Memento: simmetrie e leggi di conservazione

- Leggi di conservazione
- simmetrie continue e discrete
- numero barionico e leptonico
- parita', coniugazione di carica
- Isospin

Leggi di conservazione

Tutto ciò che non è proibito accade

$$n \not\rightarrow p + e^- \quad ; \quad p \not\rightarrow n + e^+ + \nu \quad ; \quad \mu \not\rightarrow e + \gamma$$

- Se non accade vuol dire che è violata qualche legge di conservazione.

1. Leggi di conservazione " sacre": derivano da una simmetria della Lagrangiana (teorema di Noether)

   - *Traslazione temporale → energia*
   - *Traslazione spaziale → quantità di moto*
   - *Invar. per rotazione → momento angolare*
   - *Invar. di gauge (U(1)) → carica elettrica*
   - *etc… etc…*

2. Leggi di conservazione "empiriche": non sono "protette" da una simmetria della Lagrangiana e potrebbero venire violate in qualche processo

   - *ad esempio il numero leptonico o numero barionico*

Due tipi di simmetrie

$$|\psi'\rangle = U|\psi\rangle \quad ; \quad \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|\psi\rangle$$

U = operatore unitario della simmetria

- **Simmetrie continue:**
  esempio traslazione spaziale.
  - si ricavano dall'identità facendo trasformazioni infinitesime;
  - Esiste un generatore della trasformazione:

$$U(\alpha)=e^{i\alpha F}$$

α = parametro reale ;
F = generatore della trasf.

|

  - F è un operatore hermitiano che commuta con l'hamiltoniana → è un osservabile.
  - **numeri quantici additivi.**

- **Simmetrie discrete**: esempio parità.
  - non si ricavano facendo piccoli passi
  - **numeri quantici moltiplicativi.**

Numero barionico

- Sperimentalmente si osservò che nelle reazioni nucleari il numero di nucleoni si conservava; questo continuava ad essere vero anche considerando i fermioni “strani” come Λ e Σ.

- Stuchelberg ipotizzò che si doveva conservare il numero barionico.

- Oggi diciamo che in una reazione si deve conservare il numero di quark meno il numero di antiquark:

$$\boxed{B = N_q - N_{\bar{q}}}$$

- Tuttavia non si riesce ancora a trovare una simmetria dell’Hamiltoniana che tenga conto di questo effetto, per cui ci sono teorie che violano la conservazione del numero barionico.

- La violazione del numero barionico è uno degli ingredienti “base” per spiegare la “scomparsa” dell’antimateria.

Numero leptonico

- Sperimentalmente si osserva che anche il numero leptonico si conserva.
- Inoltre si hanno (avevano) tre leggi di conservazione separate per i tre leptoni, perché non esiste il decadimento:

$$\mu \to e + \gamma \quad \text{ma} \quad \mu \to e + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$$

$$\text{B.R.}(\mu \to e + \gamma) < 10^{-11} \quad [\text{limite sperimentale}]$$

- Tuttavia negli ultimi anni si è osservata l'oscillazione dei neutrini (l'autostato di massa non è uguale all'autostato di sapore), quindi il numero leptonico non si conserva più separatamente.

$$\text{B.R.}(\mu \to e + \gamma) \approx 10^{-55} \quad [\text{valore del MS}]$$

- Nuove teorie (es. SUSY) prevedono:

$$\text{B.R.}(\mu \to e + \gamma) \approx 10^{-11\text{-}15}$$

$$\text{B.R.} \approx 10^{-13} \quad [\text{sensitivita' aspet. MEG}]$$

Parità

$$\boxed{x,\ y,\ z \ \rightarrow\ -x,\ -y,\ -z}$$

- Gli autovalori di P sono: **+1** e **-1**
- Una funzione d'onda può avere o non avere una parità definita. Nel caso l'avesse può essere pari (autovalore +1) oppure dispari (autovale -1).
  Esempio: armoniche sferiche.
- La parità delle armoniche sferiche è:

$$\boxed{Y_\ell^m(\vartheta,\varphi) \rightarrow Y_\ell^m(\pi-\vartheta,\pi+\varphi) = (-1)^\ell\, Y_\ell^m(\vartheta,\varphi)}$$

- Nelle interazioni forti e e.m. la parità è conservata.
  Alcune reazioni non sono state osservate , mentre altre avvengono, ad esempio:

$$\boxed{\pi^- + d \rightarrow n + n \quad ; \quad \pi^- + d \not\rightarrow n + n + \pi^0}$$

ciò si può spiegare assegnando al pione una **parità intrinseca**.

Parità del pione: η_π

È stata misurata dall'assorbimento di pioni lenti in deuterio

$$\pi^- + d \rightarrow n + n$$

deutone: $S_d = 1 \;\Rightarrow\; \eta_d = 1 \quad \left[\eta = (-1)^{L+S+1}\right]$

- La conservazione della parità richiede:

$$\eta_\pi \cdot \eta_d \cdot (-1)^{L_i} = \eta_d \cdot \eta_d \cdot (-1)^{L_f}$$

$$\eta_d = 1,\; \eta_d \cdot \eta_d = 1,\; L_i = 0 \;\Rightarrow\; \eta_\pi = (-1)^{L_f}$$

- I due neutroni sono due fermioni identici, quindi la funzione d'onda totale deve essere antisimmetrica. Lo stato iniziale ha J=1 perché $S_\pi = 0$, $S_d=1$ e $L_i = 0$.

$$|\psi_{nn}^{(1)}\rangle = |J=1, S=1, L_f=0,2\rangle \quad \Rightarrow \psi \text{ simmetrica}$$

$$|\psi_{nn}^{(2)}\rangle = |J=1, S=1, L_f=1\rangle \quad \Rightarrow \psi \text{ antisimmetrica}$$

$$|\psi_{nn}^{(3)}\rangle = |J=1, S=0, L_f=0,2\rangle \quad \Rightarrow \psi \text{ simmetrica}$$

$$\Rightarrow \quad \eta_\pi = (-1)^1 = -1$$

Coniugazione di carica

- L'operatore coniugazione di carica trasforma una particella nella sua antiparticella, la quale ha tutti i numeri quantici interni di segno opposto (carica, stranezza, momento magnetico, etc…).

Solo le particelle "neutre" possono essere autostati dell'operatore di carica.

$$C|\alpha,\psi\rangle = C_\alpha|\alpha,\psi\rangle \quad [\text{autostato di C}]$$
$$C|a,\psi\rangle = |\bar{a},\psi\rangle \quad [\bar{a}\text{=antiparticella di a}]$$

- Gli autovalori C_α sono +1 e -1.
- Autostati di C si possono costruire con coppie particelle-antiparticelle dove l'operatore C scambia le due particelle.
- Se lo stato è simmetrico o antisimmetrico per via dello scambio, si ha:

$$C|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle = |\bar{a},\psi_1;a,\psi_2\rangle = \pm|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle$$

in questo caso $|a,\psi_1;\bar{a},\psi_2\rangle$ e' un autostato di C

Stato $\pi^+ \pi^-$

- Prendiamo una coppia $\pi^+ \pi^-$ in uno stato di momento angolare orbitale L:

$$\boxed{C|\pi^+\pi^-, L\rangle = (-1)^L |\pi^+\pi^-, L\rangle}$$

perché scambiare i due pioni è equivalente ad invertire le loro posizioni spaziali.

- N.B. ricordiamo che lo spin del pione è zero, quindi non va considerata la parte di spin nella funzione d'onda.

Stato $f\bar{f}$

- coppia di fermioni di spin ½
  - da tenere presente che:

$$|\uparrow\uparrow\rangle \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle+|\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad ; \quad |\downarrow\downarrow\rangle \qquad \text{[Simmetrica]}$$

$S=1,\ S_Z=1 \qquad S=1,\ S_Z=0 \qquad S=1,\ S_Z=-1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right) \quad [S=0,\ S_z=0] \qquad \text{[antisimmetrica]}$$

scambiare i due fermioni introduce, a causa dello spin, un fattore $(-1)^{S+1}$

- Inoltre, a causa della parità intrinseca opposta di fermione-antifermione (vedi Dirac), occorre introdurre un altro fattore -1.

$$C|f\bar{f},J,L,S\rangle = (-1)^L \cdot (-1)^{S+1}(-1)|f\bar{f},J,L,S\rangle =$$
$$= (-1)^{L+S}|f\bar{f},J,L,S\rangle$$

- Questo pone dei vincoli nell'assegnazione del contenuto dei quark alle varie particelle.

Coniugazione di carica del π^0

$S_{\pi^0}=0$

S = spin della coppia $q\bar{q}$ del π^0
L = momento angolare orbitale di $q\bar{q}$

- La somma di S e L della coppia quark-antiquark da lo spin del pione.

$$\Rightarrow \ L + S = 0 \quad \Rightarrow \ C_{\pi^0} = (-1)^{L+S} = (-1)^0 = 1$$

- Sperimentalmente si trova che il decadimento dominante è: $\pi^0 \to \gamma\gamma$

$$C\,|\pi^0\rangle = C_{\pi^0}\,|\pi^0\rangle\ ;$$

$$C\,|\gamma\gamma\rangle = C_\gamma \cdot C_\gamma\,|\gamma\gamma\rangle = 1\cdot|\gamma\gamma\rangle \text{ dato che } C_\gamma^2 = 1$$

- Per l'invarianza delle interazioni e.m. per coniug. di carica si deve avere $C_{\pi^0}=1$ in accordo con il modello a quark.

N.B. : $C_\gamma = -1$ perché ($q\to -q$; $E,B\to -E,-B$)

$\Rightarrow$ La C-parity di 3 fotoni e': $(C_\gamma)^3=-1$

$$R = \frac{\Gamma(\pi^0 \to 3\gamma)}{\Gamma(\pi^0 \to 2\gamma)} < 3\cdot 10^{-8}$$

Alcuni numeri quantici conservati

- N.B. non tutte le interazioni rispettano le varie leggi di conservazione. Ad esempio:

Quantity	Strong	EM	Weak	Comments
Baryon number	Y	Y	Y	no $p \to \pi^+ \pi^o$
Lepton number(s)	Y	Y	Y	no $\mu^- \to e^- \gamma$
top	Y	Y	***N***	discovered 1995
strangeness	Y	Y	***N***	discovered 1947
charm	Y	Y	***N***	discovered 1974,
bottom	Y	Y	***N***	discovered 1977
Isospin	Y	***N***	***N***	p = n ($m_u \approx m_d$)
Charge con. (C)	Y	Y	***N***	part. ⇔ anti-part.
Parity (P)	Y	Y	***N***	1956
CP or Time (T)	Y	Y	y/n	small ***No***
CPT	Y	Y	Y	sacred

- Un'interazione procede nell'ordine:
  1. interazione forte;
  2. interazione e.m. (ad esempio se ci sono fotoni che non interagiscono forte)
  3. interazione debole (ad esempio se ci sono neutrini oppure viene violata una legge di conservazione rispettata dalle interazioni forti ed elettromagnetiche.

Esempi di reazione

$$\nu_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n$$

- Int. debole ; proibita (vedi numero leptonico)

$$\nu_e + p \rightarrow e^- + \mu^+ + p$$

- Int. debole ; permessa ; (energia di soglia?)

$$\Lambda \rightarrow e^- + \mu^+ + \bar{\nu}_e$$

- Int. debole ; proibita (vedi numero barionico)

$$K^+ \rightarrow \mu^- + \pi^0 + \bar{\nu}_\mu$$

- Int. debole ; permessa (si conserva la stranezza?)

$$K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$$

- Int. ?; permessa (B.R. 20%)

Perché non accadono?

Non è sempre così semplice

$$\boxed{K^+ p \to \Lambda \pi^+ \pi^+}$$ (stranezza)

$$\boxed{\begin{array}{l} B.R.(\phi(1020) \to KK) \approx 83\% \\ B.R.(\phi(1020) \to \pi^+\pi^-\pi^o) \approx 15\% \end{array}}$$ (regola di OZI)

$$\boxed{\frac{\sigma(\pi^+ p \to \pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p \to \pi^- p)} = \frac{195 \text{ mb}}{22 \text{ mb}} = 8.86 \approx 9}$$ (isospin)

$$\boxed{\frac{\Gamma(\pi^- \to e^- \overline{\nu}_e)}{\Gamma(\pi^- \to \mu^- \overline{\nu}_\mu)} = 1.2x10^{-4}}$$ (elicita')

Isospin

- Heisemberg propose nel 1932 che il protone ed il neutrone fossero due stati diversi di una stessa particella: il nucleone.

- Per implementare questa idea si può rappresentare il nucleone come un vettore colonna a due componenti:

$$\boxed{N=\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \quad ; \quad p=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} \quad ; \quad n=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}}$$

- Il formalismo è identico al formalismo di Pauli per trattare lo spin dell'elettrone.

- Il protone ha $I_3 = ½$ ed il neutrone $I_3 = -½$

- Se le interazioni forti sono invarianti per rotazioni nello spazio dell'isospin, allora l'isospin si deve conservare in tutti i processi dove intervengono le interazioni forti.

Formula di Gell-Mann - Nishijima

La terza componente dell'isospin distingue la carica all'intero di un multipletto di isospin

stranezza

carica

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(B+S)$$

Numero barionico

N.B. $B+S = Y$ (ipercarica)

$$\Rightarrow \quad Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$$

L'interazione elettromagnetica rompe la simmetria di isospin.
Di conseguenza le masse all'interno del multipletto sono diverse (m_p diversa da m_n)

Isospin

Vediamo una conseguenza dinamica della conservazione dell'isospin

- Supponiamo di avere due nucleoni. Dalla regola di addizione dei momenti angolari, sappiamo che l'isospin totale può essere 1 oppure 0.

Tripletto simmetrico; I = 1

a) $|1,1\rangle = pp$

b) $|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn+np)$

c) $|1,-1\rangle = nn$

Isosingoletto antisimmetrico; I = 0

$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(pn - np)$

- Esiste uno stato legato protone-neutrone (il deutone), ma non esistono stati legati protone-protone o neutrone-neutrone, quindi il deutone deve essere un isosingoletto, altrimenti sarebbero dovuti esistere anche gli altri due stati che differiscono per una rotazione nello spazio dell'isospin.

Scattering nucleone-nucleone

Consideriamo i processi:

a) $p + p \rightarrow d + \pi^+$
b) $p + n \rightarrow d + \pi^0$
c) $n + n \rightarrow d + \pi^-$

il π ha isospin 1 perché esiste in tre stati diversi.

- Dato che il deutone ha I=0, per i processi di destra si ha:

$$d + \pi^+ = |1,1\rangle \ ; \ d + \pi^0 = |1,0\rangle \ ; \ d + \pi^- = |1,-1\rangle$$

mentre per quelli di sinistra si ha:

$$p + p = |1,1\rangle \ ; \ p + n = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1,0\rangle + |0,0\rangle) \ ; \ n + n = |1,-1\rangle$$

- Dato che I si deve conservare, contribuiscono solo gli stati con I= 1. Le ampiezze di scattering devono essere nel rapporto:

$$1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : 1$$ e le σ $2 : 1 : 2$

- I processi a) e b) sono stati misurati, ed una volta tenuto conto dell'interazione e.m., essi hanno il rapporto predetto.

Scattering pione-nucleone

Consideriamo le 4 reazioni:

a) $\pi^{+} + p \rightarrow \pi^{+} + p$

b) $\pi^{-} + p \rightarrow \pi^{0} + n$

c) $\pi^{-} + p \rightarrow \pi^{-} + p$

d) $\pi^{-} + n \rightarrow \pi^{-} + n$

Gli stati iniziali sono la composizione di I=1 e I=1/2 che danno I=1/2 e I=3/2

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2}$$

- Esprimiamo i vari stati nella base dell'isospin totale usando i coefficienti di Clebsch-Gordan

$$|\pi^{+},p\rangle = |\tfrac{3}{2},+\tfrac{3}{2}\rangle \quad ; \quad |\pi^{-},p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

$$|\pi^{-},n\rangle = |\tfrac{3}{2},-\tfrac{3}{2}\rangle \quad ; \quad |\pi^{0},n\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}\rangle$$

Scattering pione-nucleone

- Scriviamo i 4 processi nella nuova base:

a) $|\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2},+\frac{3}{2}\rangle$

b) $\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

c) $\sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \rightarrow \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$

d) $|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle \rightarrow |\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\rangle$

- Per calcolare le ampiezze di probabilità occorre fare il prodotto scalare: $\langle f|S|i\rangle$

$$\langle\tfrac{3}{2},I_3|S|\tfrac{3}{2},I_3\rangle = A_{3/2} \;;\; \langle\tfrac{1}{2},I_3|S|\tfrac{1}{2},I_3\rangle = A_{1/2}$$

N.B. $A_{1/2} \neq A_{3/2}$

a) $A_{tot}=A_{3/2}$

b) $A_{tot}=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2}-\frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right)$

c) $A_{tot}=\left(\frac{1}{3}A_{3/2}+\frac{2}{3}A_{1/2}\right)$

d) $A_{tot}=A_{3/2}$

N.B. le interazioni forti non mescolano stati con isospin diverso

Scattering pione-nucleone

- Le sezioni d'urto dei 4 processi saranno proporzionali, tramite un fattore K uguale per tutti (tiene conto dello spazio delle fasi, fattori 2π, etc...), a:

$$\text{a)}\quad \sigma\left(\pi^{+} + p \;\rightarrow\; \pi^{+} + p\right) = K\left|A_{3/2}\right|^2$$

$$\text{b)}\quad \sigma\left(\pi^{-} + p \;\rightarrow\; \pi^{0} + n\right) = K\left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2} - \frac{\sqrt{2}}{3}A_{1/2}\right|^2$$

$$\text{c)}\quad \sigma\left(\pi^{-} + p \;\rightarrow\; \pi^{-} + p\right) = K\left|\frac{1}{3}A_{3/2} + \frac{2}{3}A_{1/2}\right|^2$$

$$\text{d)}\quad \sigma\left(\pi^{-} + n \;\rightarrow\; \pi^{-} + n\right) = K\left|A_{3/2}\right|^2$$

- Da queste relazioni si evince che i processi a) e d) devono avere la stessa sezione d'urto alla stessa energia. Questo è verificato sperimentalmente.
- Per gli altri processi occorre conoscere $A_{1/2}$ e la fase relativa tra le ampiezze.

La risonanza Δ

- La risonanza Δ ha isospin 3/2 (esiste in 4 stati di carica diversa), quindi i processi in cui compare la Δ come risonanza di formazione posso procedere solo attraverso il canale con I=3/2, quindi:

a) $\sigma\left(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p\right) = K\left|A_{3/2}\right|^2$

b) $\sigma\left(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n\right) = K\left|\frac{\sqrt{2}}{3}A_{3/2}\right|^2 = \frac{2}{9}\left|A_{3/2}\right|^2$

c) $\sigma\left(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p\right) = K\left|\frac{1}{3}A_{3/2}\right|^2 = \frac{1}{9}\left|A_{3/2}\right|^2$

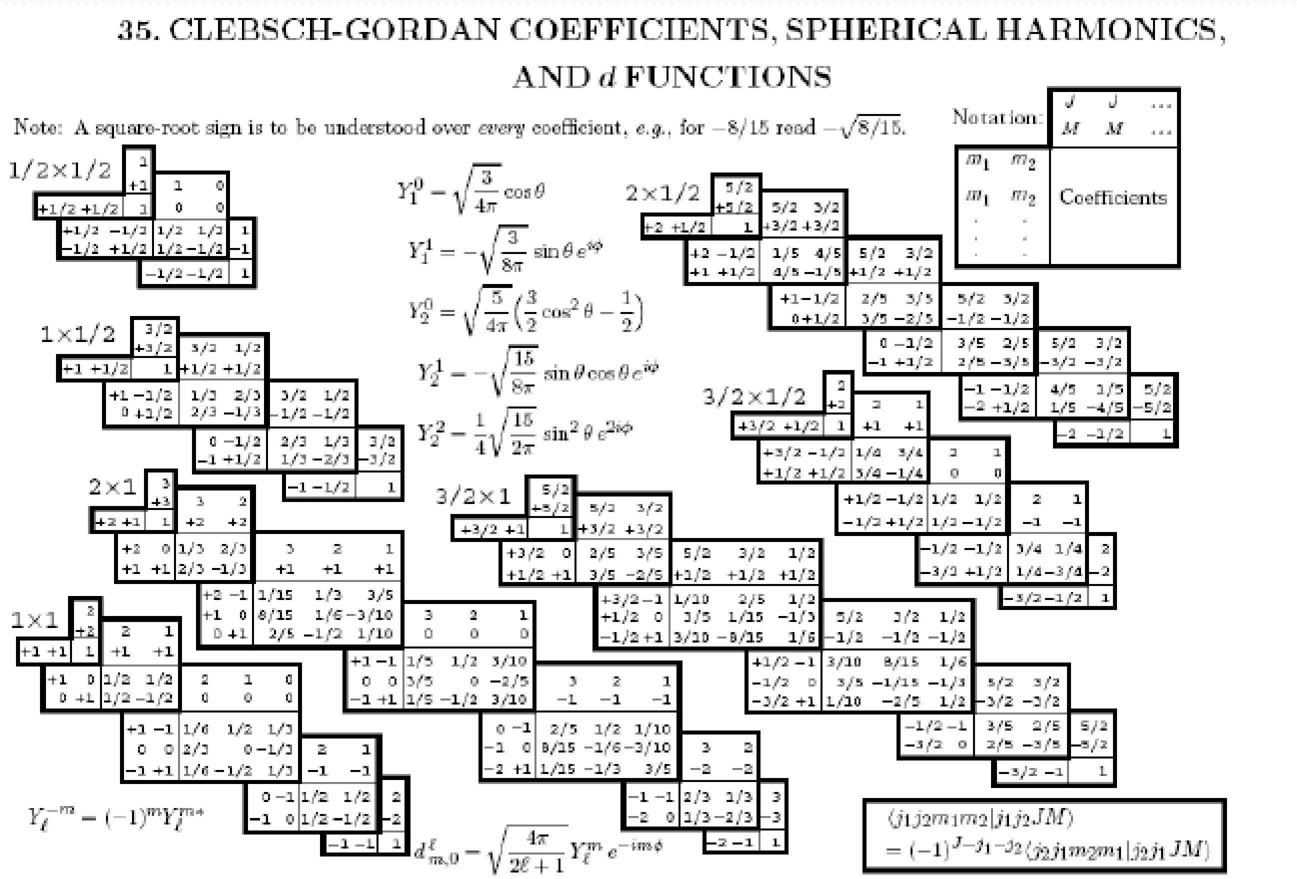
d) $\sigma\left(\pi^- + n \rightarrow \pi^- + n\right) = K\left|A_{3/2}\right|^2$

- Da queste relazioni si evince ora che:

$$\frac{\sigma\left(\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p\right)}{\sigma\left(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p\right)} = 9 \quad ; \quad \frac{\sigma\left(\pi^- + p \rightarrow \pi^0 + n\right)}{\sigma\left(\pi^- + p \rightarrow \pi^- + p\right)} = 2$$

che abbiamo verificato essere vero.

Coefficienti di Clebsch-Gordan



35. CLEBSCH-GORDAN COEFFICIENTS, SPHERICAL HARMONICS, AND d FUNCTIONS

Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, *e.g.*, for $-8/15$ read $-\sqrt{8/15}$.

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta$$

$$Y_1^1 = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^0 = \sqrt{\frac{5}{4\pi}}\Big(\frac{3}{2}\cos^2\theta - \frac{1}{2}\Big)$$

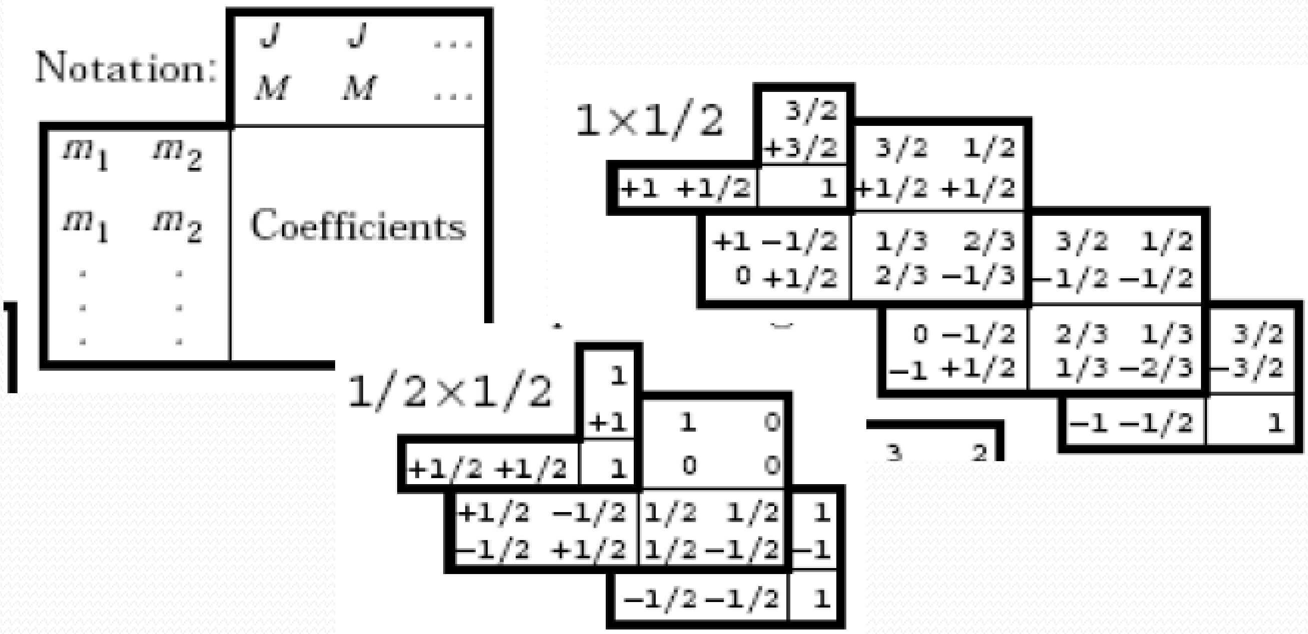
$$Y_2^1 = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\, e^{i\phi}$$

$$Y_2^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{15}{2\pi}}\sin^2\theta\, e^{2i\phi}$$

$$Y_\ell^{-m} = (-1)^m Y_\ell^{m*}$$

$$d^\ell_{m,0} = \sqrt{\frac{4\pi}{2\ell+1}}\, Y_\ell^m\, e^{-im\phi}$$

$$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 J M\rangle = (-1)^{J-j_1-j_2}\langle j_2 j_1 m_2 m_1 | j_2 j_1 J M\rangle$$



Note: A square-root sign is to be understood over *every* coefficient, Si abbia un sistema composto da una Σ^- ed un protone. Scrivere la funzione d'onda del sistema in termini degli stati di isospin totale del sistema e calcolare la probabilità di trovare il sistema in uno stato di spin isotopico totale ½

- La Σ^- ha I=1 e I_3=-1, mentre il protone ha I=1/2 e I_3 = +1/2 , combinando insieme i due stati si può avere come isospin totale ½ oppure 3/2 e come terza componente -1/2.

$$|\Sigma^- p\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\,|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\,|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle$$

- la probabilità di trovare il sistema in uno stato di isospin totale ½ è di 2/3

Il barione Λ decade in protone – π^- oppure in neutrone-□^{0}. Nel decadimento il quark s della Λ si trasforma in un quark u del nucleone, quindi il suo isospin forte varia di ½ . Assumendo che nel decadimento della Λ questa regola di selezione venga rispettata e trascurando altre correzioni, qual è il rapporto che ci si aspetterebbe tra il B.R. in p- π^- rispetto a quello in n- □^{0}?

Il nucleone ha isospin ½ mentre il pione ha isospin 1, quindi un nucleone più un pione possono dare isospin totale uguale a ½ oppure 3/2. La Λ ha isospin zero, quindi nella funziona d'onda del sistema nucleone-pione occorre prendere in considerazione soltanto la componente con isospin ½ , per la regola di selezione ΔI=1/2

$$p+\pi^- = \left|\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;-1\right\rangle = -\sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

$$n+\pi^0 = \left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1;0\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}\left|\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right\rangle$$

La probabilità di transizione è proporzionale al quadrato della funzione d'onda:

$$\frac{B.R.\left(\Lambda \to p+\pi^-\right)}{B.R.\left(\Lambda \to n+\pi^0\right)} = \frac{\left|\langle p+\pi^- \mid \tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle\right|^2}{\left|\langle n+\pi^0 \mid \tfrac{1}{2};-\tfrac{1}{2}\rangle\right|^2} = \frac{2/3}{1/3} = 2$$

I valori sperimentali sono: $B.R.\left(\Lambda \to p+\pi^-\right) = 63.9\%$; $B.R.\left(\Lambda \to n+\pi^0\right) = 35.8\%$

$$\frac{B.R.\left(\Lambda \to p+\pi^-\right)}{B.R.\left(\Lambda \to n+\pi^0\right)} = \frac{63.9}{35.8} = 1.78$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con ΔI=3/2

Il K^0_S può decadere in due pioni carichi oppure in due pioni neutri. Trovare il rapporto tra il B.R. del decadimento in pioni neutri rispetto a quello in pioni carichi. Si ricorda che per ragioni di simmetria lo stato finale deve avere isospin totale zero

Nei decadimento deboli con $\Delta S=1$ si ha $\Delta I=1/2$, quindi dato che il K ha $I=1/2$, lo stato finale dei due pioni deve avere $I=0$ oppure $I=1$. La funzione d'onda dei due pioni deve essere simmetrica rispetto allo scambio delle due particelle, quindi dato che essi hanno spin zero e si trovano in uno stato di momento angolare $l=0$, anche la parte di isospin deve essere simmetrica, quindi $I=0$.

Utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan si ha:

$$|0;0\rangle = +\sqrt{\frac{1}{3}}|1,+1;1-1\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}|1,0;1,0\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,-1;1+1\rangle =$$

$$= +\sqrt{\frac{1}{3}}\pi^+\pi^- - \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^0\pi^0 + \sqrt{\frac{1}{3}}\pi^-\pi^+$$

Di conseguenza abbiamo:

$$\frac{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0+\pi^0\right)}{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right)} = \frac{\left|\langle \pi^0\pi^0 \mid 0;0\rangle\right|^2}{\left|\langle \pi^+\pi^- \mid 0;0\rangle\right|^2} = \frac{1}{2}$$

I valori sperimentali sono:

$$B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0+\pi^0\right) = 30.7\% \quad ; \; B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right) = 69.2\%$$

$$\frac{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^0+\pi^0\right)}{B.R.\left(K_S^0 \to \pi^+ + \pi^-\right)} = \frac{30.7}{69.2} = 0.44$$

Probabilmente vi è un contributo di ordine superiore con $\Delta I=3/2$

. Dedurre attraverso quali canali di isospin possono avvenire le seguenti due reazioni: a) $K^- + p \rightarrow \Sigma^0 + \pi^0$; b) $K^- + p \rightarrow \Sigma^+ + \pi^-$

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, trovare il rapporto tra le sezioni d'urto σ_a/σ_b

---

Ricordiamo l'isospin totale e la terza componente delle particelle coinvolte nella reazione e scriviamo lo stato iniziale ed i due stati finali in termini degli autostati di isospin utilizzando i coefficienti di Clebsh-Gordan.

$$K^- = \left|I = \tfrac{1}{2}; I_3 = -\tfrac{1}{2}\right\rangle \;;\; p = \left|I = \tfrac{1}{2}; I_3 = \tfrac{1}{2}\right\rangle \quad \Rightarrow \quad K^- + p = +\sqrt{\frac{1}{2}}\left|1;0\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{2}}\left|0;0\right\rangle$$

$$\Sigma^0 = \left|I = 1; I_3 = 0\right\rangle \;;\; \pi^0 = \left|I = 1; I_3 = 0\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \Sigma^0 + \pi^0 = +\sqrt{\frac{2}{3}}\left|2;0\right\rangle - \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0;0\right\rangle$$

$$\Sigma^+ = \left|I = 1; I_3 = 1\right\rangle \;;\; \pi^- = \left|I = 1; I_3 = -1\right\rangle \quad \Rightarrow \quad \Sigma^+ + \pi^- = +\sqrt{\frac{1}{6}}\left|2;0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{2}}\left|1;0\right\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}\left|0;0\right\rangle$$

Di conseguenza la reazione a) può avvenire soltanto attraverso il canale di isospin totale 0, mentre la reazione b) può avvenire attraverso il canale con isospin 0 ed anche con isospin 1.

Nel caso in cui il canale dominante sia quello con isospin 0 per entrambe le reazioni, allora il rapporto tra le sezioni d'urto è pari al rapporto dei quadrati dei coefficienti di C.G. dell'autostato di isospin 0 nei due stati finali:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_b} = \left|\frac{\left\langle \Sigma^0 + \pi^0 \middle| 0;0 \right\rangle}{\left\langle \Sigma^+ + \pi^- \middle| 0;0 \right\rangle}\right|^2 = \left|\frac{-\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{1}{3}}}\right|^2 = 1$$