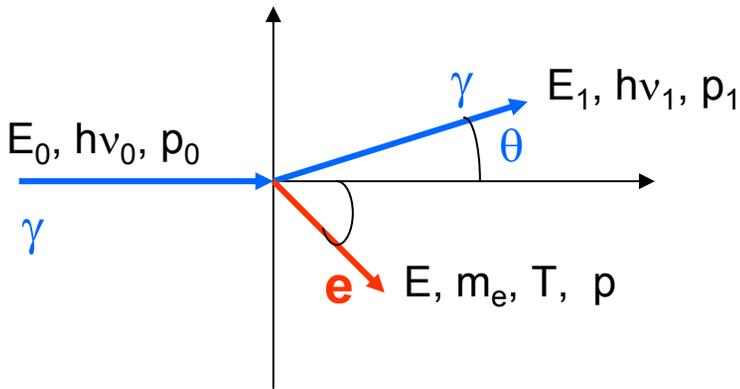


Fig. 41 Mass attenuation coefficients for electromagnetic radiation in lead. The regions over which the photoelectric effect, Compton effect and pair production are important are indicated

Effetto Compton

- Per fotoni con energie molto maggiori dell' energia di legame degli elettroni atomici, questi si possono considerare liberi. L' effetto Compton descrive il processo elastico : $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$



$$1) \begin{cases} p_0 = p_1 \cos \mathcal{G} + p \cos \phi & ; & 0 = p_1 \sin \mathcal{G} - p \sin \phi \\ (p_0 - p_1 \cos \mathcal{G})^2 = p^2 \cdot \cos^2 \phi & ; & p_1^2 \sin^2 \mathcal{G} = p^2 \cos^2 \phi \end{cases}$$

$$2) \quad p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \mathcal{G} = p^2 \quad ; \quad 3) \quad E_0 + m_e c^2 = E_1 + T + m_e c^2$$

$$4) \quad E_0 - E_1 = T \Rightarrow c(p_0 - p_1) = T$$

Ricordiamo che vale la relazione : $p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c}$

Abbiamo al solito : $m_e c^2 + T = E = (m_e^2 c^4 + p^2 c^2)^{\frac{1}{2}}$ da cui :

$T^2 + 2Tm_e c^2 + m_e^2 c^4 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$ da cui dividendo per c^2 :

$\frac{T^2}{c^2} + 2Tm_e = p^2$ dalla 2) $\Rightarrow p^2 = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \mathcal{G}$ da cui :

$$\frac{c^2 (p_0 - p_1)^2}{c^2} + 2c(p_0 - p_1)m_e = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0 p_1 \cos \mathcal{G}$$

Effetto Compton

$$p_0^2 - 2p_0p_1 + p_1^2 + 2c(p_0 - p_1)m_e = p_0^2 + p_1^2 - 2p_0p_1 \cos \vartheta ;$$

$$2c(p_0 - p_1)m_e = 2p_0p_1(1 - \cos \vartheta)$$

$$2c(p_0 - p_1)m_e = 2p_0p_1(1 - \cos \vartheta) ; \frac{(p_0 - p_1)}{p_0p_1} = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) ;$$

$$\left(\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_0} \right) = \frac{1}{m_e c} (1 - \cos \vartheta) ; \lambda_1 - \lambda_2 = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)$$

Possiamo ricavare tutto in funzione della energia del γ_0 :

$$\frac{1}{cp_1} - \frac{1}{cp_0} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta) ; \frac{1}{E_{\gamma_1}} - \frac{1}{E_{\gamma_0}} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos \vartheta)$$

$$\frac{E_{\gamma_1} E_{\gamma_0}}{E_{\gamma_0} - E_{\gamma_1}} = \frac{m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)} ; E_{\gamma_1} E_{\gamma_0} = \frac{E_{\gamma_0} m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)} - \frac{E_{\gamma_1} m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)}$$

$$E_{\gamma_1} \cdot \left(E_{\gamma_0} + \frac{m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)} \right) = \frac{E_{\gamma_0} m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)}$$

$$E_{\gamma_1} = \frac{E_{\gamma_0} m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)} \cdot \frac{1}{\left(E_{\gamma_0} + \frac{m_e c^2}{(1 - \cos \vartheta)} \right)}$$

$$E_{\gamma_1} = \frac{E_{\gamma_0}}{\left(1 + \frac{E_{\gamma_0}}{m_e c^2} \cdot (1 - \cos \vartheta) \right)} ; \text{poniamo } \varepsilon = \frac{E_{\gamma_0}}{m_e c^2} \text{ e otteniamo quindi :}$$

$$E_{\gamma_1} = \frac{E_{\gamma_0}}{(1 + \varepsilon \cdot (1 - \cos \vartheta))}$$

Notiamo che : per $\cos \vartheta = 1 \Rightarrow E_{\gamma_1}$ ha il valore **MASSIMO**

per $\cos \vartheta = -1 \Rightarrow E_{\gamma_1}$ ha il valore **MINIMO**

Compton Edge

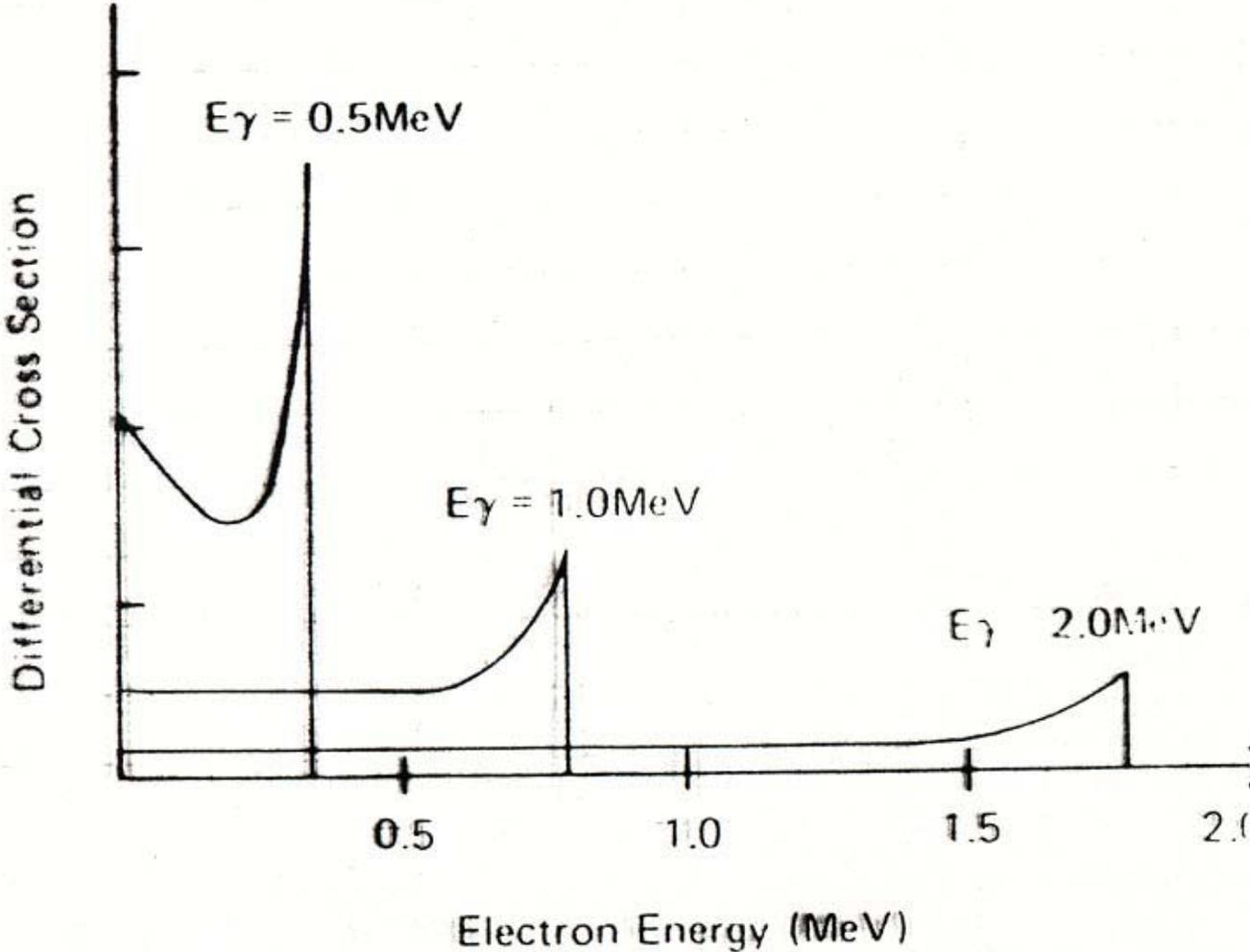
- ◆ Energia massima rilasciata all' elettrone

$$\begin{aligned} E_e &= h\nu_0 - h\nu_1 = h\nu_0 - \frac{h\nu_0}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} = \\ &= \frac{h\nu_0 [1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)] - h\nu_0}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \\ E_e &= \frac{\varepsilon h\nu_0 (1 - \cos \vartheta)}{1 + \varepsilon(1 - \cos \vartheta)} \end{aligned}$$

$$\text{Per } \vartheta = 180^\circ \Rightarrow E_e^{\text{Max}} = \frac{2h\nu_0\varepsilon}{1 + 2\varepsilon} = h\nu_0 \frac{2\varepsilon}{1 + 2\varepsilon}$$

$$\text{Compton Edge : } E_e^{\text{Max}} = \frac{h\nu_0}{m_e c^2} \cdot \frac{2\varepsilon m_e c^2}{1 + 2\varepsilon} = \frac{2\varepsilon^2 m_e c^2}{1 + 2\varepsilon}$$

Compton Edge



Effetto Compton: sezioni d' urto

Per $E_\gamma \ll m_e c^2$ l'elettrone atomico oscilla irradiando come un oscillatore:

DIFFUSIONE THOMPSON. $\sigma_{Th} \approx Z \left(\frac{8\pi}{3} r_0^2 \right)$

Se l'impulso ceduto è piccolo rispetto all'impulso incidente allora si ha :

SCATTERING COERENTE (Rayleigh): $\sigma_{Ray} \approx Z^2 r_0^2$

Distribuzione Angolare dei γ emessi nell'Effetto Compton :

Formula di Klein-Nishina (1928)

$$\frac{d\sigma_c}{d\Omega_\gamma}(\mathcal{G}_\gamma) = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{Z}{A} \frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \left[1 + \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right)^2 + \left(\frac{E'_\gamma}{E_\gamma} \right) \sin^2 \mathcal{G}_\gamma \right]$$

Sezione d' urto Totale

$$1) \frac{E_\gamma}{m_e c^2} < 1 : \quad \sigma_c \approx \frac{Z}{A} \cdot \frac{8\pi \cdot r_0^2}{3} \cdot \left(1 - 2 \cdot \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \right)$$

$$2) \frac{E_\gamma}{m_e c^2} \gg 1 : \quad \sigma_c \approx k \cdot \frac{Z}{A} \cdot \frac{8\pi \cdot r_0^2}{3} \cdot \frac{1}{E_\gamma}$$

Effetto Compton: distribuzioni angolari

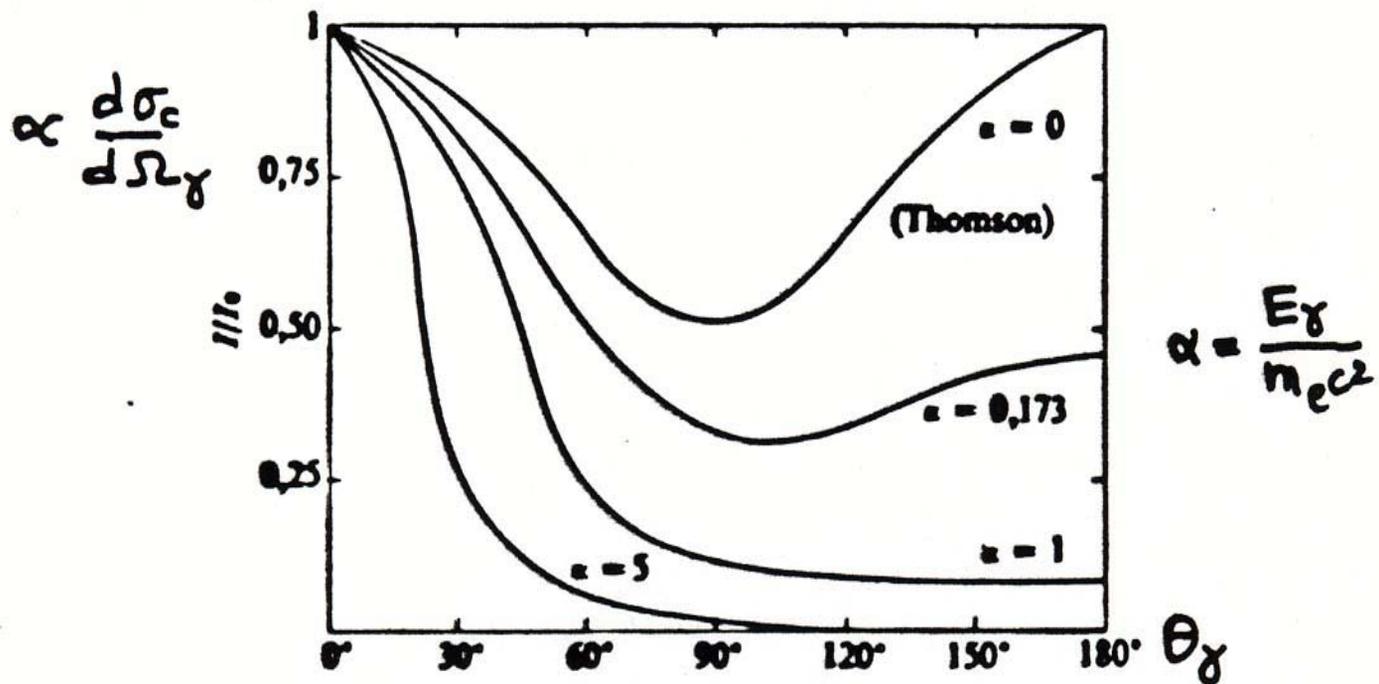


Figura 12 Distribuzione angolare, in funzione dell'energia ($\alpha = h\nu/mc^2$), dei raggi X che hanno subito diffusione Compton.

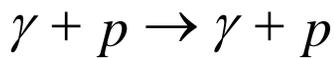
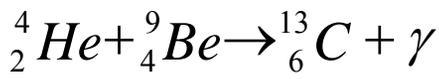
Esercizio: la scoperta del neutrone

Già nel 1920, per superare alcune delle difficoltà create dalla ipotesi, vedi esercizio nel capitolo della cinematica, che il nucleo fosse costituito di elettroni e protoni, Rutherford suggerisce che nel nucleo coppie di elettroni e protoni potessero essere combinate a “formare” una particella neutra che chiamo’ “ NEUTRONE “.

Nel 1928 Bothe e Becker osservarono che bombardando con particelle α , emesse dal Polonio di circa 5.4 MeV, dei nuclei di Berillio si producevano atomi di Carbonio insieme ad una radiazione NON ionizzante, neutra e molto penetrante: pensarono si trattasse di raggi X.

Nel 1931 Irene Curie e Joliot, studiando le stesse reazioni, mostrarono che questi processi erano capaci di “sbattere fuori” dei protoni di energia fino a 5.3 MeV da assorbitori ricchi di idrogeno come la paraffina.

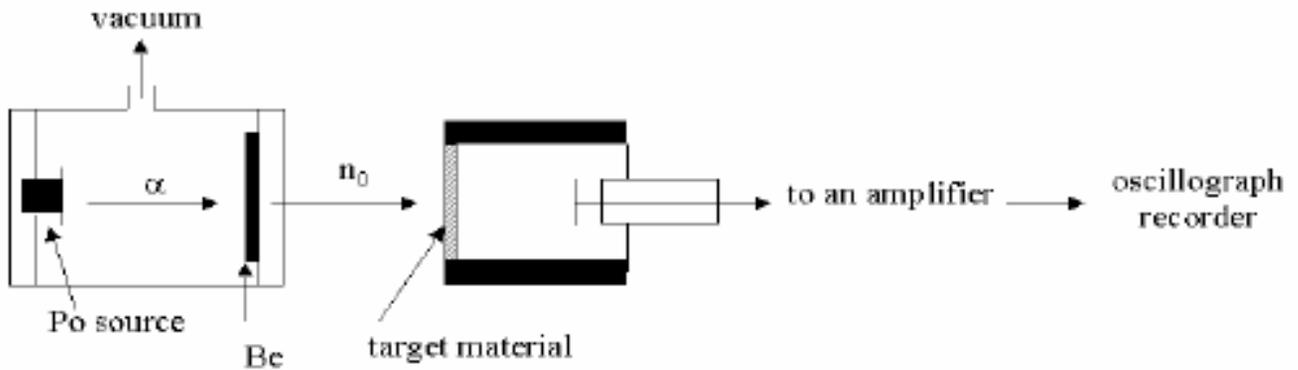
Spiegarono il fenomeno con:



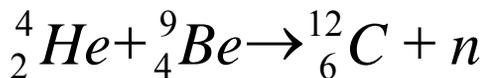
Nel 1931 Chadwick notò che un γ capace di causare questa reazione doveva avere un'energia di almeno 52 MeV (fare come esercizio) in palese contrasto con i γ osservati sperimentalmente che arrivano al massimo ad energie di qualche MeV.

Esercizio: la scoperta del neutrone

Chadwick utilizzò camere ad ionizzazione nelle quali poteva misurare la ionizzazione, numero di ioni, prodotte da una particella carica e la lunghezza della traccia. Egli inoltre utilizzò DIVERSI materiali (idrogeno, elio, berilio, carbonio ed argon) come bersaglio per la radiazione sconosciuta prodotta dagli urti delle particelle α sul berilio. Le particelle “sbattute fuori” dall’ idrogeno si comportavano come protoni con velocità fino a 3.2×10^9 cm/s. Mentre le particelle espulse dai bersagli più pesanti avevano un potere di ionizzazione più grande e, per ciascun caso, erano l’ ione di rinculo dell’ elemento.



Tutto viene spiegato da una particella di massa circa uguale a quella del protone e senza carica elettrica:



Chadwick la chiamò **NEUTRONE** in una lettera a Nature del 17, febbraio 1932. Nel 1935 prese il Premio Nobel.



Chadwick misurò la sua massa con una precisione del 10%.

Qualche mese dopo venne scoperto il nucleo di Deuterio (**Deutone**),

l’isotopo ${}^2_1\text{H}$ dell’idrogeno. Il Deutone è uno stato legato protone-neutrone. Valori recenti:

$$m_p = 938.27231 \pm 0.00028 \text{ MeV} / c^2$$

$$m_n = 939.56563 \pm 0.00028 \text{ MeV} / c^2$$

$$m_d = 1875.61339 \pm 0.00057 \text{ MeV} / c^2$$

Nota bene: il neutrone risolve il problema dell’azoto : $7p + 7n = \text{spin intero}$.

Inoltre risolve il problema quantistico e quello legato al momento magnetico.

Creazione di coppie

- La produzione di coppie elettrone positrone nel campo Coulombiano del nucleo e' possibile SOLO se l' energia del fotone supera una certa soglia. Questa energia di soglia e' data dalle masse a riposo dei due elettroni piu' la energia di rinculo che e' trasferita al nucleo o, nel caso di urto con gli elettroni atomici, a questi ultimi. Il rinculo assicura la conservazione dell' impulso.



Il nucleo controbilancia P_{tot} senza prendere energia. L'elettrone prende anche energia.

Il processo è a **SOGLIA**:

$$E_{\gamma Min} \approx 2m_e \approx 1.02 MeV \quad \text{su nucleo}$$

$$E_{\gamma Min} \approx 4m_e c^2 \quad \text{su elettrone}$$

Distribuzione in energia di e^+ e^- :

$$\frac{d\sigma}{dE'} = \text{Formula di Bethe-Heitler}$$

$$\text{Distribuzione angolare degli elettroni :} \quad \langle \theta_{\pm} \rangle \approx \frac{m_e c^2}{E_{\gamma}}$$

La distribuzione e' indipendente da E'_{\pm}

Produzione di coppie in camera a bolle

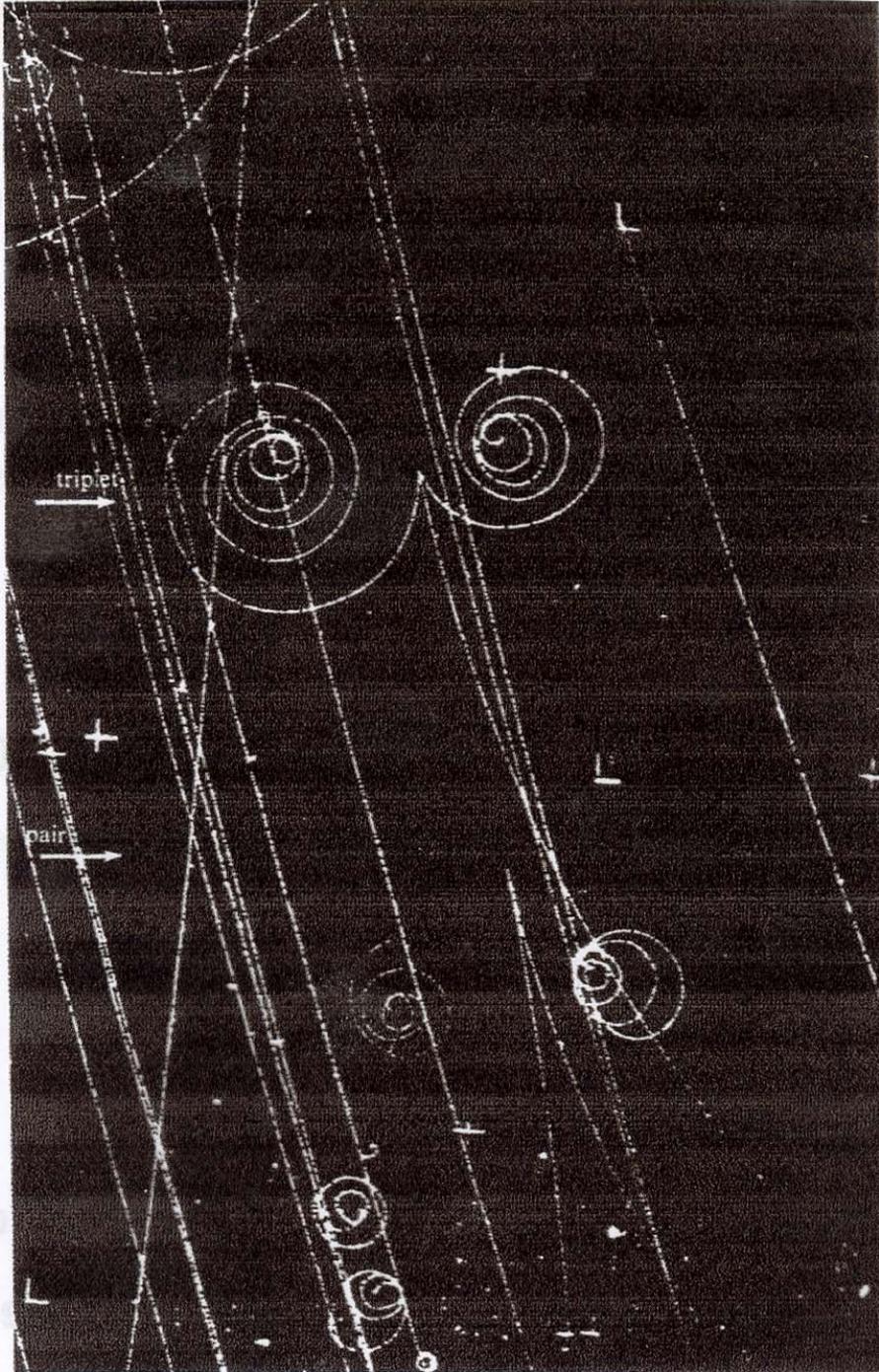
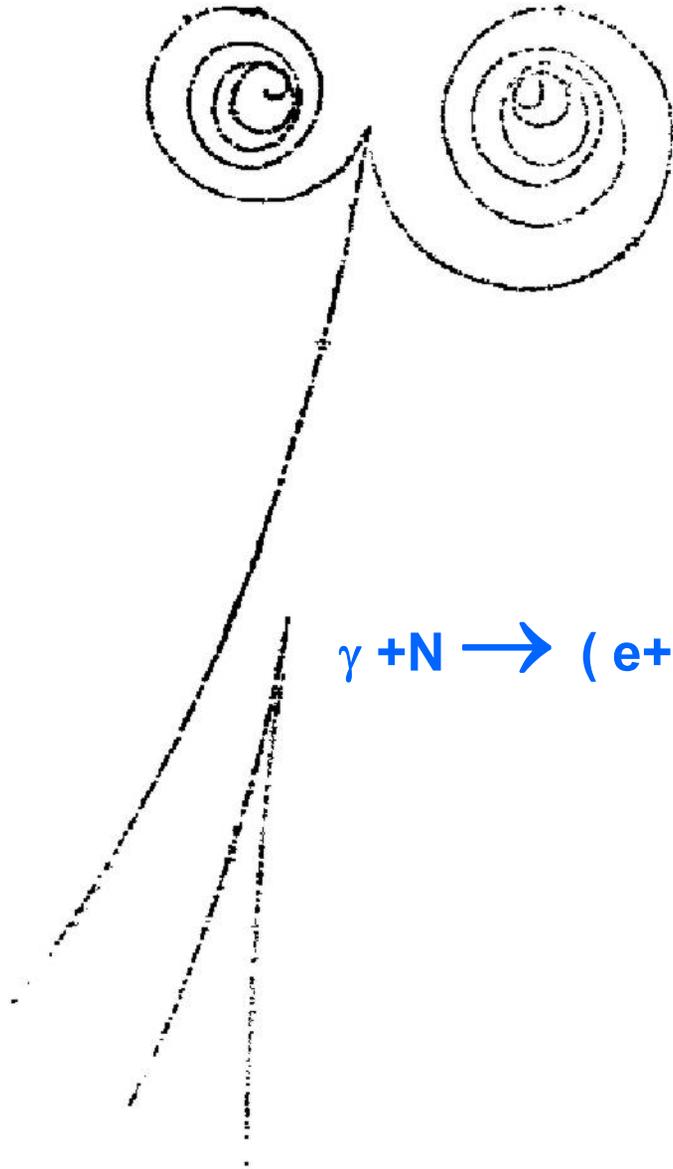


Figura 2.28. Formazione di una coppia elettrone-positrone nel campo di un elettrone (tripletto). Formazione di una coppia nel campo di un protone (coppia). (Camera a bolle a idrogeno). [Foto gentilmente concessa dal Lawrence Radiation Laboratory].

Produzione di coppia

$$\gamma + e^- \longrightarrow (e^+ e^-) + e^-$$



$$\gamma + N \longrightarrow (e^+ e^-) + N$$

Creazioni di coppie: sezione d'urto totale

1) $m_e c^2 < h\nu \ll \frac{137}{Z^{\frac{1}{3}}} \cdot m_e c^2$ (senza schermo)

$$\sigma_{pair} = \frac{Z^2}{137} \cdot r_0^2 \cdot \left(\frac{28}{9} \cdot \ln \frac{2E_\gamma}{m_e c^2} - \frac{218}{27} \right)$$

2) $h\nu \gg m_e c^2$ (schermo completo)

$$\sigma_{pair} = \frac{Z^2}{137} \cdot r_0^2 \left(\frac{28}{9} \ln \frac{183}{Z^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{27} \right)$$

Ad alte energie abbiamo : $\sigma_{pair} \approx \text{cost} \cdot Z^2$

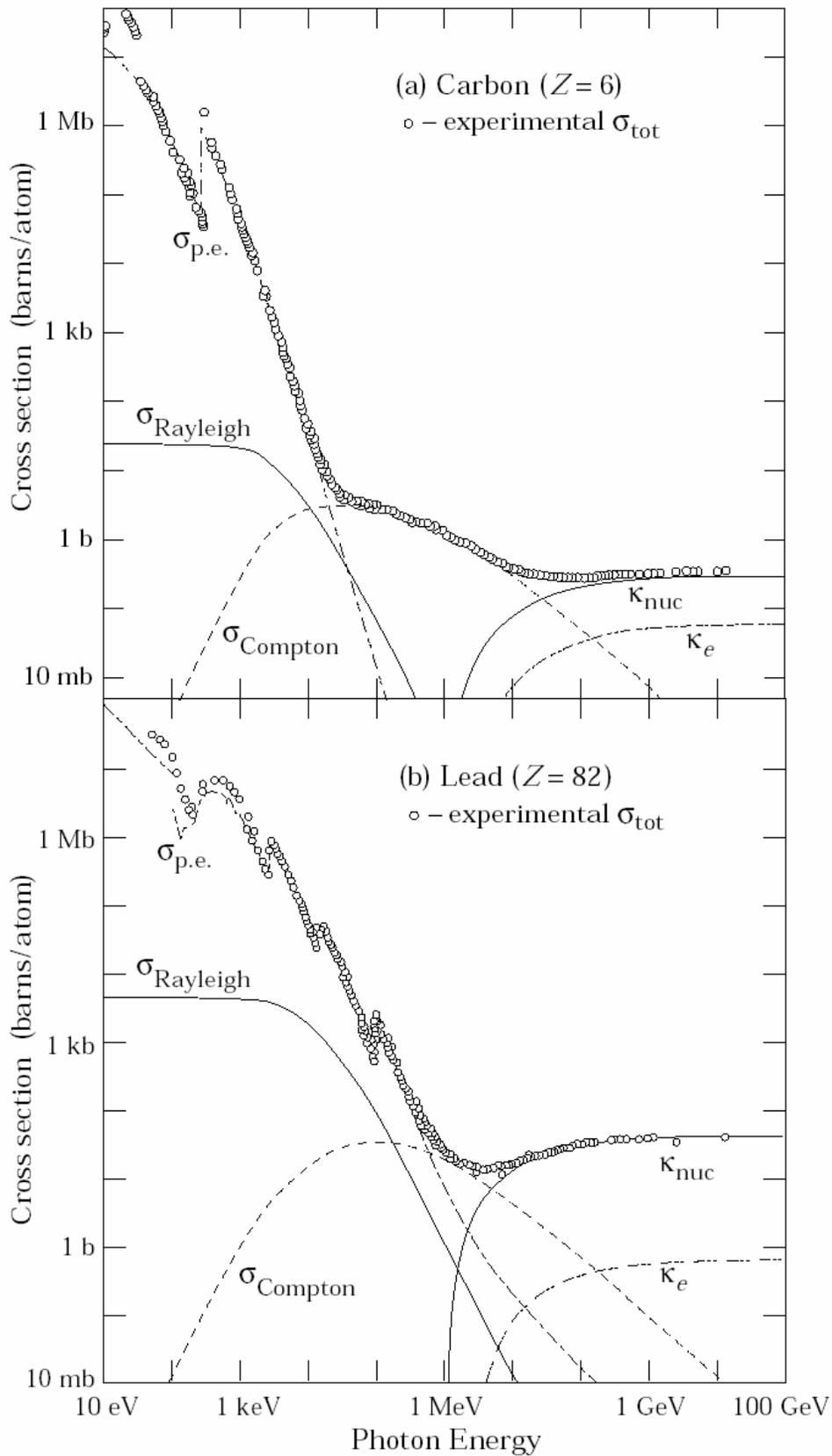
$$\sigma_{pair} \cong \frac{7}{9} \cdot \frac{1}{X_0} \frac{A}{N_A}$$

$$\mu = \sigma \cdot n = \left(\sigma_{\text{fotoelettrico}} + \sigma_{\text{compton}} + \sigma_{\text{creazione di coppie}} \right) \cdot \frac{\rho \cdot N_A}{A}$$

ATTENUAZIONE DEI FOTONI :

$$I = I_0 e^{-\mu x}$$

Sezioni d' urto per fotoni Vs E_γ

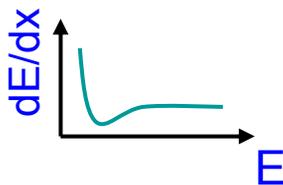


Memento:

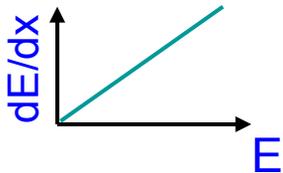
interazioni elettromagnetiche di base

e^+ / e^-

- Ionisation

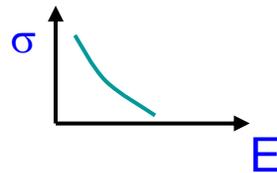


- Bremsstrahlung

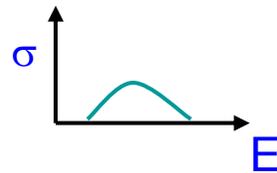


γ

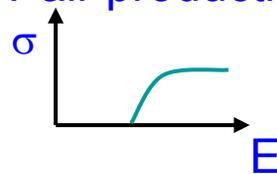
- Photoelectric effect



- Compton effect



- Pair production



$E_e \geq$ Energia Critica

$E_\gamma \geq$ Soglia per la Creazione di coppia

Il processo è statistico :

$$\gamma_{E_0} \xrightarrow{1 X_0} e^{\pm \frac{E_0}{2}} \xrightarrow{1 X_0} e'^{\pm} 2\gamma'_{\frac{E_0}{4}} \xrightarrow{1 X_0} e''^{\pm} 2\gamma'' 2e'''^{\pm} \frac{E_0}{8} \dots\dots\text{etc}$$

$$\text{dopo } t \cdot X_0 \rightarrow N \simeq 2^t ; E(t) \simeq \frac{E_0}{2^t}$$

$$E(t_{\max}) = \frac{E_0}{2^{t_{\max}}} = E_c \text{ da cui :}$$

$$t_{\max} = \frac{\ln \frac{E_0}{E_c}}{\ln 2} \Rightarrow N_{\max} \simeq \frac{E_0}{E_c}$$

Caratteristiche degli sciami Elettromagnetici

i) $X_0 \approx 180 \cdot \frac{A}{Z^2}$ (gr cm⁻²) ; ii) Energia Critica: $\varepsilon \approx \frac{550}{Z}$ (MeV)

iii) Raggio di Moliere : $R_M = \frac{21 \cdot X_0}{\varepsilon} \approx 7 \cdot \frac{A}{Z}$ (gr cm⁻²) :

da' la distribuzione laterale dello sciame che dipende dallo scattering multiplo e dai fotoni di bassa energia.

e' funzione della profondita' dello sciame

(sviluppo longitudinale).

iv) **posizione del massimo dello sciame :**

$$t_{\max} = t_{\text{med}} - 1,5 \text{ dove :}$$

$$t_{\text{med}} = \ln \frac{E}{\varepsilon} + a ; \text{dove: } a = 0.4 \text{ per } e^\pm$$
$$a = 1.2 \text{ per } \gamma$$

$$t = \frac{x}{X_0}$$

v) $L_{\text{contenimento}} (98 \%) \sim 3 \cdot t_{\text{med}}$

vi) $\frac{dE}{dt} = E_0 \cdot \frac{b^{\alpha+1}}{\sqrt{(\alpha+1)}} \cdot t^\alpha - e^{-bt}$

dove $b = 0.5$ e $\alpha = t_{\max} \cdot 5$

vii) T = somma di tutte le lunghezze delle tracce cariche della cascata elettromagnetica.

Per $E_{\text{sensibile}} = 0$, dove $E_{\text{sensibile}}$ e' l' energia

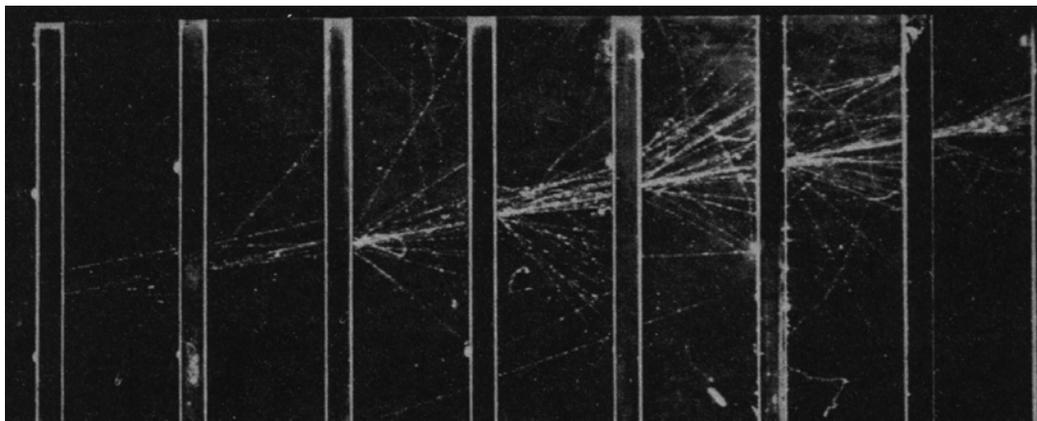
sotto la quale il rivelatore non e' sensibile, si ha :

$$\frac{T}{X_0} = \frac{E}{\varepsilon}$$

viii) $\frac{\Delta E}{E} \propto \frac{\sqrt{N}}{N}$

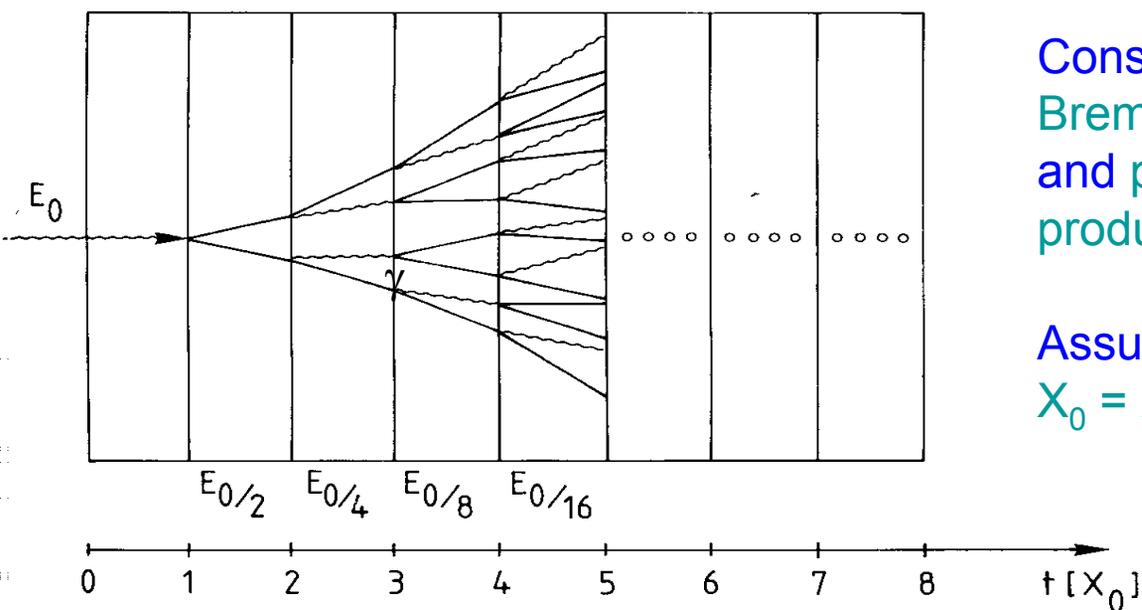
Electromagnetic cascades

Electromagnetic Cascades (showers)



Electron shower in a cloud chamber with lead absorbers

Simple qualitative model



Consider only Bremsstrahlung and pair production.

Assume:
 $X_0 = \lambda_{\text{pair}}$

$$N(t) = 2^t \quad E(t) / \text{particle} = E_0 \cdot 2^{-t}$$

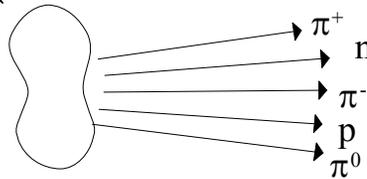
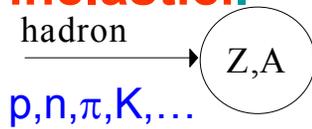
Process continues until $E(t) < E_c$

$$t_{\text{max}} = \frac{\ln E_0 / E_c}{\ln 2} \quad N^{\text{total}} = \sum_{t=0}^{t_{\text{max}}} 2^t = 2^{(t_{\text{max}} + 1)} - 1 \approx 2 \cdot 2^{t_{\text{max}}} = 2 \frac{E_0}{E_c}$$

After $t = t_{\text{max}}$ the dominating processes are ionization, Compton effect and photo effect \rightarrow absorption.

Interazioni Nucleari

Le interazioni degli adroni energetici (carichi e neutri) sono determinati dai **processi nucleari inelastici**.



multiplicity $\propto \ln(E)$

$p_t \approx 0.35 \text{ GeV}/c$

Eccitazione e poi frammentazione dei nuclei →
→ frammenti nucleari + produzione di particelle
secondarie

Per energie elevate ($>1 \text{ GeV}$) le sezioni d' urto dipendono molto poco dall' energia e dal tipo di particella incidente (p, π, K...).

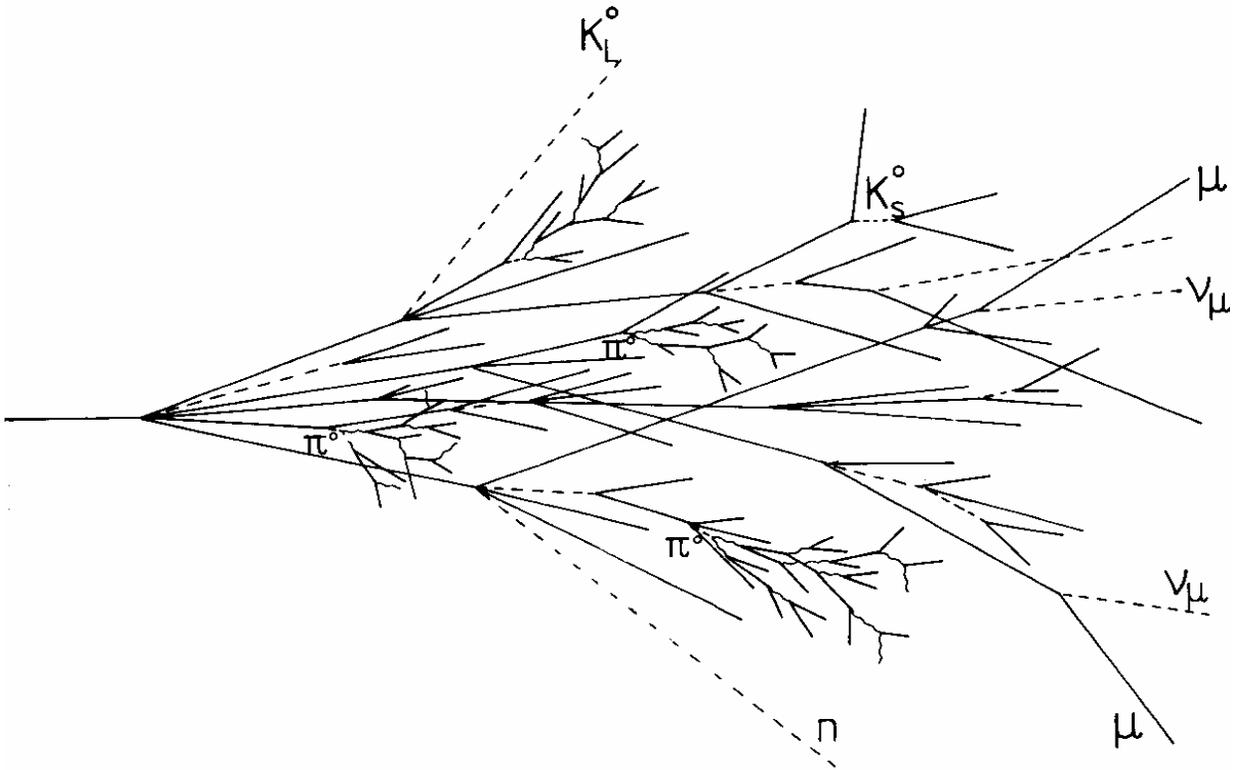
$$\sigma_{inel} \approx \sigma_0 A^{0.7} \quad \sigma_0 \approx 35 \text{ mb}$$

In analogia con X_0 possiamo definire una lunghezza di assorbimento adronica (**hadronic absorption length**)

$$\lambda_a = \frac{A}{N_A \sigma_{inel}}$$

Cascata Adronica

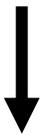
Vi sono implicati vari processi. E la situazione e' molto piu' complicata di quella delle cascate elettromagnetiche.



Componente adronica

+

Componente Elettromagnetica



charged pions, protons, kaons
 Breaking up of nuclei
 (binding energy),
 neutrons, neutrinos, soft γ 's
 muons \rightarrow invisible energy



neutral pions $\rightarrow 2\gamma \rightarrow$
 electromagnetic cascade
 $n(\pi^0) \approx \ln E(\text{GeV}) - 4.6$
 example 100 GeV: $n(\pi^0) \approx 18$

Grandi fluttuazioni di energia

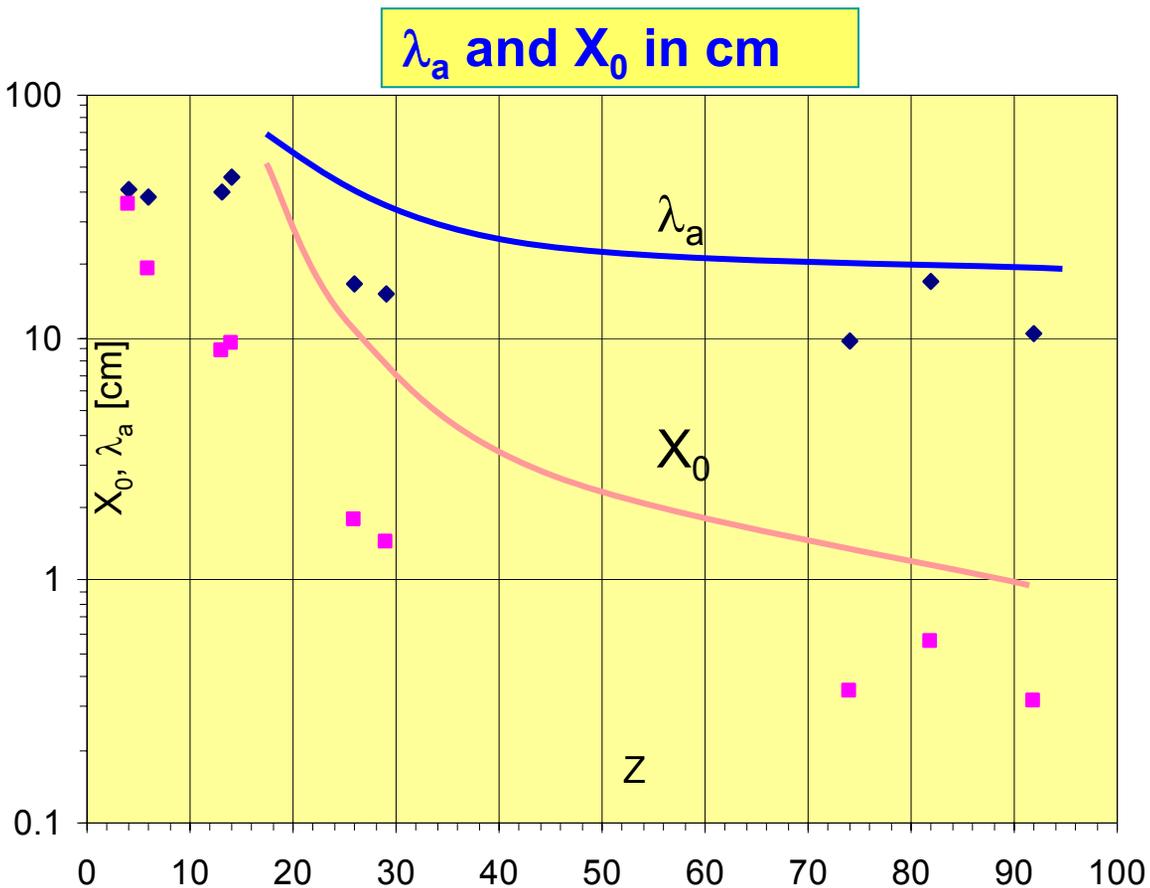


risoluzione in energia limitata

Interazioni di particelle cariche

Material	Z	A	ρ [g/cm ³]	X_0 [g/cm ²]	λ_a [g/cm ²]
Hydrogen (gas)	1	1.01	0.0899 (g/l)	63	50.8
Helium (gas)	2	4.00	0.1786 (g/l)	94	65.1
Beryllium	4	9.01	1.848	65.19	75.2
Carbon	6	12.01	2.265	43	86.3
Nitrogen (gas)	7	14.01	1.25 (g/l)	38	87.8
Oxygen (gas)	8	16.00	1.428 (g/l)	34	91.0
Aluminium	13	26.98	2.7	24	106.4
Silicon	14	28.09	2.33	22	106.0
Iron	26	55.85	7.87	13.9	131.9
Copper	29	63.55	8.96	12.9	134.9
Tungsten	74	183.85	19.3	6.8	185.0
Lead	82	207.19	11.35	6.4	194.0
Uranium	92	238.03	18.95	6.0	199.0

For $Z > 6$: $\lambda_a > X_0$



Calorimetri omogenei

Due categorie importanti: cristalli scintillanti o “glass” blocks

→ Fotoni . Letti con fotomoltiplicatori, -diodi/triodi

Scintillatori (cristalli)

Scintillator	Density [g/cm ³]	X ₀ [cm]	Light Yield γ /MeV (rel. yield)	τ_1 [ns]	λ_1 [nm]	Rad. Dam. [Gy]	Comments
NaI (Tl)	3.67	2.59	4×10 ⁴	230	415	≥10	hygroscopic, fragile
CsI (Tl)	4.51	1.86	5×10 ⁴ (0.49)	1005	565	≥10	Slightly hygroscopic
CSI pure	4.51	1.86	4×10 ⁴ (0.04)	10 36	310 310	10 ³	Slightly hygroscopic
BaF ₂	4.87	2.03	10 ⁴ (0.13)	0.6 620	220 310	10 ⁵	
BGO	7.13	1.13	8×10 ³	300	480	10	
PbWO ₄	8.28	0.89	≈100	10 10	≈440 ≈530	10 ⁴	light yield =f(T)

Relative light yield: rel. to NaI(Tl) readout with PM (bialkali PC)

Radiatori Cherenkov

Material	Density [g/cm ³]	X ₀ [cm]	n	Light yield [pe/GeV] (rel. pe)	λ_{cut} [nm]	Rad. Dam [Gy]	Comments
SF-5 Lead glass	4.08	2.54	1.67	600 (1.5×10 ⁻⁴)	350	10 ²	
SF-6 Lead glass	5.20	1.69	1.81	900 (2.3×10 ⁻⁴)	350	10 ²	
PbF ₂	7.66	0.95	1.82	2000 (5×10 ⁻⁴)		10 ³	Not available in quantity

Relative light yield: rel. to NaI(Tl) readout with PM (bialkali PC)

Interazioni dovute a : n , π^0 , η , K^0 , Λ , ... e neutrini

Neutroni

Le interazioni forti hanno sezioni d' urto $\sigma \cong 10 - 100$ mbarn
E' possibile rendere "misurabili" gli effetti di urti dovuti a neutroni con I metodi seguenti :

i) Scattering nucleare con rinculo dei nucleoni carichi urtati;

ii) Reazioni Nucleari:

a) da neutroni lenti : termici ($T < 0.5$ eV)
epitermici ($T < 100$ KeV)

b) da neutroni veloci : (10 keV $< T < 100$ MeV)

c) neutroni di alta energia : (100 MeV $< T$)

iii) Processi secondari in cui abbiamo emissione di particelle cariche :

a) neutroni veloci : scattering elastico su protoni
reazioni nucleare

b) fissione : $n + U^{235} \rightarrow$ frammenti carichi

$\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$; $\eta \rightarrow 2\gamma$; $K^0 \rightarrow \pi^+\pi^-$ etc

I neutrini interagiscono **SOLO** via interazioni deboli con sezioni d' urto $\sigma \cong 10^{-40}$ cm²

Rivelatori di Particelle

— Lo scopo dei rivelatori è quello di misurare :

1) l'energia E_i ,

2) l'impulso \vec{p}_i ,

3) i vertici delle interazioni e/o dei decadimenti,

di TUTTE le particelle dello stato finale della reazione.

● La misura dell'energia mancante permette di rilevare la presenza di neutrini tra le particelle dello stato finale della reazione

Processi fisici per la rivelazione di particelle

IONIZZAZIONE: indotta da particelle cariche: il passaggio delle particelle e' rivelato dalle coppie elettrone-ione prodotte lungo il percorso della particella stessa.

$$\text{Ionizzazione Specifica} = \frac{\left(\frac{dE}{dx} \right)_{ion} \text{ per unita' di percorso}}{E \text{ (per produrre una coppia e-ione)}}$$

L' energia necessaria per produrre una coppia e-ione dipende dal materiale ed e' tipicamente di 20-30 eV.

ECCITAZIONE: Indotta da fotoni su materiali scintillanti (stati metastabili con tempi di risposta da 10^{-9} a 10^{-6} secondi) che emettono fotoni di qualche eV (**FLUORESCENZA**).

- i) **Scintillatori inorganici** : $X_0 \cong 2.6 \text{ cm}$; $\rho = 3.7 \text{ gr cm}^{-3}$;
risposta $\cong 10^{-7} \text{ s}$; resa energetica ; $1\gamma / 25 \text{ eV}$.
- ii) **Scintillatori organici** : $X_0 \cong 30\text{-}40 \text{ cm}$; $\rho = 1 \text{ gr cm}^{-3}$;
risposta $\cong 10^{-9} \text{ s}$; resa energetica : $1 \gamma / 100\text{-}500 \text{ eV}$.

ESEMPIO : In Argon ($\rho = 10^{-3} \text{ gr cm}^{-3}$) si ottiene una coppia e-ione ogni 30 eV. Calcoliamo l' energia persa per ionizzazione in 1 cm di Argon.

$$\Delta E = \frac{2 \text{ MeV}}{\text{gr cm}^{-2}} \cdot \rho = \frac{2 \text{ keV}}{\text{cm}}$$

Numero di coppie e-ione in Argon :

$$\frac{2000}{30} \cong 66 \text{ coppie per cm}$$

A) Tecniche Visualizzanti

1) Camera a Nebbia (Wilson – 1912) :

un gas con vapore sovrasaturo produce goccioline dove sono presenti ioni a causa di una rapida espansione. Si illumina e fotografa la camera subito dopo l'espansione. Tipica risoluzione : $\cong 0.5 \text{ mm}$.

2) Camera a Bolle (Glaser– 1952):

un liquido (idrogeno, deuterio, elio...) in cui la pressione idrostatica è mantenuta per qualche millisecondo più bassa della sua tensione di vapore. Si formano delle bollicine lungo la traiettoria delle particelle a causa della presenza delle coppie e-ione.

Risoluzione spaziale da 300 a $20 \mu\text{m}$.

3) Emulsioni Nucleari (Powell– 1939):

costituite da grani di AgBr (bromuro di argento) immersi in gelatine con densità di alcuni grani / μm . La particella produce elettroni che trasformano i grani in Argento metallico.

Risoluzione spaziale $\cong 1 \mu\text{m}$.

Inoltre dal $\frac{dE}{dx}$ si misura : β

e da $\langle \mathcal{G}_{\text{Sc mult}} \rangle$ si ricava $\beta \cdot p$

Rivelatori di Tracce

4) Camera a Scintille (1950)

lastre conduttrici separate di 1 cm connesse a tensione ed a massa in modo alternato ad un generatore IMPULSIVO di tensione.

Tra le lastre vi è un gas NOBILE (He, Ne) che viene ionizzato dal passaggio della particella carica. Dopo il passaggio viene impulsato un campo elettrico di $\approx 10 \text{KV/cm}$ che accelerando gli elettroni innesca una scarica lungo tutta la traccia di ionizzazione lasciata dalla particella. Le scintille sono nel visibile e vengono fotografate.

Risoluzione spaziale $\leq 1 \text{ mm}$.

Le Camere a Streamer hanno elettrodi piu' lontani tra loro e campi $\cong 20 \text{KV/cm}$. Si ottengono risoluzioni spaziali simili a quelle delle camere a scintilla.

Camera di Wilson : Scoperta del Positronio



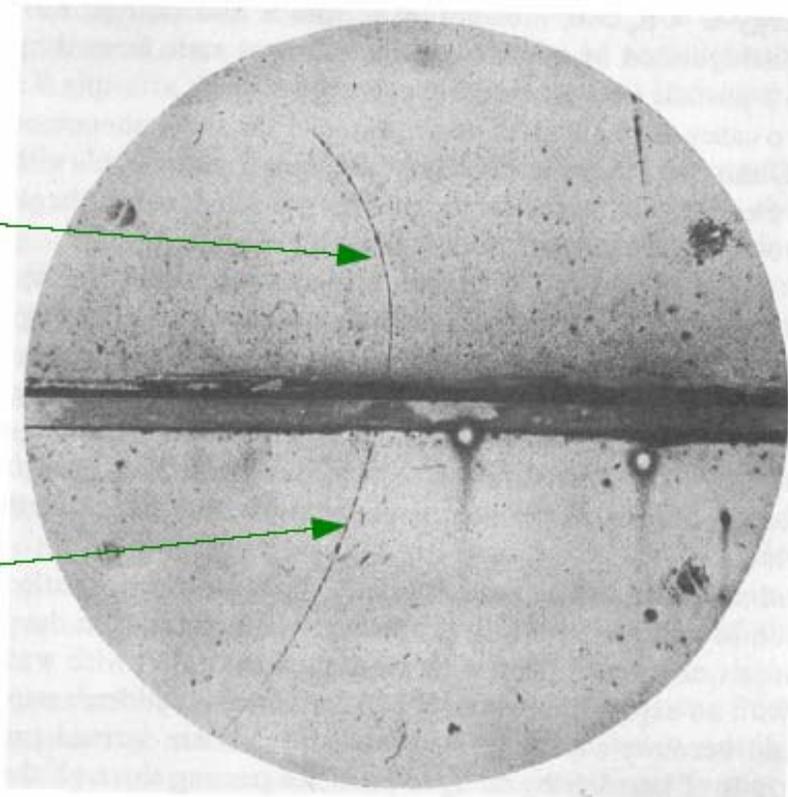
Original Wilson
chamber

Anderson (1933)

23 MeV/c

6 mm Pb

63 MeV/c



Camera a nebbia: la nascita dell' antineutrino

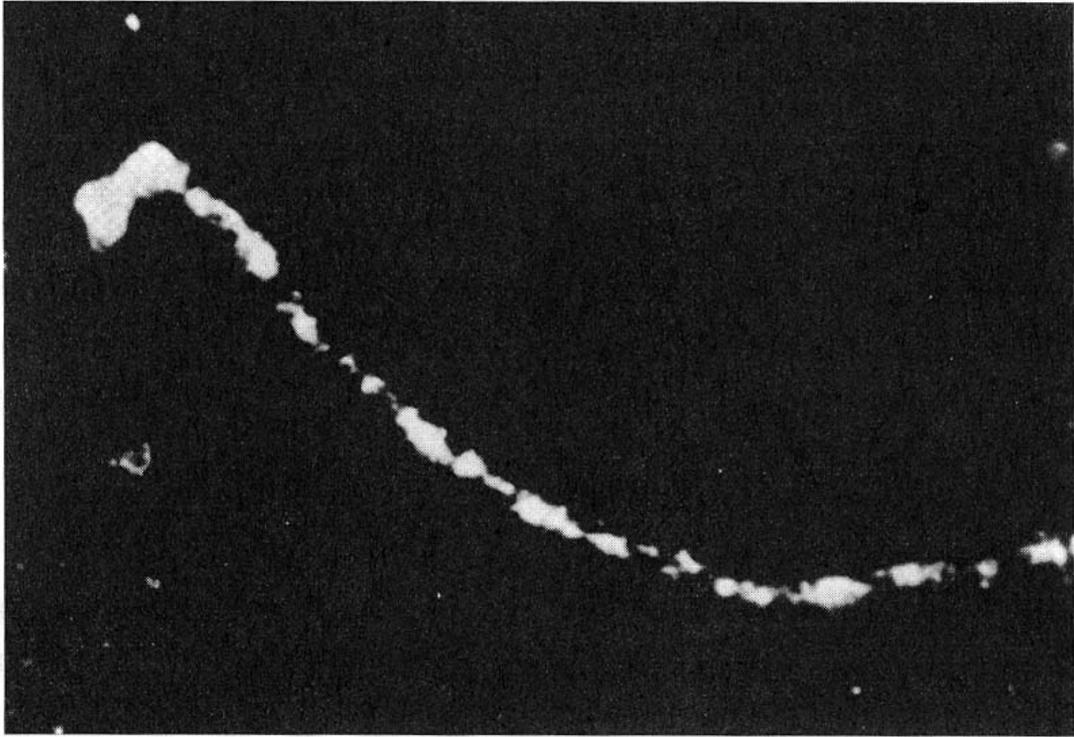
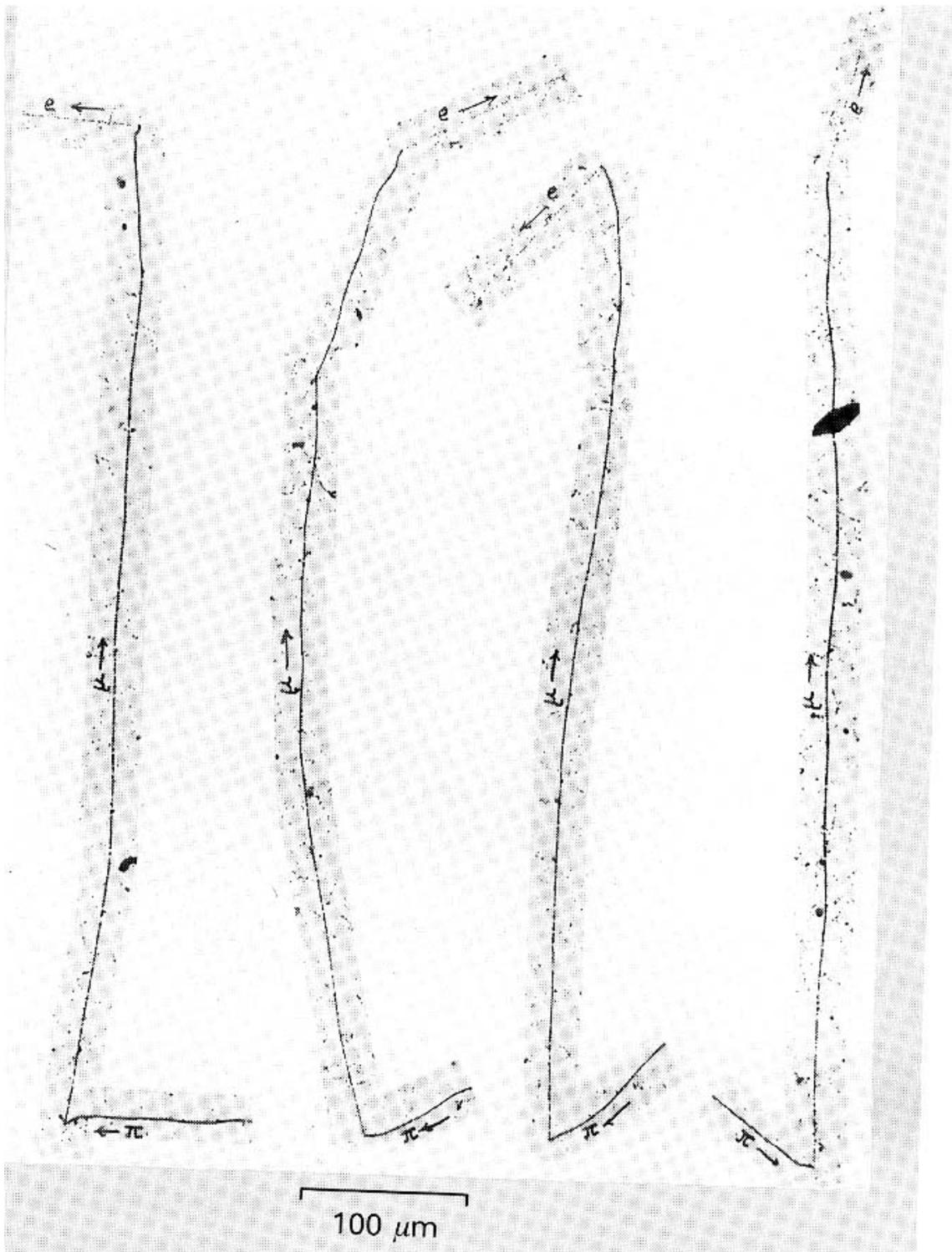


Fig. 1.1. Cloud chamber photograph of the birth of an antineutrino. It depicts the β -decay of the radioactive nucleus ${}^6\text{He} \rightarrow {}^6\text{Li} + e^- + \bar{\nu}_e + 3.5 \text{ MeV}$. The long track is that of the electron, the short thick track that of the recoiling ${}^6\text{Li}$ nucleus. Some momentum is missing, and has to be ascribed to an uncharged particle (an antineutrino) travelling upwards in the picture (after Csikay and Szalay 1957). The cloud chamber consists essentially of a glass-fronted cylindrical tank of gas saturated with water vapour. Upon applying a sudden expansion by means of a piston at the rear of the chamber, the gas cools adiabatically and becomes supersaturated. Water vapour therefore condenses as droplets, preferentially upon charged ions created, for example, by the passage of a charged particle through the gas. The cloud chamber was invented by C.T.R. Wilson for a quite different purpose: to try to reproduce, in the laboratory, the 'glory' phenomenon he had observed on a Scottish mountain top. Wilson failed in this endeavour but by 1912 had given the world a valuable new technique for nuclear research.

Emulsioni: scoperta del pai carico



B) Tecniche Elettroniche

In questo tipo di rivelatori la carica elettrica, prodotto della ionizzazione dovuta al passaggio della particella, viene raccolta con opportuni campi elettrici. Il materiale può essere GAS, LIQUIDO o SOLIDO.

I parametri importanti sono la velocità di deriva delle cariche e la resa in coppie e-ioni prodotte

I gas tipici sono costituiti da miscele di gas nobili (He, Ne, Ar, Xe) con idrocarburi (metano, etano) o CO_2 .

$v_{\text{ione}} = v_e 10^{-4}$. Dove v_e dipende dal tipo di gas, dalla pressione e dal campo elettrico.

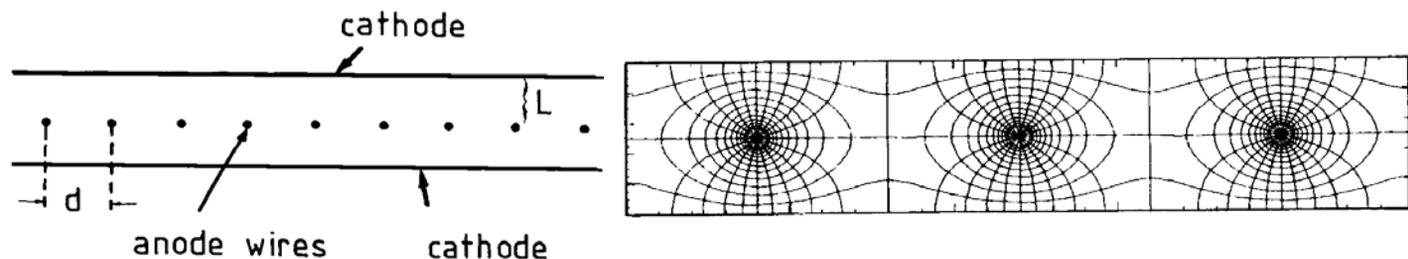
Tipicamente si ha : $v_e \cong 5 \text{ cm} / \mu\text{s}$; pressione atmosferica; $E \cong 1 \text{ KV} / \text{cm}$.

Varie tipologie:

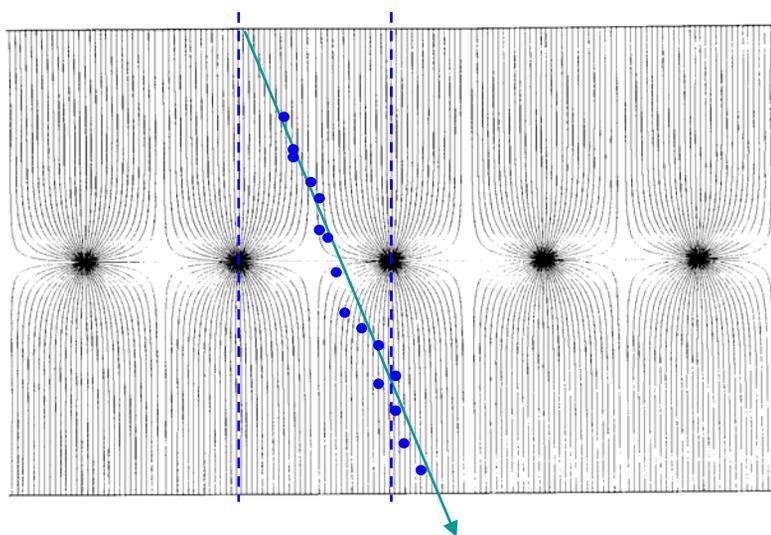
- 1) camere a fili: risoluzione spaziale $\cong 0.3 - 0.5 \text{ mm}$
- 2) camere a deriva in gas: risoluzione spaziale $\cong 50 - 200 \mu\text{m}$
- 3) camere a deriva in liquido: $v_e \cong 0.5 \text{ cm} / \mu\text{m}$
con una resa maggiore : $\cong 10 \text{ eV}$
- 4) Camere a deriva in semiconduttori: resa 3 eV per coppia;
risoluzione spaziale $\cong 10 \mu\text{m}$.

Multi wire proportional chambers

(G. Charpak et al. 1968, Nobel prize 1992)



field lines and equipotentials around anode wires



Parametri tipici:
 $L=5\text{mm}$, $d=1\text{mm}$,
 $a_{\text{wire}}=20\text{mm}$.

Lettura digitale: la
risoluzione spaziale e'
limitata a:

$$\sigma_x \approx \frac{d}{\sqrt{12}}$$

($d=1\text{mm}$,
 $\sigma_x=300\ \mu\text{m}$)

Gli indirizzi dei fili che hanno sparato danno solo una informazione unidimensionale. Coordinate secondarie...

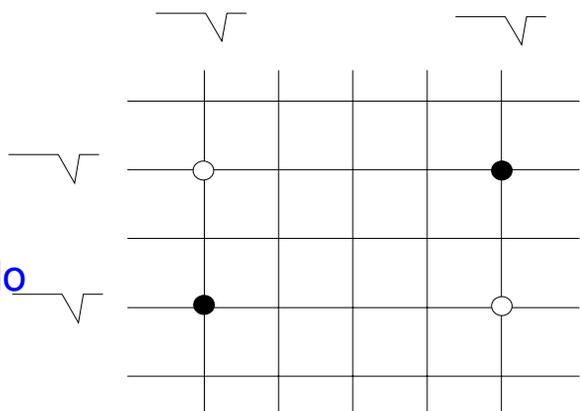
Multi wire proportional chambers

◆ Coordinate secondarie

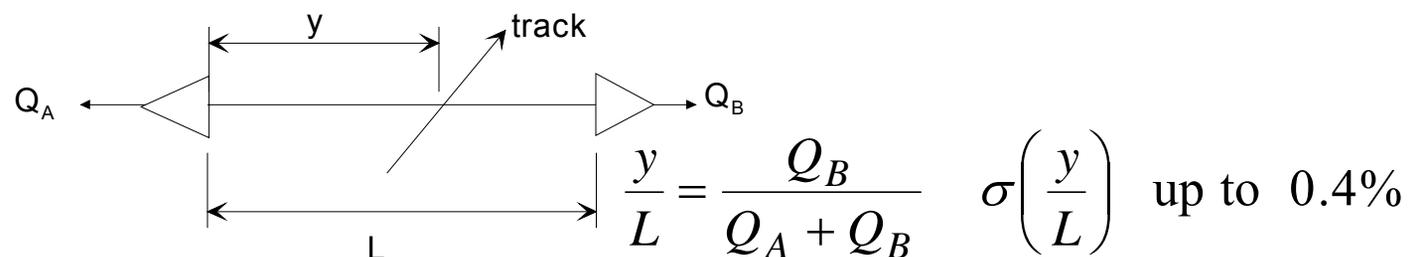
Piani incrociati di fili. Ghost hits.

Solo per basse multiplicita' di tracce.

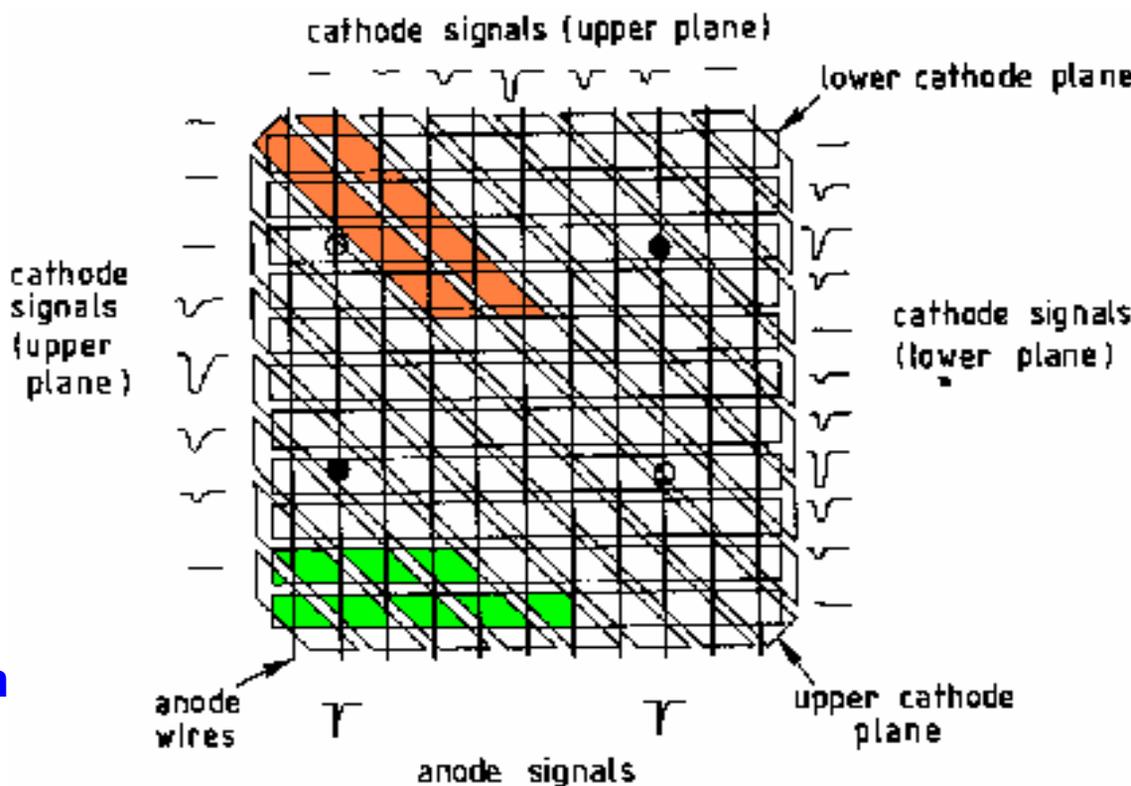
Anche piani di fili stereo (a piccolo angolo di intersezione).



◆ Divisione di carica. Fili resistivi (Carbon, 2kΩ/m).



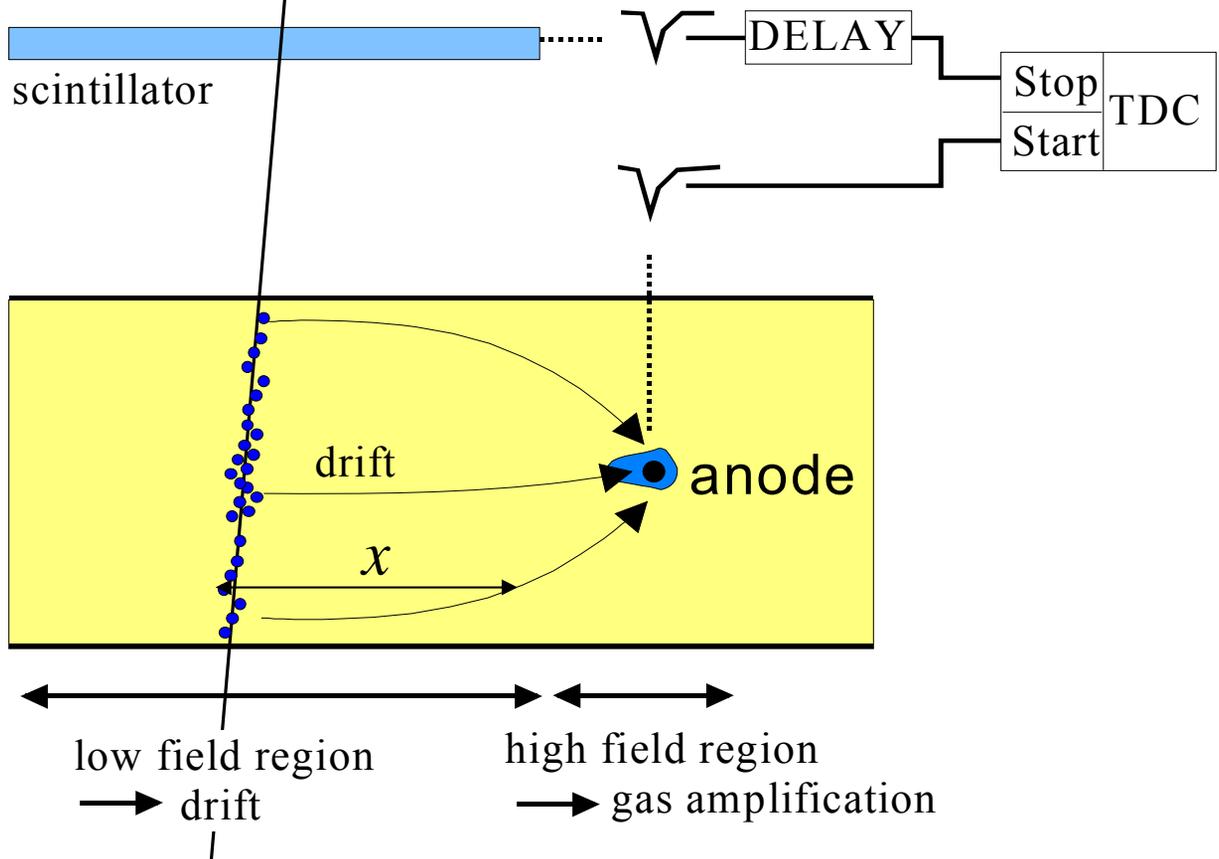
◆ 1 piano di fili + 2 piani catodici segmentati



Lettura
analoga dei
piani catodici:
→ $\sigma \approx 100 \mu\text{m}$

Camere a deriva

(First studies: T. Bressani, G. Charpak, D. Rahm, C. Zupancic, 1969
First operation drift chamber: A.H. Walenta, J. Heintze, B. Schürlein,
NIM 92 (1971) 373)



- ◆ Misura il tempo di arrivo degli elettroni al filo a tensione relativo a t_0

$$x = \int v_D(t) dt$$

- ◆ Che cosa accade durante la deriva verso il filo anodico ?

- 👉 Diffusion ?
- 👉 Drift velocity ?

Deriva e diffusione nel gas

◆ Senza campo elettrico esterno:

Gli elettroni e gli ioni perderebbero la loro energia collidendo con gli atomi del gas → **termalizzazione**

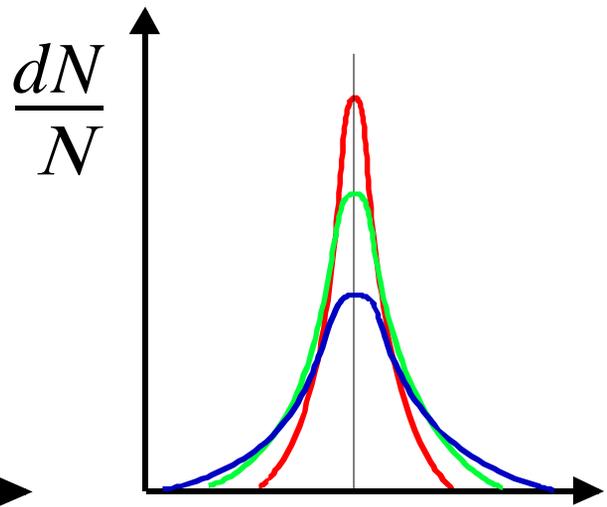
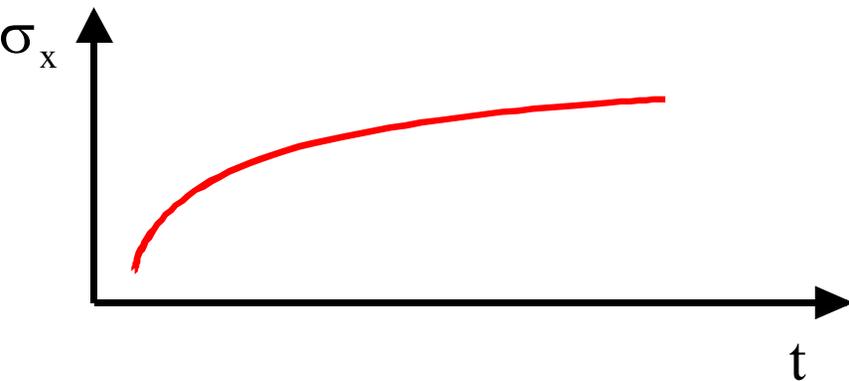
$$\varepsilon = \frac{3}{2} kT \approx 40 \text{ meV}$$

L'insieme di cariche, inizialmente localizzate, a causa delle collisioni multiple diffonderà nel gas

$$\frac{dN}{N} = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-(x^2/4Dt)} dx$$

D: coefficiente di Diffusione

$$\sigma_x(t) = \sqrt{2Dt} \quad \text{or} \quad D = \frac{\sigma_x^2(t)}{2t}$$

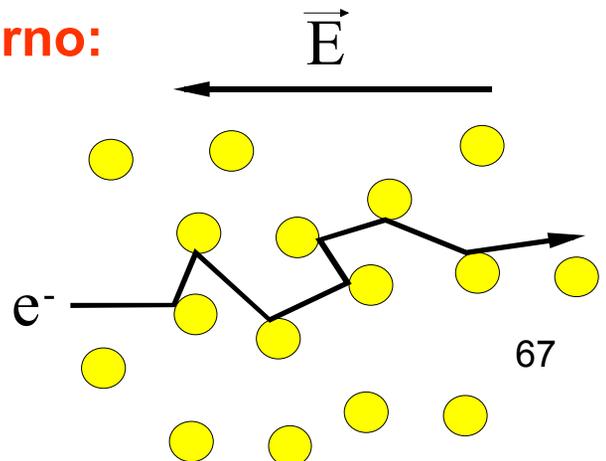


◆ Con un campo elettrico esterno:

Traffico "stop and go" dovuto allo Scattering con gli atomi del gas

→ **drift**

$$\vec{v}_D = \mu \vec{E} \quad \mu = \frac{e\tau}{m} \text{ (mobility)}$$



Metodi di Misura delle Variabili Cinematiche

1) Misura della carica elettrica

$$1) \quad \frac{dE}{dx} \propto z^2 = (ze)^2$$

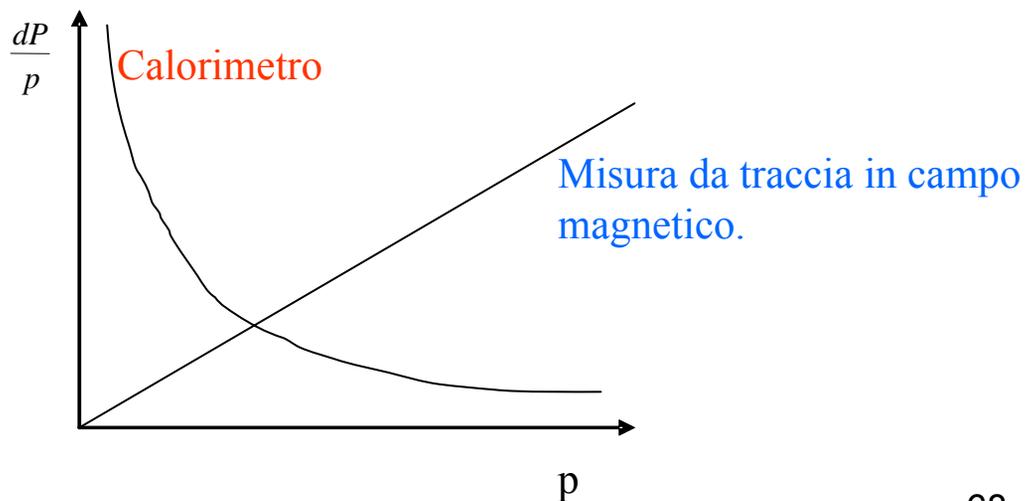
2) il segno è dato da : \vec{B} e/o \vec{E} .

2) Misura dell'Energia

Calorimetri: $N = \sum_{\text{secondarie}} n_{\text{tracce}} = kE$

$$\frac{\delta E}{E} = \frac{\delta N}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}} = \frac{1}{\sqrt{kE}}$$

è un fenomeno **STATISTICO!**. La misura migliora all' aumentare di E.



Misura della Energia

- **Risoluzione in energia di un calorimetro (limite intrinseco):**

$$N^{total} \propto \frac{E_0}{E_c} \quad \text{Numero Totale dei segmenti di traccia}$$

$$\frac{\sigma(E)}{E} \propto \frac{\sigma(N)}{N} \propto \frac{1}{\sqrt{N}} \propto \frac{1}{\sqrt{E_0}} \quad \text{Vale anche per i calorimetri adronici}$$

Anche le risoluzioni spaziali ed angolari scalano come $1/\sqrt{E}$

La risoluzione relativa di un calorimetro migliora all' aumentare dell' energia.

Piu' in generale:

$$\frac{\sigma(E)}{E} = \frac{a}{\sqrt{E}} \oplus b \oplus \frac{c}{E}$$

Stochastic term

Constant term

Noise term

Electronic noise
radioactivity
pile up

Quality factor !

Inhomogenities
Bad cell inter-
calibration
Non-linearities

Particella carica in campo magnetico

- ◆ il moto di una particella di massa m e carica elettrica q in un campo di induzione magnetica \mathbf{B} e' descritto dalla legge

$$d\mathbf{p}/dt = d(\gamma m\mathbf{v})/dt = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

In un moto circolare, con traiettoria di raggio R e con \mathbf{B} perpendicolare a \mathbf{v} , avremo :

$$ma = mv^2/R = qvB$$

da cui

$$i) mv = qRB$$

$$ii) \mathbf{R} = mv/qB = p/qB$$

$$iii) \mathbf{cp} = qcBR$$

- ◆ Per una carica unitaria $q=e$, la relazione tra quantita' di moto, raggio di curvatura e campo magnetico e' :

$$pc[\text{Joule}] = ecBR =$$

$$1.6 \cdot 10^{-19} [\text{Coulomb}] \cdot 3 \times 10^8 [\text{ms}^{-1}] \cdot B [\text{Tesla}] \cdot R [\text{metro}]$$

oppure in unita' piu' pratiche:

$$pc[\text{GeV}] = 0.3 B [\text{Tesla}] R [\text{metro}]$$

◆ Avremo anche:

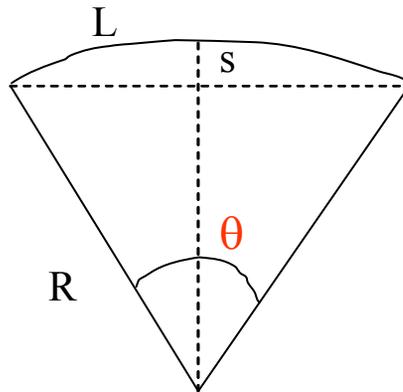
$$B \times R = p/e = \text{rigidita' magnetica}$$

◆ se mettiamo tutto nelle
corrette unita' di misura
avremo:

$$\begin{aligned} B \times R &= 33.356 \times p \text{ [kg*m]} = \\ &= 3.3356 \times p \text{ [T *m]} \\ &\quad \text{(se p e' in GeV/c)} \end{aligned}$$

3. Misura di Impulso

- a) **Metodo della sagitta**: il rivelatore di traccia è interno al campo magnetico B. Ricordiamo : $p = 0.3 RB$ con $q = 1$; B in Tesla; R in m e p in GeV.
Sia $s \ll R$



$$1) (R - s)^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2 = R^2 \rightarrow R^2 + s^2 - 2Rs + \frac{L^2}{4} = R^2$$

trascurando s^2 si ottiene :

$$s = \frac{L^2}{8R}$$

2)

$$\frac{L}{2R} \approx \sin \frac{\vartheta}{2} ; \cos \vartheta \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot \frac{\vartheta^2}{4} ; s = R \cdot \left(1 - \cos \frac{\vartheta}{2}\right)$$

$$s = R \left(1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{\vartheta^2}{4}\right) = R \cdot \frac{\vartheta^2}{8} ;$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{L}{R} = \frac{1}{2} \cdot \vartheta \Rightarrow \frac{L^2}{4R^2} = \frac{\vartheta^2}{4} \Rightarrow \frac{L^2}{8R^2} = \frac{\vartheta^2}{8}$$

$$\text{Otteniamo quindi : } s = R \cdot \frac{L^2}{8R^2} = \frac{L^2}{8R}$$

$$p = 0.3 \cdot R \cdot B \Rightarrow p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8s}$$

L'accuratezza della misura di P, per un B fissato, è legata a quella di R e, da questa, a quella di L ed s.

$$p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot s} \quad ; \quad \Delta p = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot \Delta s$$

$$s = 0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot p} \quad \Rightarrow \quad s^2 = \left(0.3 \cdot B \cdot \frac{L^2}{8 \cdot p} \right)^2 \quad \text{da cui :}$$

$$\Delta p = \left(\frac{0.3BL^2}{8} \right) \cdot \frac{p^2 8^2 \Delta s}{(0.3BL^2)^2} = \frac{8 \cdot p^2 \Delta s}{0.3 \cdot B \cdot L^2}$$

$$\frac{\Delta p}{p^2} = \frac{8}{0.3 \cdot B \cdot L^2} \cdot \Delta s$$

$$\left(\text{Formula di Gluckstern : } \Delta s = \varepsilon \cdot \frac{1}{8} \cdot \sqrt{\frac{720}{N+4}} \right)$$

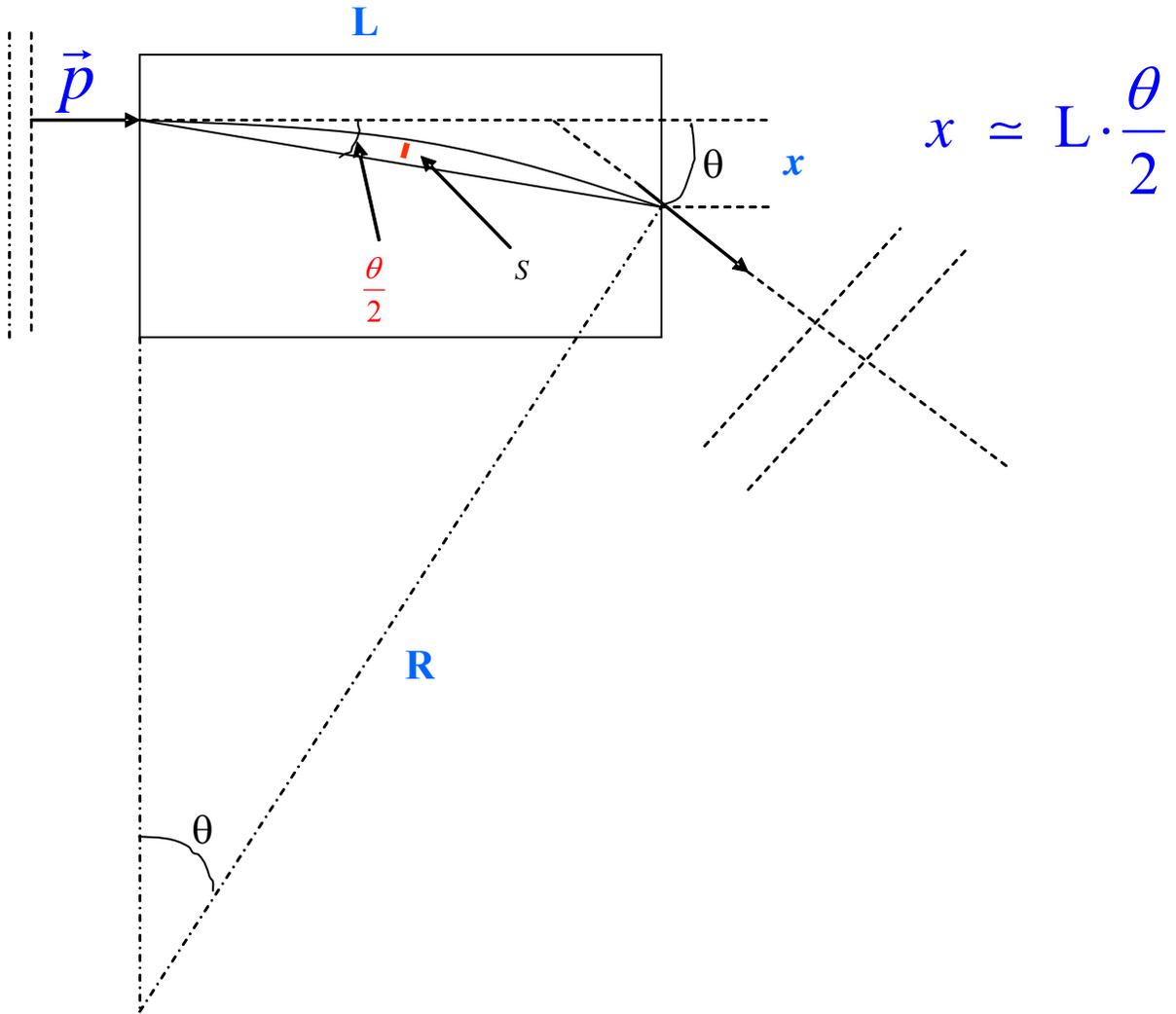
dove ε e' la risoluzione della misura sul singolo punto data dal rivelatore; ed N e' il numero di punti misurati sulla traccia.

$$\text{Avremo : } \frac{\Delta p}{p^2} = \frac{\varepsilon}{0.3BL^2} \sqrt{\frac{720}{N+4}} = \frac{8}{0.3BL^2} \Delta s$$

— Esempio : B = 1.5 Tesla; L = 1.8 m ; $\Delta s = 200 \mu\text{m}$:

$$\Delta p/p^2 = 1.1 \times 10^{-3} / \text{GeV}$$

- b) **Analizzatore Magnetico**. La misura dei punti sulle tracce viene fatta prima e dopo la deviazione \mathcal{G} causata dal campo magnetico B . Serve a misurare p ed il segno della carica.



$$cp = 0.3 \cdot B \cdot R \quad ; \quad R \approx \frac{L}{\theta} \quad ; \quad cp\theta \approx 0.3BL \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{0.3B}{cp} \cdot L$$

$$x = \frac{0.3L^2B}{2cp} \quad ; \quad cp = \frac{0.3L^2B}{2x} \quad ; \quad \Delta(cp) = \frac{\partial cp}{\partial x} \cdot \Delta x = \frac{0.3L^2B}{2x^2} \cdot \Delta x$$

$$\frac{\Delta(cp)}{(cp)^2} = \frac{2}{0.3L^2B} \cdot \Delta x$$

; dove Δx e' la precisione delle camere usate

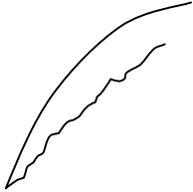
Nel vuoto : $\Delta(cp) / (cp)^2 = \text{costante}$

3.1 Analizzatori Magnetici



In presenza di materiale dobbiamo tener conto dello scattering multiplo colombiano:

$$\Delta x = \sqrt{\Delta x_{\text{risoluzione}}^2 + \Delta x_{\text{scatt.mult.}}^2}$$



$$\Delta x_{SM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{15 \text{ MeV} / c}{\beta p} L \sqrt{\frac{L}{x_0}}$$

Esercizio: $B = 1.8 \text{ T}$; $L = 1 \text{ m}$; $\Delta x = 100 \mu\text{m}$

a) Nel vuoto $\frac{\Delta(cp)}{(cp)^2} = 3.7 \cdot 10^{-4}$

P (GeV)	10	100
$x = \frac{0.3L^2 B}{2cp}$	27 mm	2.7 mm
$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta x}{x}$	3.7 ‰	3.7 ‰

b) Magnete in aria: $X_0(\text{aria}) = 300$

per $p = 10 \text{ GeV} \rightarrow \beta \approx 1$

$$\Delta x_{SM} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{15}{10^4} \cdot 1 \sqrt{\frac{1}{300}} = 50 \mu\text{m}$$

Confrontabile con le massime Δx raggiungibili.

4. Misure di velocità'

1) Rivelatori Čerenkov: se misuro ϑ c:

$$\cos \vartheta = \frac{1}{n\beta} \Rightarrow d\cos \vartheta = -\sin \vartheta \cdot d\vartheta = -\frac{1}{n} \cdot \frac{d\beta}{\beta^2}$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = n\beta \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta = \frac{1}{\cos \vartheta} \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta$$

$$\frac{d\beta}{\beta} = \operatorname{tg} \vartheta \cdot d\vartheta$$

2) Campionando lungo la traccia il suo $\frac{dE}{dx} \rightarrow \frac{1}{\beta^2} \rightarrow \beta$

Nota bene: se è noto l'impulso la misura della velocità determina la la misura della sua massa : $p = m\beta c\gamma$

Esercizio: calcoliamo $\delta m / m$, noto p:

$$m = \frac{p}{c\beta\gamma} \rightarrow \delta m = \frac{p}{c} \delta\left(\frac{1}{\beta\gamma}\right) = -\frac{p}{c} \frac{1}{(\beta\gamma)^2} \delta(\beta\gamma)$$

$$\delta(\beta\gamma) = \gamma\delta\beta + \beta\delta\gamma$$

$$\delta\gamma = \delta\left[(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}\right] = \frac{1}{2}(1-\beta^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\beta d\beta = \gamma^3 \beta d\beta$$

4. Misure di velocità'

$$\begin{aligned}\delta(\beta\gamma) &= \gamma\delta\beta + \beta^2\gamma^3\delta\beta = \gamma\delta\beta(1 + \beta^2\gamma^2) \\ &= \delta\beta \cdot \gamma \left[1 + \frac{\beta^2}{(1-\beta^2)} \right] = \delta\beta\gamma \left[\frac{1-\beta^2 + \beta^2}{1-\beta^2} \right] \\ &= \delta\beta\gamma \cdot \gamma^2 = \gamma^3\delta\beta\end{aligned}$$

$$\delta m = \frac{p}{c} \frac{\delta(\beta\gamma)}{(\beta\gamma)^2} = \frac{p}{c} \frac{1}{(\beta\gamma)^2} \cdot \gamma^3\delta\beta$$

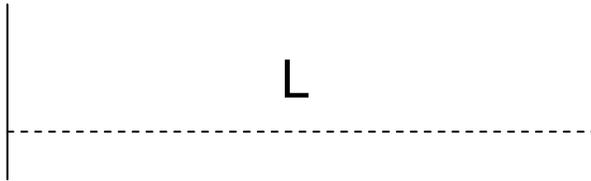
$$\frac{\delta m}{m} = \frac{\frac{p}{c} \frac{\gamma^3}{(\beta\gamma)^2} \delta\beta}{\frac{p}{c(\beta\gamma)}} = \frac{\gamma^3}{(\beta\gamma)} \delta\beta = \gamma^2 \frac{\delta\beta}{\beta}$$

$$\frac{\delta m}{m} = \frac{1}{(1-\beta^2)} \frac{\delta\beta}{\beta}$$

La sensibilità della misura peggiora all'aumentare di β

Esercizio: misura del tempo di volo di una particella

In fisica delle particelle e' possibile identificare una particella da un' altra, avente lo stesso impulso ma di diversa massa, **dalla misura del tempo di volo** che le particelle impiegano a compiere una determinata distanza. Calcoliamo il tempo di volo a percorrere una distanza $L=15$ metri tra due rivelatori a scintillazione posti ai due estremi della stessa distanza.



Le particella di massa m_1 ed m_2 ed impulso p percorreranno la distanza L rispettivamente nei tempi t_1 e t_2 dati da :

$$t_i = \frac{L}{v_i} = \frac{L}{c \frac{v_i}{c}} = \frac{L}{c \beta_i} = \frac{L}{c^2 \frac{p}{E_i}} = L \frac{\sqrt{p^2 c^2 + m_i^2 c^4}}{c^2 p}$$

$$t_i = \frac{L}{c} \sqrt{1 + \frac{m_i^2 c^2}{p^2}} \quad \Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + \frac{m_2^2 c^2}{p^2}} - \sqrt{1 + \frac{m_1^2 c^2}{p^2}} \right)$$

$$\frac{\Delta t}{L} = 3.34 \left(\sqrt{1 + \frac{m_2^2}{p^2}} - \sqrt{1 + \frac{m_1^2}{p^2}} \right) \frac{n \text{ sec}}{m} \quad (\text{m e p in MeV})$$

Se $p^2 \gg m_1^2 c^2$ ed $m_2^2 c^2$, avremo:

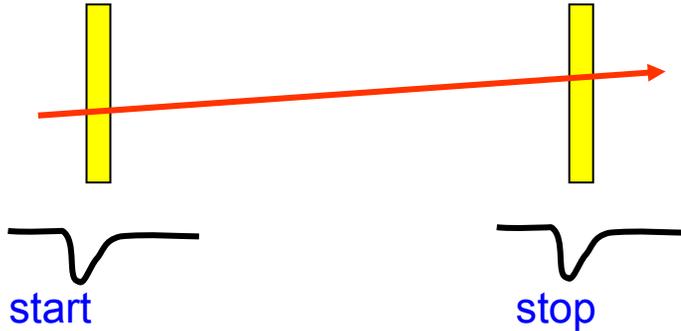
$$\frac{\Delta t}{L} \cong 1670 \frac{(m_2^2 - m_1^2)}{p^2} \frac{\text{picosecondi}}{m}$$

◆ Δt va come $1/p^2$

Tempo di volo

Particle ID using Time Of Flight (TOF)

$$t = \frac{L}{\beta c}$$

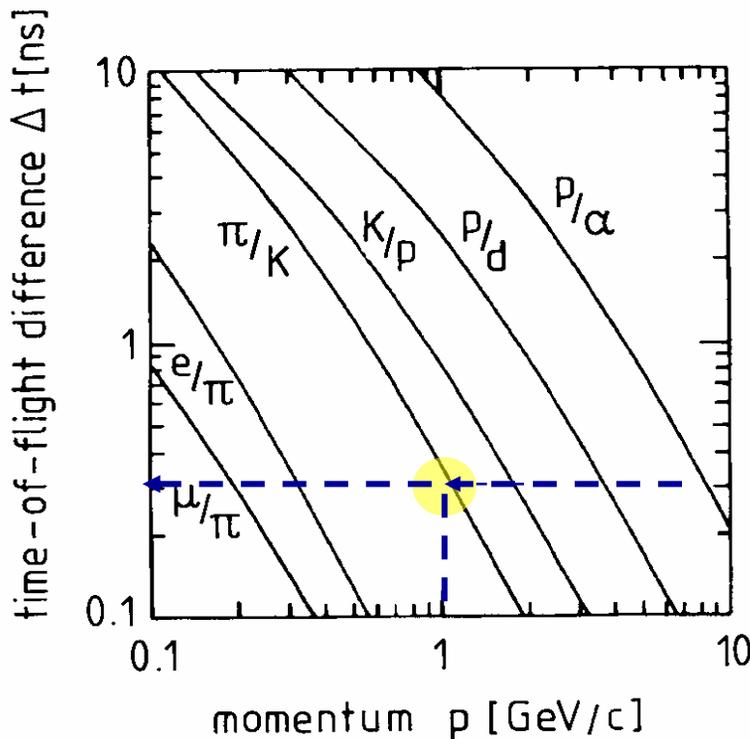


Mettiamo insieme la misura del TOF con quella di impulso ($p = m_0 \beta \gamma$)

$$m = p \sqrt{\frac{c^2 t^2}{L^2} - 1} \quad \text{Mass resolution} \quad \frac{dm}{m} = \frac{dp}{p} + \gamma^2 \left(\frac{dt}{t} + \frac{dL}{L} \right)$$

Differenza del tempo di volo tra due particelle di un dato impulso

$$\Delta t = \frac{L}{c} \left(\frac{1}{\beta_1} - \frac{1}{\beta_2} \right) = \frac{L}{c} \left(\sqrt{1 + m_1^2 c^2 / p^2} - \sqrt{1 + m_2^2 c^2 / p^2} \right) \approx \frac{Lc}{2p^2} (m_1^2 - m_2^2)$$



Δt for $L = 1$ m path length

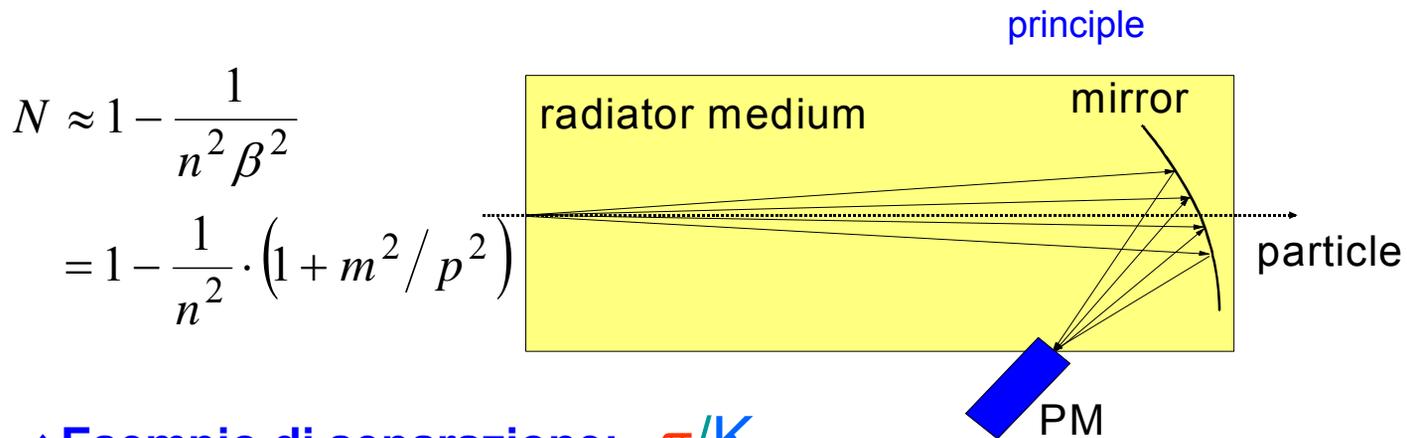
$\sigma_t = 300$ ps
 π/K separation up to
 1 GeV/c

Identificazione di particelle con luce Cerenkov

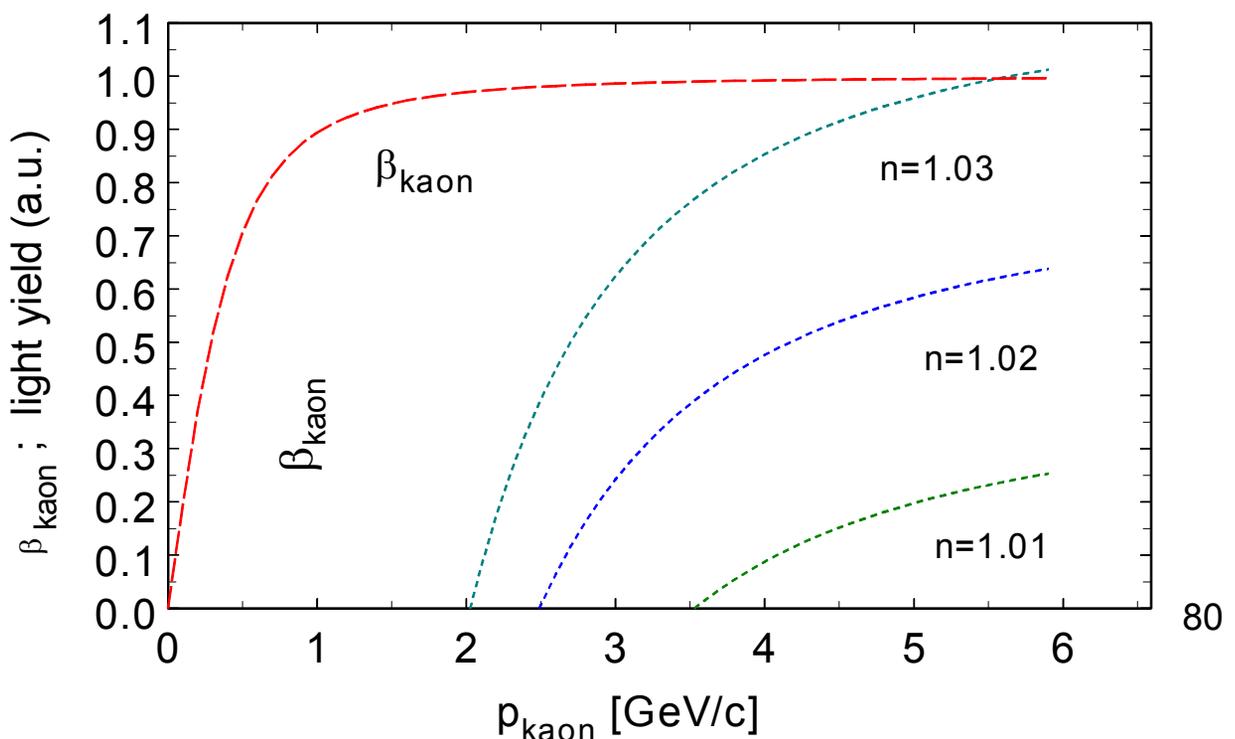
I rivelatori possono sfruttare:

- $N_{ph}(\beta)$: rivelatori a soglia (do not measure θ_C)
- $\theta(\beta)$: rivelatori differenziali e "RICH"
Ring Imaging Cherenkov detectors

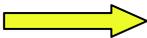
Rivelatori Cherenkov a soglia:



◆ Esempio di separazione: π/K



Misure di massa

- 1) **Thomson**  Spettrometri di massa (vedi figura)
- 2) Per particelle relativistiche occorrono campi elettrici troppo elevati: vedi il caso trattato in precedenza : note due variabili tra E, p ed M.
- 3) **Massa Invariante**. Nel caso di particelle instabili la massa si determina misurando l'impulso dei suoi prodotti di decadimento di cui sono note le masse.

Esempio: la particella di massa incognita M_x decade in due particelle di masse note m_1 ed m_2 . Si misurano gli impulsi vettoriali \vec{p}_1 e \vec{p}_2
Avremo :

$$\begin{aligned}
 P^2 &= M_x^2 = (P_1 + P_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\
 &= m_1^2 + p_1^2 + m_2^2 + p_2^2 - 2E_1E_2 - p_1^2 - p_2^2 - 2p_1p_2 \cos \vartheta \\
 M_x^2 &= m_1^2 + m_2^2 - 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \vartheta
 \end{aligned}$$

Supponiamo per semplicità che $p_i \gg m_i$, per cui : $E_i \approx p_i$

$$M_x^2 - m_1^2 - m_2^2 \approx 2p_1p_2(1 - \cos \vartheta) = 4p_1p_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}$$

$$2M_x \delta M_x = 4p_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \delta p_1 + 4p_1 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \delta p_2 + 4p_1p_2 2\sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2}$$

$$2M_x \delta M_x = 4p_1p_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \left(\frac{\delta p_1}{p_1} + \frac{\delta p_2}{p_2} + \frac{d\vartheta}{\text{tg} \frac{\vartheta}{2}} \right)$$

$$2M_x \delta M_x \approx 4p_1p_2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \left(2 \frac{\delta p}{p} + \frac{d\vartheta}{\text{tg} \frac{\vartheta}{2}} \right)$$

Spettrografo di massa

$$\blacklozenge qE = qvB_1 \Rightarrow v = E/B_1$$



$$\blacklozenge Mv^2/R = qvB_2 \Rightarrow M = qRB_1B_2/E$$

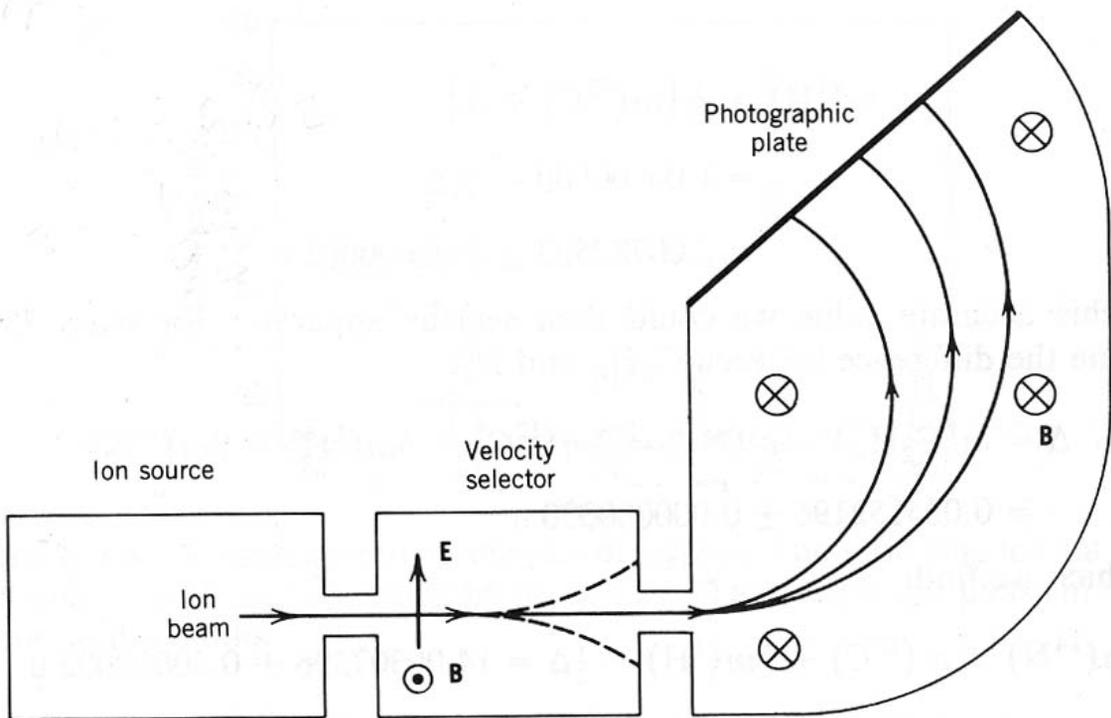


Figure 3.13 Schematic diagram of mass spectrograph. An ion source produces a beam with a thermal distribution of velocities. A velocity selector passes only those ions with a particular velocity (others being deflected as shown), and momentum selection by a uniform magnetic field permits identification of individual masses.

6. Misure di vita media

Molti nuclei e particelle sono instabili e decadono con la vita media τ definita dalla legge di decadimento :

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Come vedremo, le misure di vita media devono coprire un intervallo di valori che varia di circa 40 ordini di grandezza e sono quindi necessari DIVERSI METODI DI MISURA.

- 1) Caso in cui $\tau \gg \Delta t$ dove Δt è la durata della misura. In questo caso τ si determina CONTANDO il numero di decadimenti N_d

$$N_d = N(t) - N(t + \Delta t) \approx N(t) \frac{\Delta t}{\tau}$$

$$\tau = \frac{N}{N_d} \Delta t$$

Questo è il metodo usato per la grande maggioranza dei nuclei radioattivi.

La risoluzione della misura è determinata da $\sqrt{N_d}$ e dalla conoscenza della POPOLAZIONE CAMPIONE N .

- 2) La vita media di una particella che ha una velocità v nel laboratorio, la possiamo determinare **MISURANDO LA DISTANZA TRA IL PUNTO DI PRODUZIONE E QUELLO DI DECADIMENTO :**

La distribuzione dei tempi di decadimento è data da:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N_0}{\tau} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Se la particella ha velocità βc nel laboratorio, la sua vita media sarà data da $\gamma \tau$ ed avremo:

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dN}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{N_0}{\tau} \cdot \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{1}{\beta c} \cdot e^{-\frac{x}{\beta c \gamma \tau}}$$

dove $\beta \gamma c \tau$ è la lunghezza media percorsa nel laboratorio dal punto di produzione a quello di decadimento.

$$\frac{dN}{dx} = \frac{N_0}{l} \cdot e^{-\frac{x}{l}}$$

Con un rivelatore di risoluzione $\delta x = 30 \mu\text{m}$, si possono

misurare $\tau \approx \frac{10^{-13}}{\beta \gamma} \text{ sec}$

6. Misure di vita media

3) Per particelle a vita media di 10^{-23} s, come le risonanze, si fanno **misure indirette** misurando la larghezza della risonanza:

$$T = \frac{\hbar}{\tau}$$

Γ si può ricavare o dalla misura della massa invariante della particella, oppure da misure di sezioni d'urto in funzione dell'energia in reazioni in cui è formata la risonanza.

particella	τ (sec.)	$C \times \tau$
$K^+ (-)$	1.2×10^{-8}	3.7 m
K^0_S	5×10^{-10}	2.7 cm
K^0_L	5×10^{-8}	15.5 m
$D^+ (-)$	10×10^{-13}	315 μm
D^0	4×10^{-13}	123.4 μm
$B^+ (-)$	1.7×10^{-12}	502 μm
B^0	1.5×10^{-12}	462 μm