

Struttura degli adroni e modello a partoni

- **Scattering elastico elettrone-protone.**
- **Sezione d'urto di Rutherford, di Mott e di Rosenbluth.**
- **Risultati dell'esperimento di Hofstadter.**
- **Invarianza dalla scala.**
- **Scattering anelastico elettrone-protone.**
- **Scaling di Bjorken.**
- **Funzioni di struttura.**
- **Ipotesi dei partoni.**
- **Relazione di Callan-Gross.**
- **Quark di valenza e quark del mare.**
- **Cenni alla violazione dello scaling.**



Scattering elettrone-protone

- Scattering elastico:

negli anni 50' Hofstadter utilizzò elettroni da 100-500 MeV per sondare la distribuzione di carica dei nuclei.

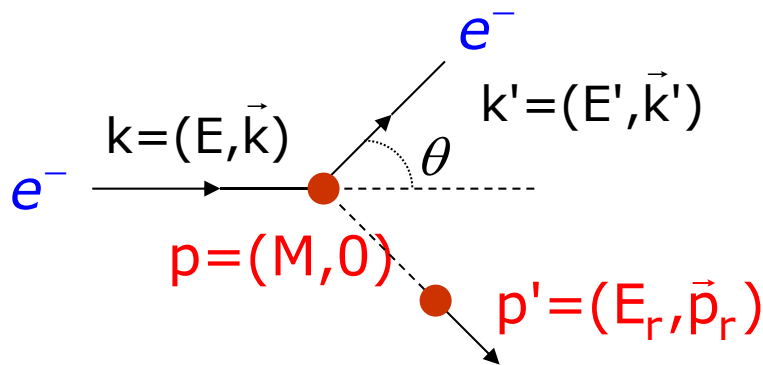
I risultati degli esperimenti mostrarono che il protone non è una particella puntiforme e permisero di misurarne la dimensione.

- Scattering anelastico:

nel 1967 Friedman, Kendall e Taylor iniziarono una serie di esperimenti a SLAC con elettroni fino a 20 GeV per studiare la struttura interna del protone ed andare alla ricerca dei quark.

Gli esperimenti mostrarono che il protone è composto da particelle puntiformi.

Scattering elastico elet.-protone: variabili cinematiche



- Nello scattering si misurano solo le grandezze relative all'elettrone, vale a dire:
 - energia iniziale E
 - energia finale E'
 - angolo di diffusione θ
- Dalla conservazione del quadrimpulso si ha:

$$k_\mu + p_\mu = k'_\mu + p'_\mu \quad \Rightarrow \quad E_r = E + M - E' \quad ; \quad \vec{p}'_r = \vec{k} - \vec{k}'$$

$$(k_\mu + p_\mu)^2 = (k'_\mu + p'_\mu)^2$$

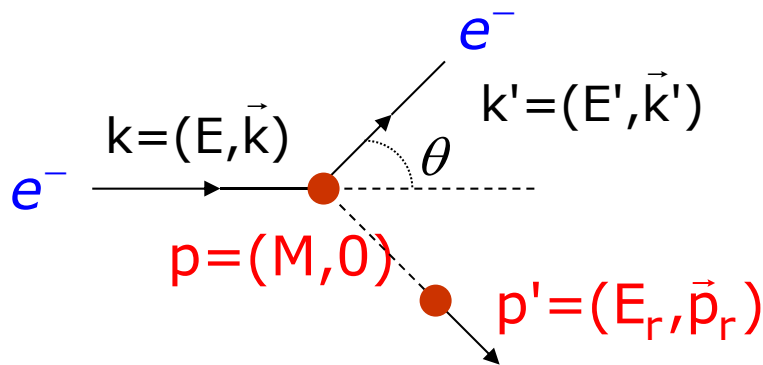
$$k_\mu k^\mu + p_\mu p^\mu + 2k_\mu p^\mu = k'_\mu k'^\mu + p'_\mu p'^\mu + 2k'_\mu p'^\mu$$

$$m_e^2 + m_p^2 + 2k_\mu p^\mu = m_e^2 + m_p^2 + 2k'_\mu p'^\mu$$

$$\Rightarrow \quad k_\mu p^\mu = k'_\mu p'^\mu$$

Valida solo per urti elastici

Scattering elastico elet.-protone: variabili cinematiche



$$E_r = E + M - E'$$

$$\vec{p}'_r = \vec{k} - \vec{k}'$$

$$k_\mu p^\mu = k'_\mu p'^\mu$$

$$\rightarrow EM - 0 = E' E_r - \vec{k}' \cdot \vec{p}'_r = E'(E + M - E') - \vec{k}' \cdot (\vec{k} - \vec{k}')$$

$$\rightarrow EM = E' E + E' M - (E')^2 - k k' \cos \theta + (k')^2$$

- Trascurando la massa dell'elettrone si ha:

$$(E')^2 - (k')^2 = m_e^2 = 0 \quad ; \quad k=E \quad ; \quad k'=E'$$

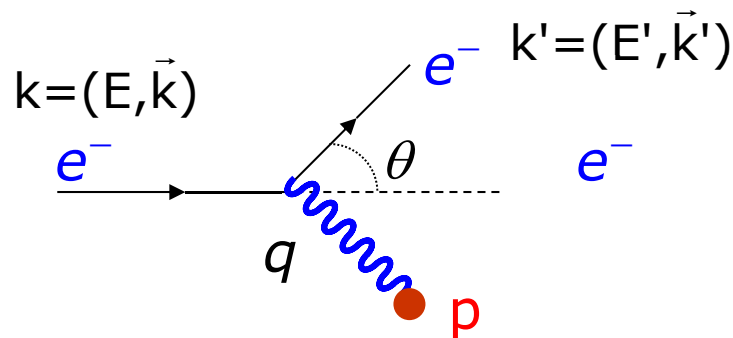
$$\rightarrow E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{M}(1 - \cos \theta)}$$

$$\rightarrow E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\text{N.B. } E'=E \text{ per } M \rightarrow \infty$$

Scattering elettrone-protone: quadrimpulso trasferito

- Si assume che nell'interazione venga scambiato un solo fotone.



Dalla conservazione del quadrimpulso si ha:

$$K_{\mu} = K'_{\mu} + q_{\mu} \quad \Rightarrow \quad q_{\mu} = K_{\mu} - K'_{\mu}$$

$$q_{\mu}^2 = (K_{\mu} - K'_{\mu})^2 = K_{\mu}K^{\mu} + K'_{\mu}K'^{\mu} - 2K_{\mu}K'^{\mu} = 2m_e^2 - 2K_{\mu}K'^{\mu} \approx -2K_{\mu}K'^{\mu}$$



$$q_{\mu}^2 = -2(EE' - KK' \cos \theta) = -2EE'(1 - \cos \theta) = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Si preferisce utilizzare la variabile positiva Q^2

$$Q^2 = -q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

N.B. questa relazione è valida anche per uno scattering anelastico, dove E ed E' sono variabili indipendenti. Nel caso di scattering elastico si ha:

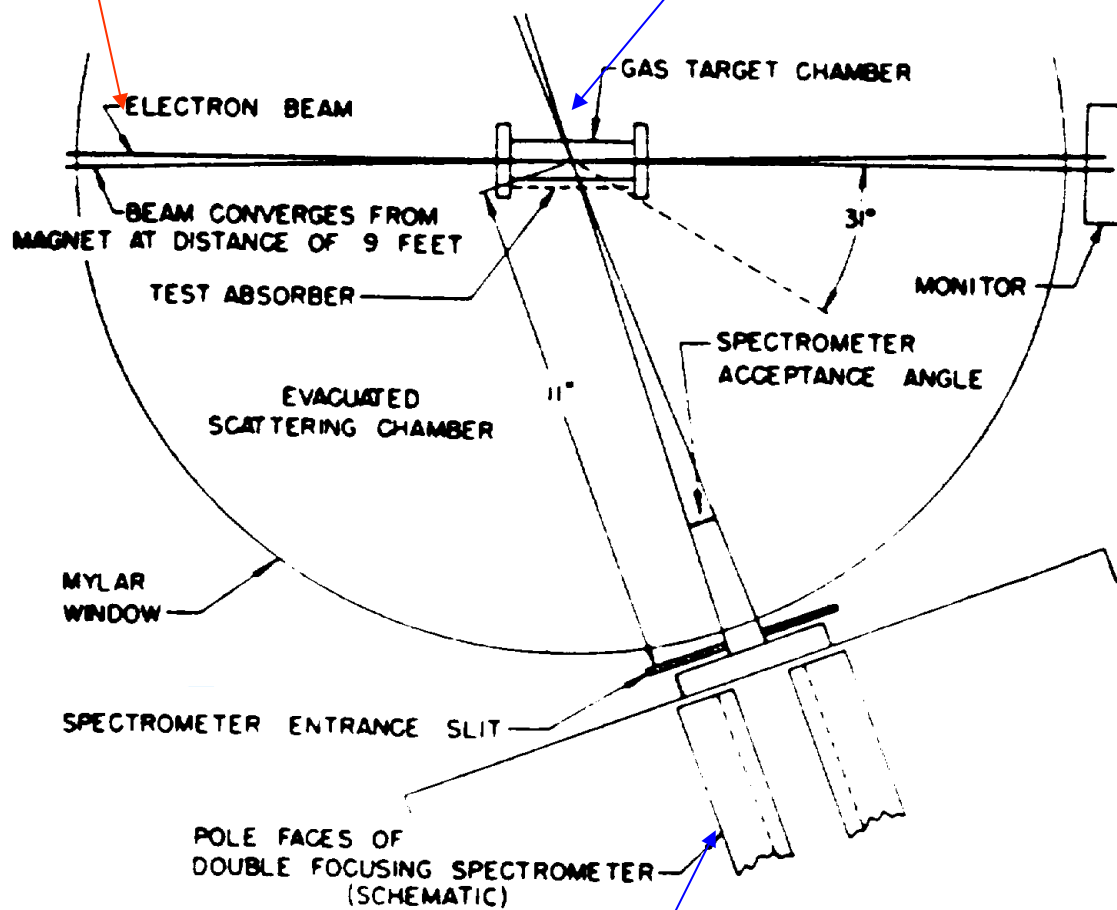
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Setup di Hofstadter (1956)

Nel 1953-55 Hofstadter e collaboratori eseguirono diversi esperimenti per misurare la dimensione e la struttura di diversi nuclei.

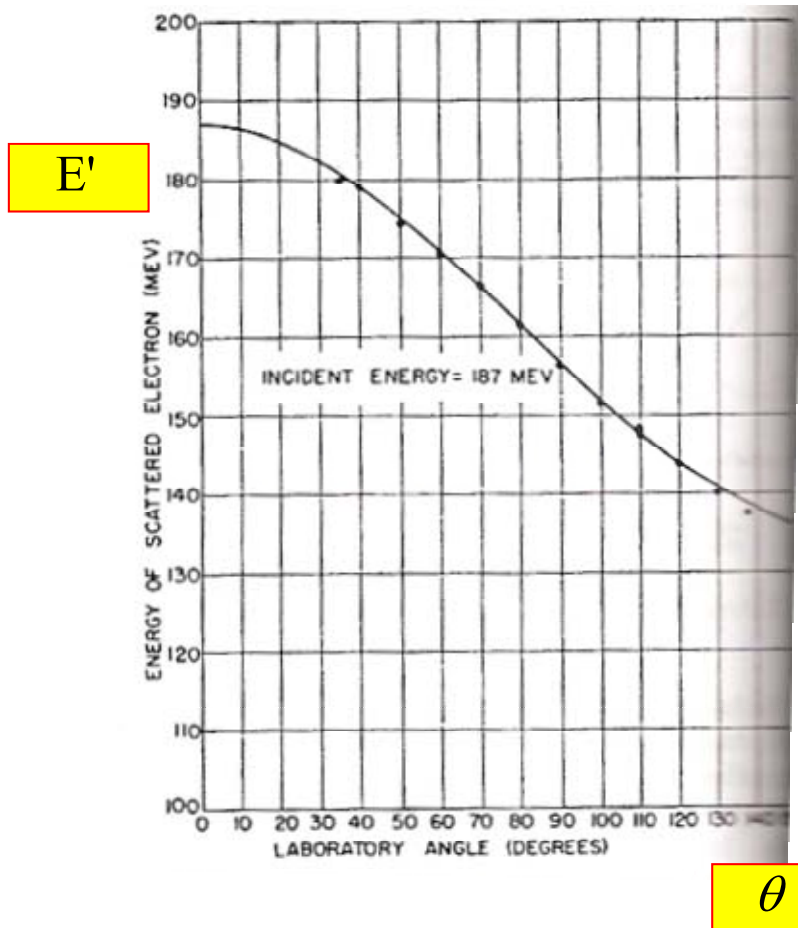
Nel 1956 Hofstadter e McAllister utilizzarono un bersaglio gassoso di idrogeno o elio per studiare la dimensione del protone e del neutrone.

Fascio: elettroni da 188 MeV Bersaglio: protoni o elio



Spettrometro per misurare l'angolo dell'elettrone diffuso. L'angolo θ varia da 35° a 138°

Esperimento di Hofstadter: energia dell'elettrone diffuso



Il grafico mostra la correlazione tra l'energia dell'elettrone diffuso e l'angolo di diffusione.

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

Nello scattering elastico E' e θ non sono variabili indipendenti

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Ad angoli diversi corrisponde un Q^2 diverso

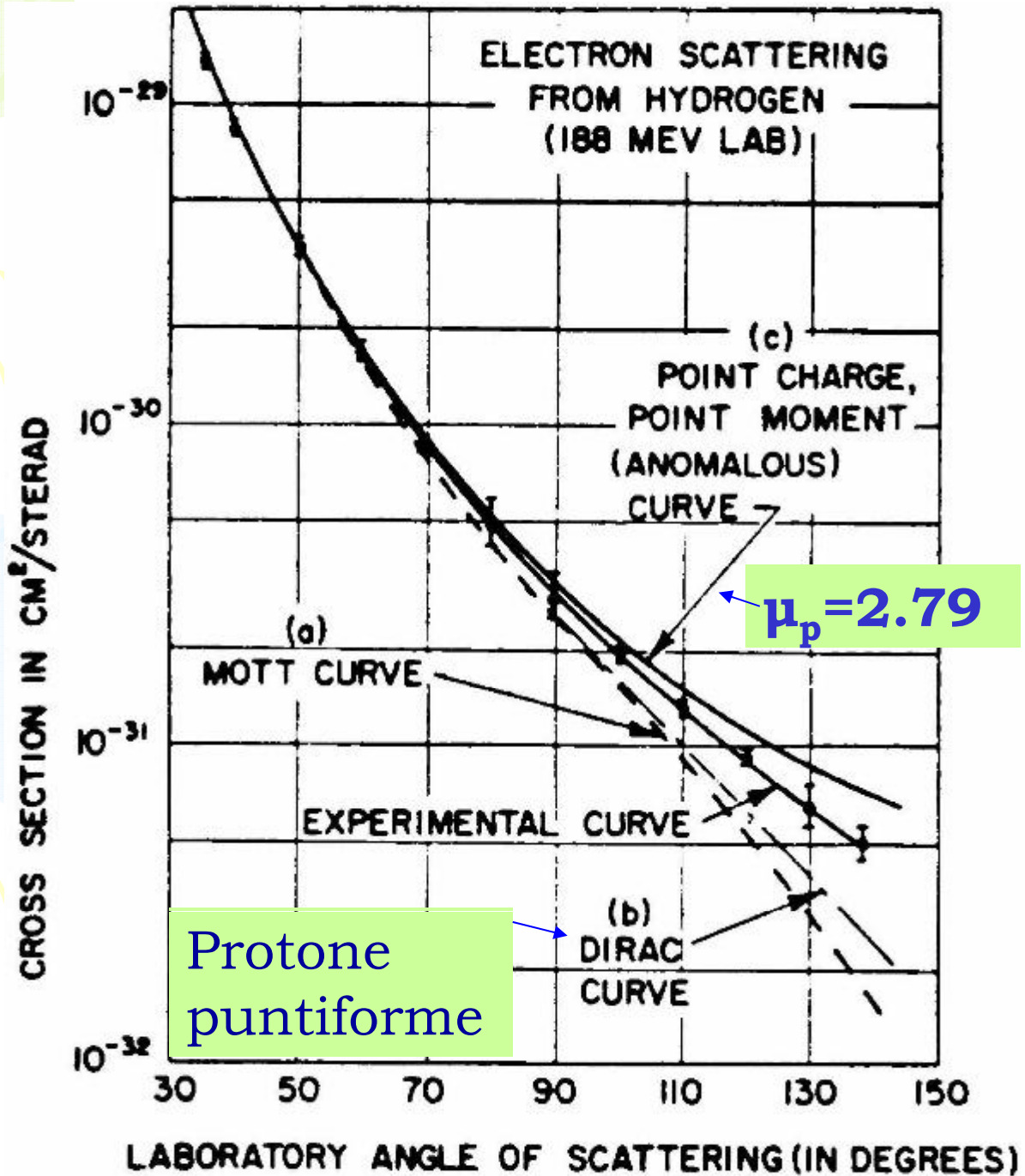
Alcuni valori di E' e Q^2

| E (GeV) | θ (gradi) | E' (GeV) | Q^2 (GeV ²) |
|-----------|------------------|------------|---------------------------|
| 0.188 | 60 | 0.171 | 0.03 |
| 0.188 | 120 | 0.145 | 0.08 |
| 0.5 | 60 | 0.395 | 0.20 |
| 0.5 | 120 | 0.278 | 0.59 |
| 2 | 60 | 0.97 | 1.94 |
| 2 | 120 | 0.48 | 2.86 |
| 5 | 60 | 1.36 | 6.82 |
| 5 | 120 | 0.55 | 8.34 |

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$Q^2 = 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

Risultati di Hofstadter

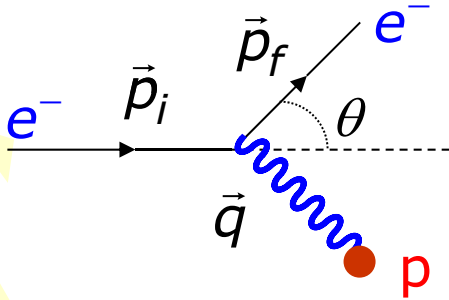


- I dati suggeriscono che il protone ha una struttura. Hofstadter e McAllister ricavarono che il protone ha un raggio medio di:

$$\langle r \rangle = (0.74 \pm 0.24) \times 10^{-13} \text{ cm}$$

Formula di Rutherford

Consideriamo dapprima la diffusione Coulombiana di un elettrone da parte di un protone in quiete.



Se l'elettrone fosse senza spin e il protone avesse massa infinita, avremmo lo scattering di Rutherford:

Notare la dipendenza $1/p^2$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4p_i^2} (\sin^2 \frac{\theta}{2})^{-1}$$

- L'impulso trasportato dal fotone vale:

$$\vec{q} = \vec{p}_i - \vec{p}_f \quad \Rightarrow \quad q^2 = p_i^2 + p_f^2 - 2\vec{p}_i \cdot \vec{p}_f$$

- Se il protone ha massa infinita, l'elettrone conserva la sua energia cinetica: $\Rightarrow |\vec{p}_i| = |\vec{p}_f|$

$$\Rightarrow q^2 = 2p_i^2 (1 - \cos \theta) = 4p_i^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

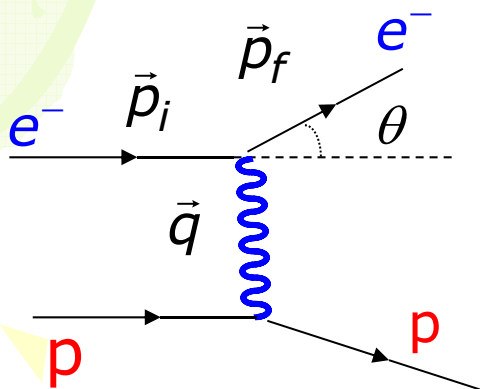
- Inoltre: $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta = 2\pi d(-\cos \theta)$

$$dq^2 = 2p_i^2 d(-\cos \theta) \quad \Rightarrow \quad d\Omega = \frac{\pi}{p_i^2} dq^2$$

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{q^4}$$

Formula di Rutherford

Sezione d'urto di Mott

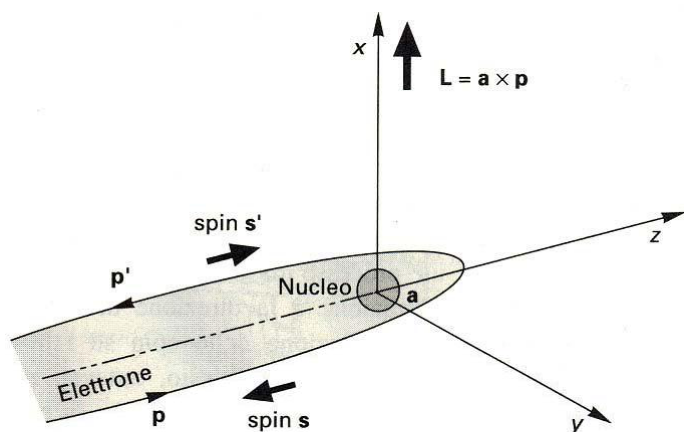


θ = angolo di scattering dell'elettr.
 M = massa del protone
 E = energia dell'elettrone incidente

- Consideriamo ora la spin dell'elettrone e consideriamo il rinculo del protone. Il protone viene ancora considerato come una particella puntiforme priva di spin. Otteniamo in questo modo **la sezione d'urto di Mott**.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Rutherford} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

- Dalla formula si vede che per $\theta = \pi$ la sezione d'urto è nulla. Questo è in relazione con l'elicità dell'elettrone e nell'aver considerato il protone privo di spin.



L'elettrone deve fare uno spin-flip, che non può essere fatto se il protone ha spin zero.

Sezione d'urto di "Dirac"

- La sezione d'urto di Mott tiene conto solo dell'interazione elettrica tra la carica dell'elettrone e quella del protone, ma non tiene conto dell'interazione tra gli spin.
- La sezione d'urto può essere migliorata introducendo nel calcolo anche lo spin del protone, considerato come una particella puntiforme di Dirac di spin $\frac{1}{2}$.
- L'elettrone interagirà pertanto sia con la carica che con il momento magnetico del protone (che sappiamo essere diverso da quello previsto da Dirac per una particella puntiforme).
- L'interazione magnetica è associata allo spin-flip del protone, quindi viene privilegiato lo scattering a 180° .

La sezione d'urto si può scrivere come:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Dirac} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[1 + \frac{Q^2}{2M^2} \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

Interazione magnetica:
importante a grandi angoli
e a grandi valori di Q^2

Momento magnetico

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L}$$

Momento magnetico di una particella con carica q , massa m e momento angolare orbitale L

$$\vec{\mu} = g \frac{qh}{2m} \vec{S}$$

S =spin; g =rapporto giromagnetico. Classicamente $g=1$

- La teoria di Dirac prevede che l'elettrone abbia $g=2$ (ed ovviamente spin $1/2\hbar$)

$$\mu_e = \frac{eh}{2m_e} \approx 5.79 \times 10^{-5} \frac{\text{eV}}{\text{T}} \quad \text{Magnetone di Bohr}$$

- Sostituendo nella formula la massa dell'elettrone con la massa del protone, abbiamo il magnetone nucleare

$$\mu_N = \frac{eh}{2m_N} \approx 3.1525 \times 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

- I valori misurati del momento magnetico del protone e del neutrone sono:

$$\mu_p = \frac{g_p}{2} \cdot \mu_N = +2.79 \cdot \mu_N ; \quad \mu_n = \frac{g_n}{2} \cdot \mu_N = -1.91 \cdot \mu_N$$

- Se fossero state due particelle di Dirac avremmo avuto:

$$\mu_p = \mu_N ; \quad \mu_n = 0$$

- Quindi la parte anomala del momento magnetico, espressa in termini di magnetone nucleare, vale:

$$\kappa_p = 1.79 ; \quad \kappa_n = -1.91$$

Sezione d'urto di "Dirac" con momento magnetico anomalo

- Rosembluth eseguì il calcolo della sezione d'urto tenendo conto del momento magnetico anomalo del protone e considerando il protone come una particella NON puntiforme.
- Questo comporta l'introduzione di due fattori di forma che tengano conto della distribuzione della carica e della "corrente" all'interno del protone.
- Qui sotto riportiamo l'espressione della sezione d'urto di Rosembluth nel caso in cui $q \rightarrow 0$. In questo caso la sezione d'urto differisce da quella di Dirac soltanto per la presenza del momento magnetico anomalo.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\substack{\text{Rosemb.} \\ q \rightarrow 0}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\left(1 + \frac{\kappa^2 Q^2}{4M^2}\right) + \frac{Q^2}{2M} (1 + \kappa) \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

Come si vede, a parità di Q^2 trasferito si ha:

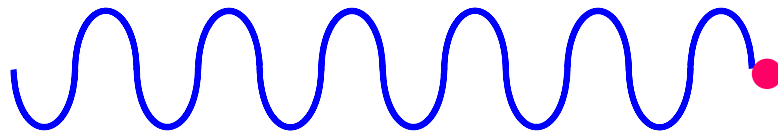
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\substack{\text{Rosemb.} \\ q \rightarrow 0}} > \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Dirac}} > \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}$$

Ma la "verità" sta nel mezzo, quindi occorre introdurre dei fattori di forma nella sezione d'urto.

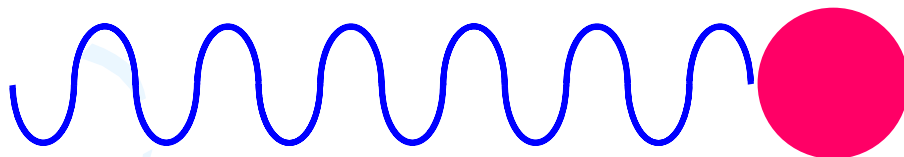
Perché occorre un fattore di forma

- Un fotone può “sondare” delle dimensioni simili alla sua lunghezza d’onda λ . Oggetti la cui dimensione è molto minore di λ vengono visti dal fotone come puntiformi.

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{q}|}$$



- Se una carica è effettivamente puntiforme, il fotone la vedrà sempre come tale qualunque sia la sua lunghezza d’onda. Quindi non interviene nel processo una “scala” che differenzi gli effetti della “non puntiformità” della carica.
- Al contrario, quando la carica NON è puntiforme ed ha una dimensione simile a λ , il fotone non interagirà con la carica in toto, ma con le sue singole parti e si avrà un fenomeno di interferenza.



- Questo comportamento viene descritto dal fattore di forma che tiene conto della distribuzione della carica.

Fattore di Forma

$$F(\vec{q}^2) = \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i\vec{q} \cdot \vec{r}} dV$$

$\rho(\vec{r})$: densità di carica

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{misurata}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} \cdot [F(\vec{q}^2)]^2$$

- Dalla misura sperimentale della sezione d'urto, e dal suo confronto con la sezione d'urto puntuale di Mott (ad esempio), si ricava $F(q^2)$ e da questa la distribuzione della carica all'interno di un nucleo (o del protone).

| Distribuzione di carica | Fattore di forma | Esempio |
|----------------------------|------------------|--------------------|
| Puntiforme | Costante | Elettrone |
| Esponenziale | Dipolare | Protone |
| Gaussiana | Gaussiano | ${}^6\text{Li}$ |
| Sfera omogenea | Oscillante | — |
| Sfera a superficie diffusa | Oscillante | ${}^{40}\text{Ca}$ |

$$F(q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{q^2}{a^2 \hbar^2}\right)^2}$$

a : fattore di scala

N.B. $F(q^2) < 1$

Raggio del protone

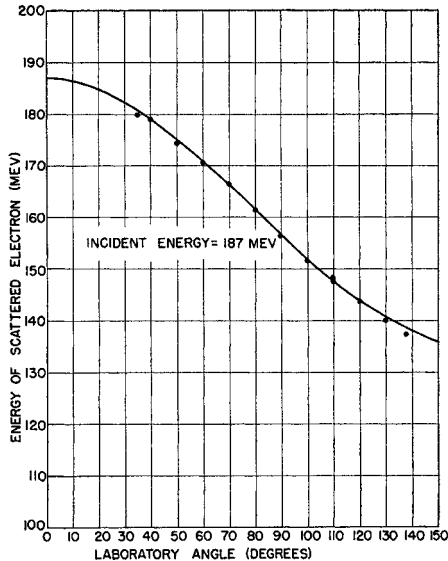
- Espansione del fattore di forma per piccoli q^2

$$\begin{aligned} F(q^2) &= \int d^3r \rho(r) \exp(i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r}) \\ &= \int d^3r \rho(r) [1 + i\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - (1/2)(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r})^2 \dots] \\ &= 1 - \frac{\mathbf{q}^2}{6} \langle r^2 \rangle \dots \end{aligned}$$

- Infatti:

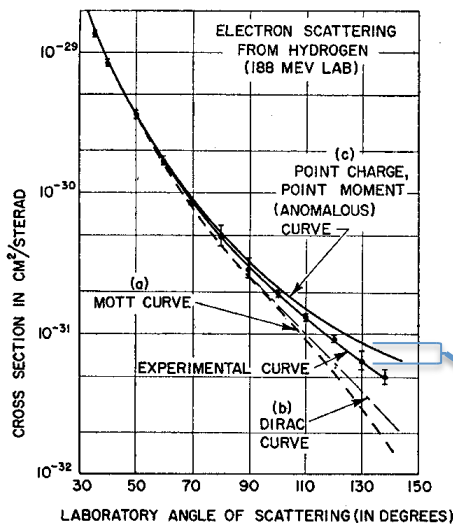
$$\begin{aligned} \int d^3r \rho(r) (\vec{q} \cdot \vec{r})^2 &= \int 2\pi dr d\cos(\vartheta) \rho(r) q^2 r^2 \cos^2(\vartheta) = \\ 2\pi q^2 \int \cos^2(\vartheta) d\cos(\vartheta) \rho(r) r^2 dr &= \\ 2\pi q^2 \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4\pi} \int \rho(r) r^2 dr &= \frac{1}{3} q^2 \langle r^2 \rangle \end{aligned}$$

Esempio numerico



- Esempio numerico
- Per $\theta = 130^\circ$
- $Q^2 = 4EE' \sin^2(\theta/2) = 0.086 \text{ GeV}^2$

FIG. 4. The solid line gives the theoretical energy of the scattered electrons for an incident energy of 187 Mev. Relativistic kinematics are used to obtain the theoretical curve. The experimental points correspond to peak values of the elastic profiles and refer to experimental observations.



$$\sigma / \sigma_{\text{Mott}} \approx F(q^2)^2 \approx [1 - 1/6 * 0.086 [\text{GeV}]^2 * (0.7 [\text{fm}] / 0.197 [\text{GeV fm}])^2]^2 = 0.67$$

FIG. 5. Curve (a) shows the theoretical Mott curve for a spinless point proton. Curve (b) shows the theoretical curve for a point proton with the Dirac magnetic moment, curve (c) the theoretical curve for a point proton having the anomalous contribution in addition to the Dirac value of magnetic moment. The theoretical curves (b) and (c) are due to Rosenbluth.⁸ The experimental curve falls between curves (b) and (c). This deviation from the theoretical curves represents the effect of a form factor for the proton and indicates structure within the proton, or alternatively, a breakdown of the Coulomb law. The best fit indicates a size of 0.70×10^{-13} cm.

Sezione d'urto di Rosenbluth

- La sezione d'urto di Rosenbluth tiene conto dell'interazione elettrica e magnetica dell'elettrone con il protone.
- Occorrono due fattori di forma, uno elettrico (G_E) ed uno magnetico (G_M).
- Più avanti faremo vedere il calcolo esplicito di Rosenbluth.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Rosenbluth}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} \cdot \left[\frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} + \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

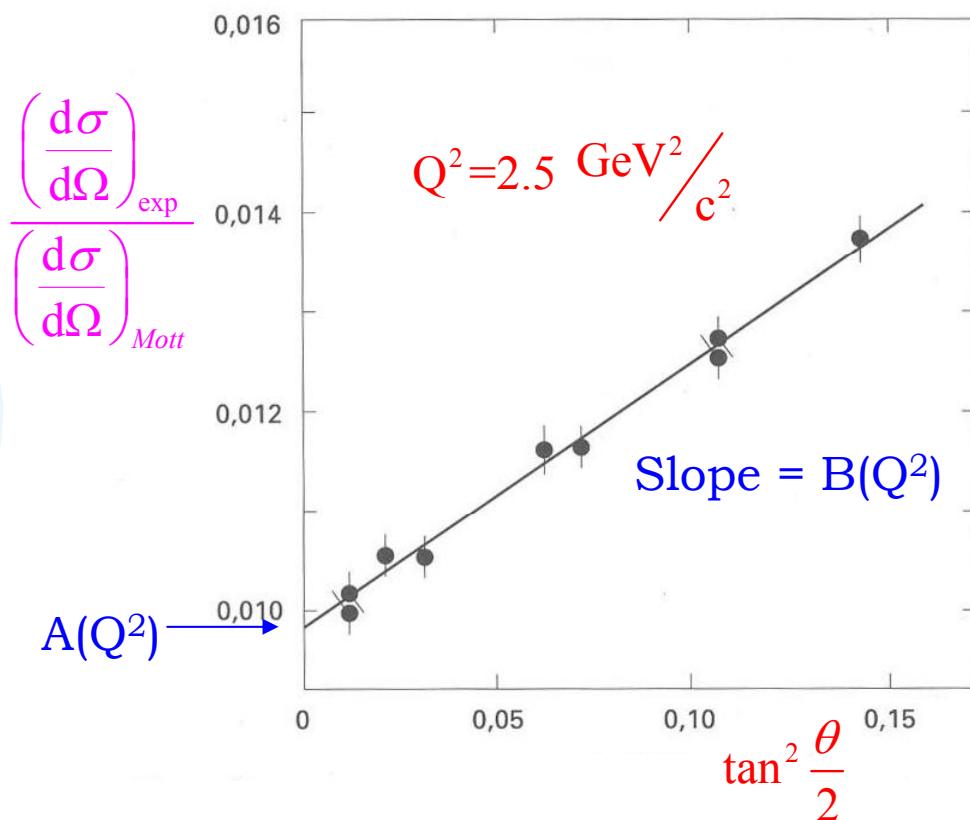
- In pratica la formula è riscritta nel modo seguente:

$$\frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Ros.}}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}}} = A(Q^2) + B(Q^2) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Dove: $A = \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} ; B = \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2$

Misura dei fattori di forma

- I fattori di forma G_E e G_M possono essere determinati facendo una serie di esperimenti a diversi valori di Q^2 e misurando la sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ in funzione di θ



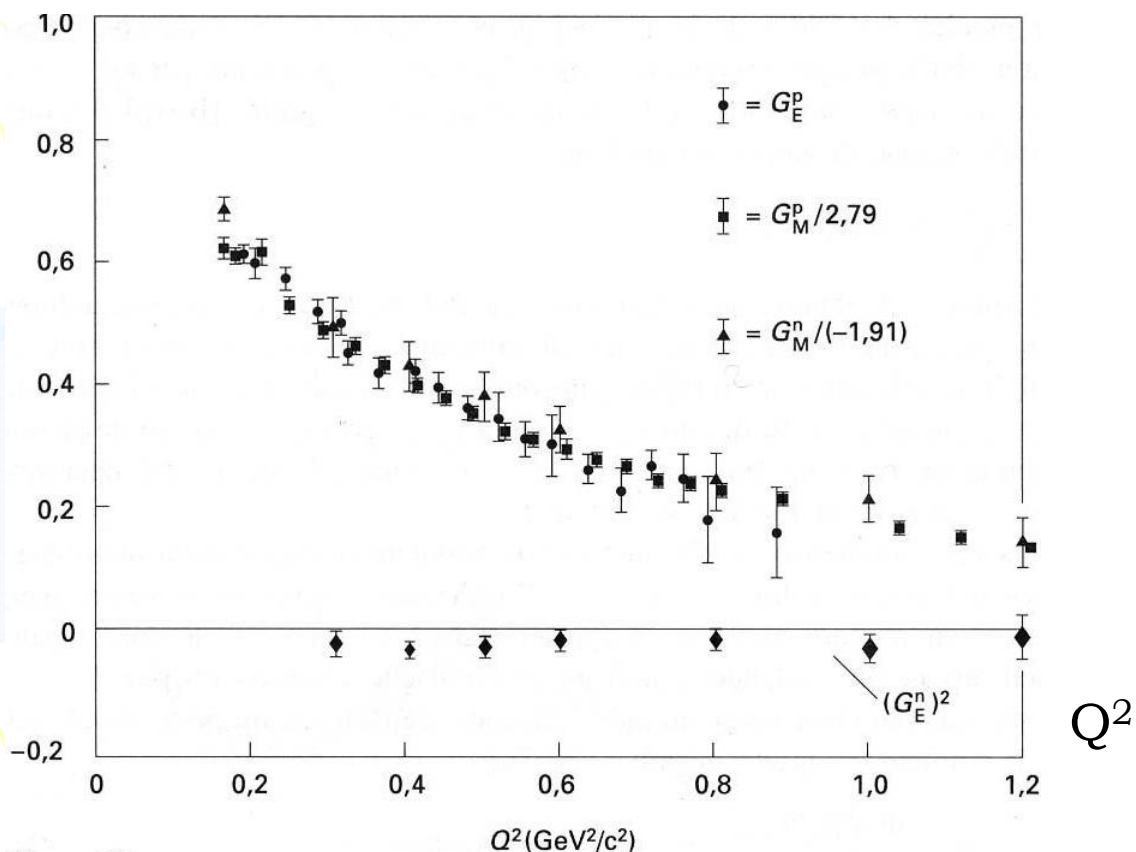
$$A = \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} ; \quad B = \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2$$

- Il fattore di forma magnetico, ad un dato valore di Q^2 , viene determinato direttamente dalla slope, e quindi da questo risultato, e dal valore dell'intercetta, si ricava il fattore di forma elettrico.

Legge di scala dei fattori di forma

- I risultati sperimentali mostrano che i fattori di forma del protone e del neutrone sono legati da una relazione molto semplice:

$$G_E^p(Q^2) = \frac{G_M^p(Q^2)}{\mu_p} = \frac{G_M^n(Q^2)}{\mu_n} \quad ; \quad G_E^n(Q^2) = 0$$



- L'andamento può essere descritto da una formula di tipo dipolo:

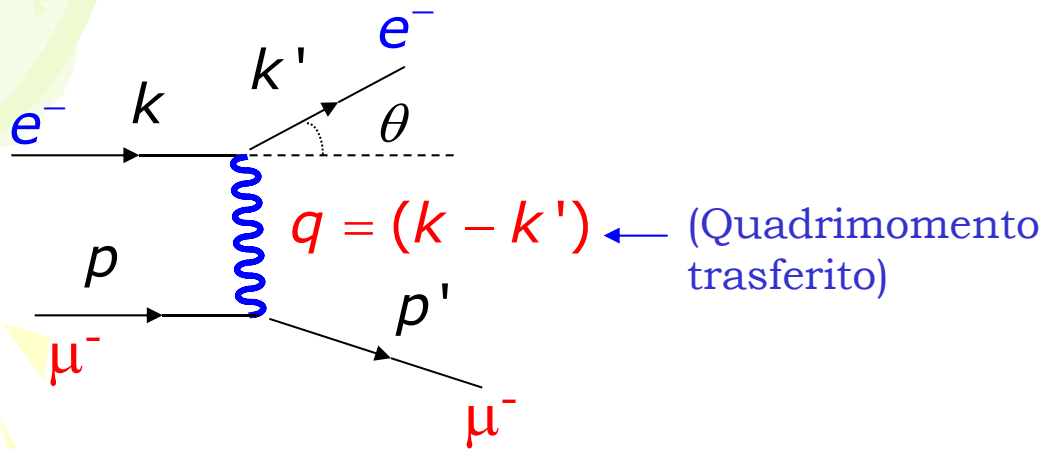
$$G(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{m^2}\right)^2}$$

dove $m^2 = 0.71 \text{ GeV}^2$

- La formula di dipolo è compatibile con la distribuzione di carica esponenziale:

$$\rho \approx e^{-mr} \Rightarrow \sqrt{r^2} \approx 0.8 \text{ fm}$$

Scattering elastico elet.-muone



- L'interazione è elettromagnetica. Il diagramma di Feynman fondamentale è dato dallo scambio di un solo fotone.
- L'elemento di matrice del processo si ottiene considerando l'interazione corrente-corrente, tra la corrente di Dirac dell'elettrone e quella del muone.

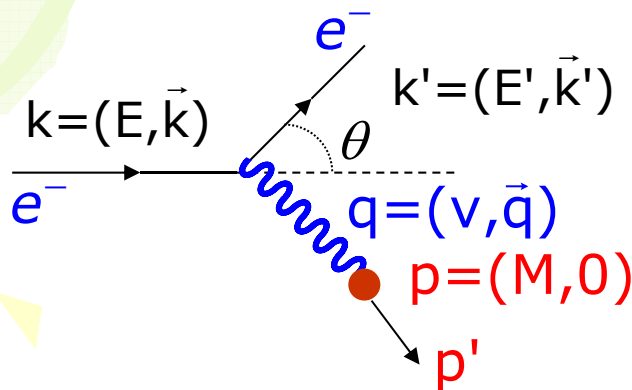
$$M_{fi} = \left[\bar{u}(k') \gamma^\mu u(k) \right] \frac{e^2}{q^2} \left[\bar{u}(p') \gamma_\mu u(p) \right]$$

- Per trovare la sezione d'urto occorre fare il modulo quadro di M_{fi} . Dato che il proiettile (elettrone) ed il bersaglio (muone) non sono polarizzati, occorre mediare sugli spin dello stato iniziale e sommare su quelli dello stato finale.

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[(k' \cdot p')(k \cdot p) + (k' \cdot p)(k \cdot p') - m^2(p' \cdot p) - M^2(k' \cdot k) + 2m^2M^2 \right]$$

m = massa dell'elettrone; M = massa del muone

Scattering elastico elet.-muone



Variabili cinematiche nel sistema di riferimento in cui il muone è fermo

- Valutiamo di nuovo M_{fi}^2 nel sistema di riferimento in cui il muone è fermo, trascurando la massa dell'elettrone. Ricordiamo che:

$$q = k - k' = p' - p \Rightarrow p' = k - k' + p$$

$$\Rightarrow \overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} \left[-\frac{1}{2} q^2 (k \cdot p - k' \cdot p) + 2(k' \cdot p)(k \cdot p) + \frac{1}{2} M^2 q^2 \right]$$

- Sperimentalmente si misurano soltanto le grandezze relative all'elettrone (Energia (E, E') ed angolo di scattering θ), le quali inserite in M_{fi}^2 , danno:

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{8e^4}{q^4} 2EE'M^2 \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Per ottenere la sezione d'urto differenziale per lo scattering dell'elettrone nell'angolo solido $d\Omega$ e di energia compresa nell'intervallo E' e $E'+dE'$, occorre aggiungere all'elemento di matrice M_{fi}^2 , il fattore relativo allo spazio delle fasi

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{q^4} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu + \frac{q^2}{2M}\right)$$

Scattering elastico elet.-muone

- Nello scattering elastico vi è una relazione tra l'energia e l'angolo dell'elettrone diffuso:

$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2}(1 - \cos \vartheta)}$$

- Integrando la sezione d'urto differenziale rispetto ad E' , si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \frac{1}{1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- Questa può essere riscritta nella forma seguente:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \cdot \left[1 - \frac{q^2}{2M^2} \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

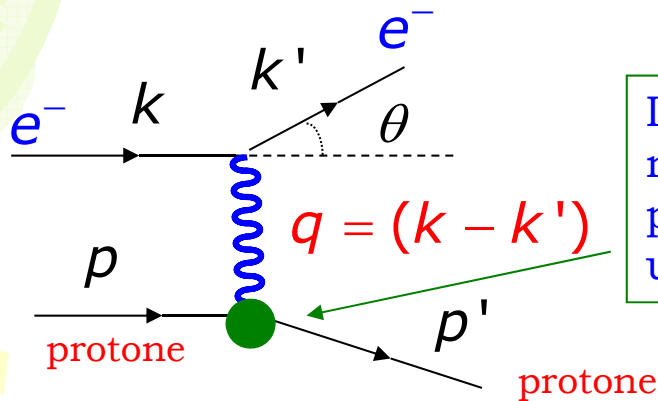
dove

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} = \frac{\alpha^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{4E^2 \sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[1 + \frac{2E}{M} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}$$

- L'equazione della sezione d'urto differenziale gioca un ruolo molto importante dello studio della struttura del protone attraverso lo scattering elettrone protone.

- Si tenga inoltre presente che il termine $\sin^2(\theta/2)$ nella sezione d'urto di Mott deriva dall'interazione dello spin dell'elettrone con il momento magnetico del muone.

Scattering elastico elet.-protone



Il vertice protone-fotone non è il vertice di Dirac perché il protone non è una particella puntiforme

- L'elemento di matrice è sempre dato dall'interazione corrente-corrente

$$M_{fi} = J_{\mu}^{elec.} \frac{1}{q^2} J_{prot.}^{\mu}$$

- Corrente dell'elettrone: $J_{\mu}^{elec.} = -e \cdot \bar{u}(k') \cdot \gamma_{\mu} \cdot u(k)$

- Il protone deve obbedire all'equazione di Dirac, tuttavia la struttura complicata del protone si manifesta nel vertice di accoppiamento fotone-protone che è diverso da quello fotone-elettrone. La corrente del protone si scrive come:

$$J_{prot.}^{\mu} = e \cdot \bar{u}(p') \cdot \Gamma^{\mu} \cdot u(p)$$

- J^{μ} deve essere un quadrivettore di Lorentz. La forma più generale che si possa scrivere per Γ^{μ} , seguendo la decomposizione di Gordon, è:

$$\Gamma^{\mu} = \left[\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. elettrica}}}{F_1(q^2)} \gamma^{\mu} + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Int. magnetica}}}{i\sigma^{\mu\nu} q_{\nu}} \right]$$

Sezione d'urto di Rosenbluth

$$\Gamma^\mu = \left[F_1(q^2)\gamma^\mu + \frac{\kappa}{2M} F_2(q^2) i\sigma^{\mu\nu} q_\nu \right]; \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$$

- $\kappa=1.79$ magnetoni nucleari; è la parte anomala del momento magnetico ($\mu_p = 2.79$ magnetoni nucl.)

- M è la massa del protone

N.B. non ci sono termini in γ^5 perché l'interazione elettromagnetica conserva la parità.

- Se $q^2 \rightarrow 0$, il fotone virtuale ha una grande lunghezza d'onda e non è sensibile ai dettagli della struttura del protone; quindi esso viene visto come una particella puntiforme.
- In questi limiti si deve avere:

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} F_1(q^2) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} F_2(q^2) = 1$$

- Dall'ampiezza si può calcolare la sezione d'urto, sommando sugli spin finali e mediando su quelli iniziali; in questo modo si ottiene la sezione d'urto di Rosenbluth

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Ros.} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Mott} \cdot \left\{ \left[F_1(q^2) - \frac{\kappa^2 q^2}{4M^2} F_2(q^2) \right] - \frac{q^2}{2M} \left[F_1(q^2) + \kappa F_2(q^2) \right] \tan^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right\}$$

Fattori di forma del protone

- Se il protone fosse puntiforme come il muone, k sarebbe nullo e $F_1(q^2)$ sarebbe uguale a 1 per tutti i valori di q^2 , in modo da riottenere il vertice di Dirac. In questo modo riotteniamo le formule trovate in precedenza per lo scattering elettrone-muone.

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[1 - \frac{q^2}{2M^2} \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

- La formula può essere scritta in un altro modo introducendo i fattori di forma elettrico e magnetico del protone:

$$G_E = F_1 + \frac{\kappa q^2}{4M^2} \cdot F_2 \quad ; \quad G_M = F_1 + \kappa \cdot F_2$$

$$\lim_{q^2 \rightarrow 0} G_E = 1 \quad ; \quad \lim_{q^2 \rightarrow 0} G_M = 1 + \kappa = \mu_p$$

(μ_p = momento magnetico del protone)

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \cdot \left[\frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4M^2} G_M^2}{1 - \frac{q^2}{4M^2}} - \frac{q^2}{2M^2} G_M^2 \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

- In pratica la formula è riscritta usando la variabile:

$$Q^2 = -q^2 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Ros.} = A(Q^2) + B(Q^2) \cdot \tan^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}$$

Dove: $A = \frac{G_E^2 + \frac{Q^2}{4M^2} G_M^2}{1 + \frac{Q^2}{4M^2}} \quad ; \quad B = \frac{Q^2}{2M^2} G_M^2$

Invarianza di scala

- Consideriamo un fattore di forma di tipo dipolo:

$$F(Q^2) = \frac{1}{\left(1 + \frac{Q^2}{\Lambda_{nucleo}^2}\right)^2}$$

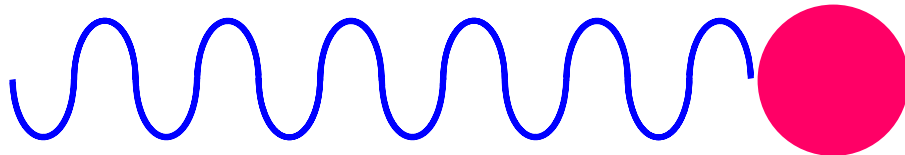
- In questa espressione Λ_{nucleo} stabilisce la scala del fenomeno che si sta studiando; il comportamento delle sezioni d'urto, attraverso il fattore di forma, dipende dai valori relativi di Q^2 e della scala Λ_{nucleo}

$$\text{Se } Q^2 \ll \Lambda_{nucleo}^2 \Rightarrow F(Q^2) \rightarrow 1$$

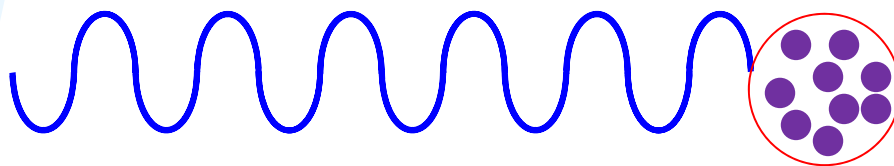
- In questa situazione il fotone ha una lunghezza d'onda molto lunga e non è sensibile ai dettagli della struttura interna del bersaglio; la diffusione avviene come se questi fosse puntiforme.
- All'aumentare di Q^2 la sezione d'urto elastica puntiforme diminuisce attraverso il fattore $1/Q^2$
- Tuttavia, se immaginiamo che ci sia un'altra scala $\Lambda_{nucleone}$, ma $Q^2 \ll \Lambda_{nucleone}^2$, non verrà rivelata nessuna struttura interna del nucleone. Avremo in questo modo una diffusione quasi elastica da parte dei nucleoni costituenti il nucleo. Il quasi elastico si riferisce al fatto che i nucleoni non sono liberi e risentono del moto di Fermi.
- Lo scattering quasi elastico avviene per $x \approx 1/N$, dove N è il numero di costituenti del nucleo.
- Il fattore di forma della sezione d'urto quasi elastica è indipendente da Q^2 , cioè non dipende dalla scala (invarianza di scala; scaling)

Invarianza di scala

- Quando la carica NON è puntiforme ed ha una dimensione simile a λ , il fotone non interagirà con la carica in toto, ma con le sue singole parti e si avrà un fenomeno di interferenza.



- Supponiamo ora che l'oggetto non sia costituito da una distribuzione continua di carica, bensì da N cariche puntiformi.



- Quando la lunghezza d'onda del fotone diventa molto minore dell'oggetto iniziale, esso interagirà con la singola carica puntiforme. L'interazione avverrà solo con una carica puntiforme e quindi non si ha un fenomeno di interferenza come nel caso di una distribuzione continua di carica (non serve il fattore di forma).
- Inoltre all'aumentare della lunghezza d'onda del fotone, l'interazione avviene sempre con una carica puntiforme, quindi non interviene nessuna scala ulteriore (invarianza di scala).

Scattering elec. 400 MeV su α

N.B. Q^2 aumenta all'aumentare di θ

$$x' = Q^2 / 2m_p v = 1$$

$$x' = Q^2 / 4 / 2(4m_p) v$$

$$x = Q^2 / 2m_\alpha v$$

$$\Rightarrow x' = 4x = 1$$

$$\Rightarrow x = 0.25$$

Il picco anelastico diminuisce poco all'aumentare di Q^2

Il picco elastico diminuisce all'aumentare di Q^2

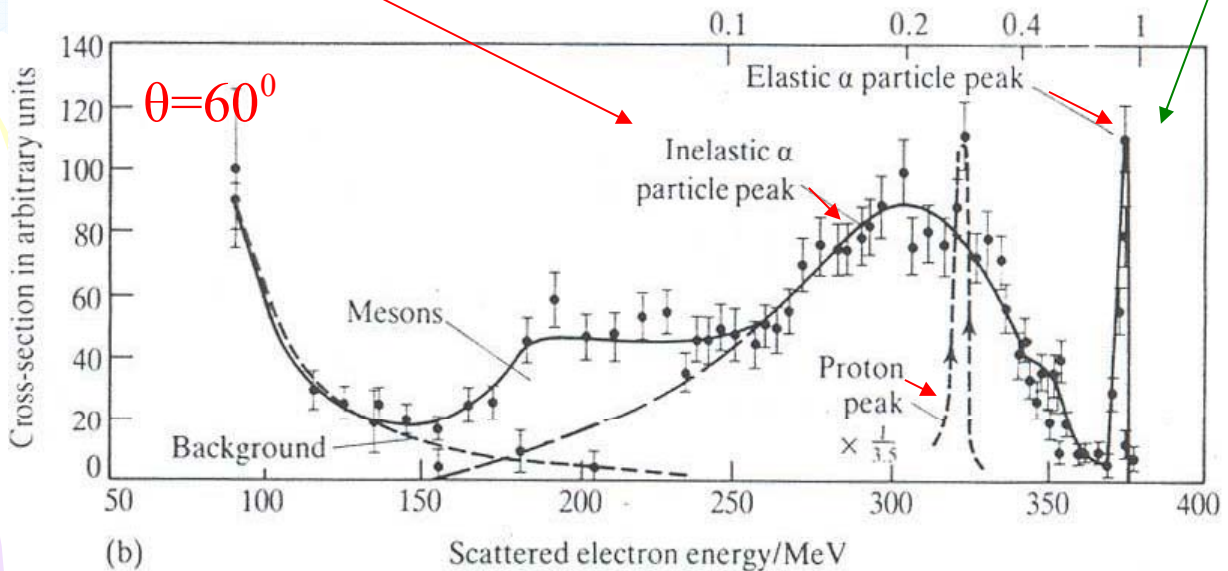
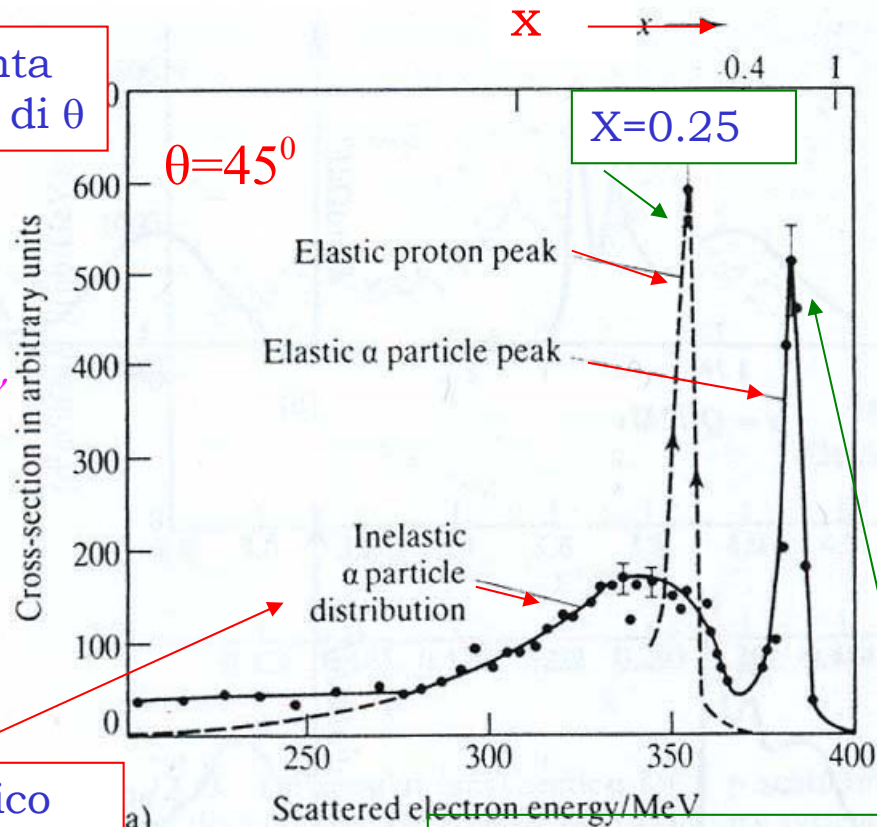
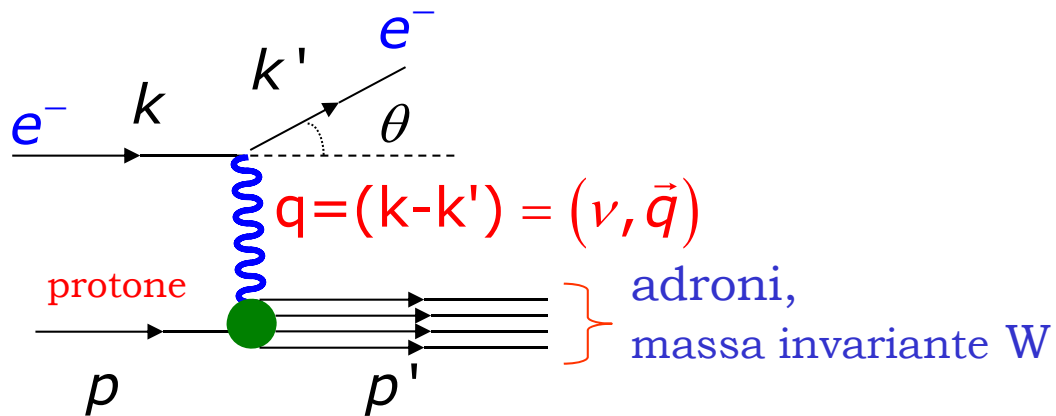


Figure 12.11 Cross-sections for the elastic and inelastic scattering of 400 MeV electrons by ^4He nuclei as a function of x . The scattering angle of the electrons in the laboratory system is 45° in part (a) and 60° in part (b). (After Hofstadter R 1956 *Rev Mod Phys* 28 (214).)

Scattering anelastico elettrone-protone

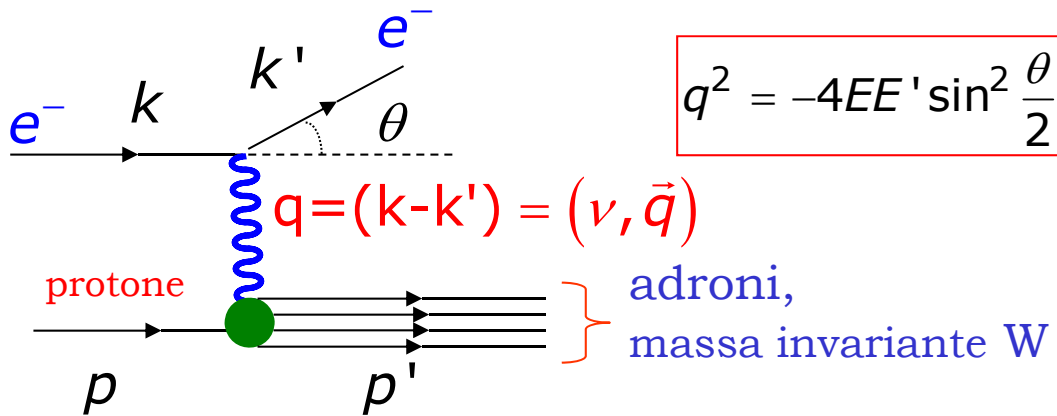


- Nello scattering elastico le particelle dello stato iniziale, elettrone e protone, conservano la propria identità.
- Se aumentiamo il quadrimpulso trasferito, q , dall'elettrone al protone (e quindi l'energia trasferita ν), il protone può essere eccitato in un suo stato risonante, ad esempio la Δ^+ , ritornando poi nel suo stato fondamentale emettendo un pione.



- Aumentando ancora di più il q^2 trasferito, il protone perde completamente la sua identità e vengono prodotti al suo posto molti adroni.
- In ogni caso assumiamo che il meccanismo fondamentale dell'interazione sia lo scambio di un solo fotone.
- Sperimentalmente si misurano soltanto le grandezze relative all'elettrone, ovvero la sua energia e l'angolo di diffusione.
- La sezione d'urto misurata in questo modo viene chiamata sezione d'urto inclusiva.

Relazioni cinematiche



$$q^2 = -4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$p + k = p' + k'$ Conservazione del quadrimpulso

$q = k - k' = p' - p$ Quadrimpulso trasportato dal fotone

$q = (\nu, \vec{q})$; $p = (M, 0)$ ← Il protone è fermo nel laboratorio

$p' = p + q \Rightarrow p'^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q$

- Consideriamo lo scattering elastico. In questo caso il protone rimane un protone, quindi $p'^2 = M^2$

$M^2 = p^2 + q^2 + 2p \cdot q \Rightarrow \nu = -\frac{q^2}{2M}$

- Nello scattering elastico vi è una relazione tra l'energia trasferita ν , misurata nel laboratorio, ed il quadrimpulso trasferito q^2

- Consideriamo ora lo scattering anelastico, in questo caso ν e q^2 sono variabili indipendenti:

$p'^2 = W^2$ W è la massa invariante degli adroni prodotti

$p \cdot q = M\nu$ N.B. M e ν sono valutati nel laboratorio

$Q^2 = -q^2$ È una definizione, in questo modo $Q^2 > 0$

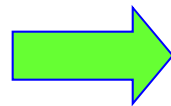
$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$

Relazioni cinematiche: x e Q^2

- Introduciamo una nuova variabile cinematica, x (**variabile di Bjorken**), che sarà molto importante nello studio dello scattering profondamente anelastico.

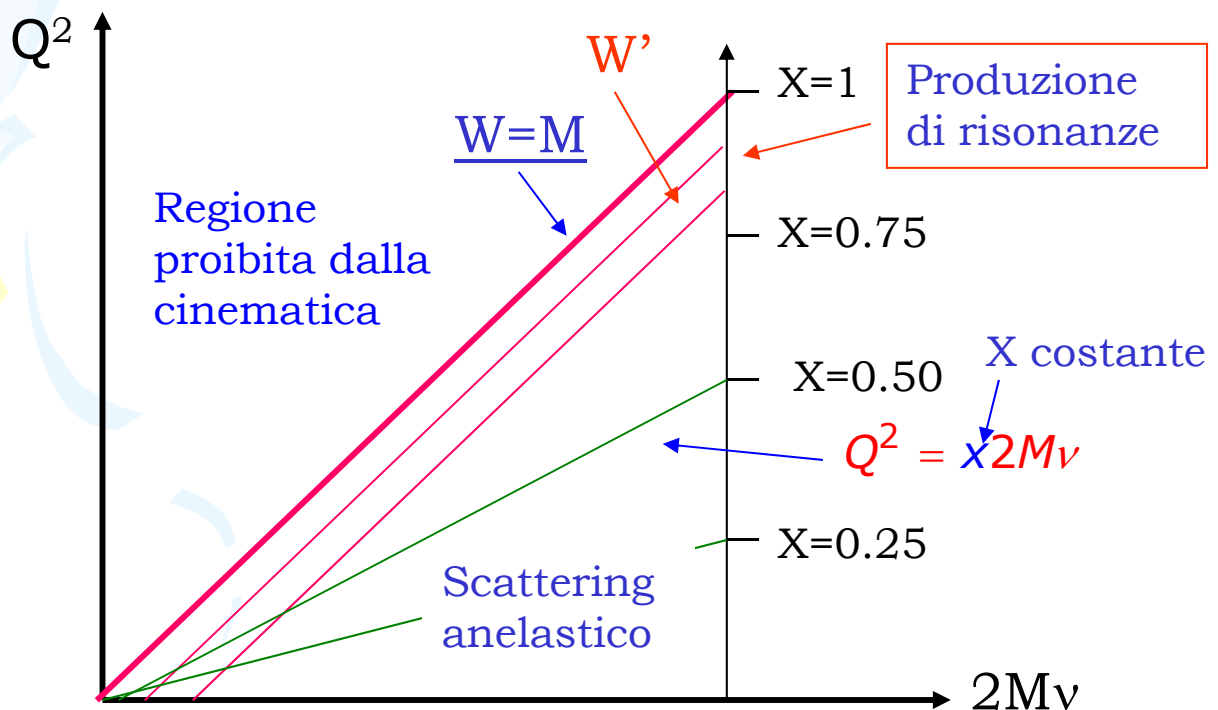
$$x = \frac{Q^2}{2M\nu}$$

(N.B. nello scattering elastico $x = 1$)



$$Q^2 = x2M\nu$$

- Le regioni nelle quali sia Q^2 che ν sono grandi si chiamano di scattering profondamente anelastico. Queste regioni sono molto importanti perché è dove si rivela la struttura interna del protone, il quale consiste di partoni puntiformi.



$$W'^2 - M^2$$

$$Q^2 = 2M\nu + M^2 - W^2$$

Apparato sperimentale

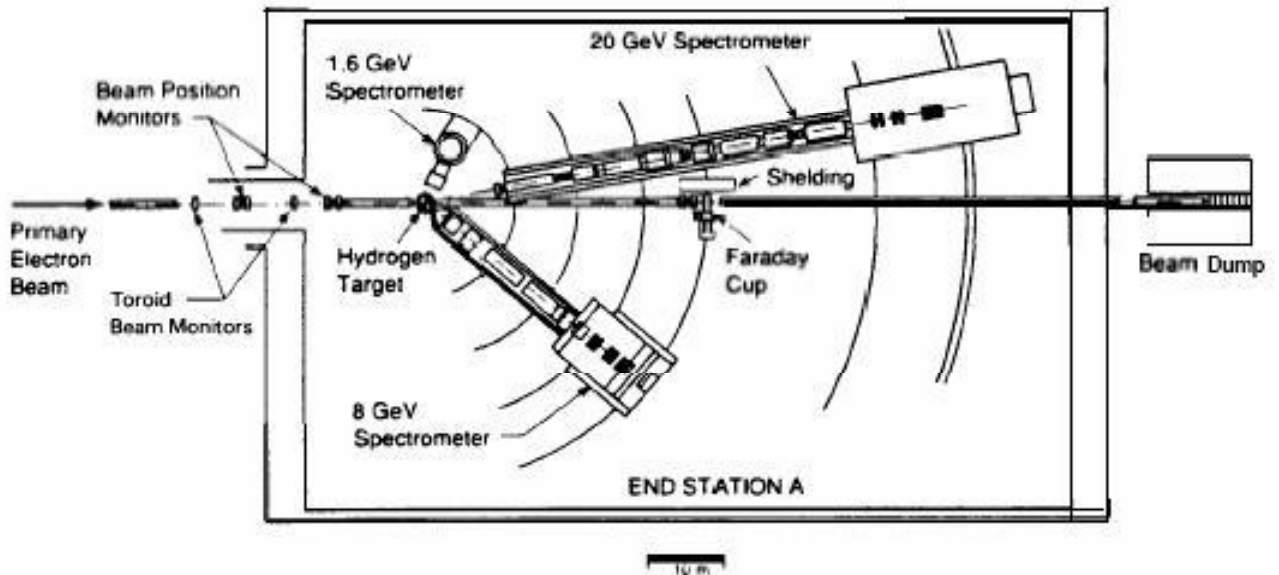


Fig. 14. Layout of spectrometers in End Station A. All three spectrometers can be rotated about the pivot. The 20 GeV spectrometer can be operated from about $1\frac{1}{2}^\circ$ to 25° , the 8 GeV from about 12° to over 90° . The 1.6 GeV spectrometer coverage is from $\sim 50^\circ - 150^\circ$.

Vi erano tre spettrometri per misurare l'angolo e l'energia dell'elettrone diffuso

Nel lavoro di Friedman, Kendal, Taylor et al. del 1969, si riporta la misura della sezione d'urto differenziale anelastica, misurata a $\theta=6^\circ$ e 10° , e l'energia dell'elettrone incidente variava da 7 a 17 GeV. Il momento trasferito Q^2 arrivava fino a 7.4 GeV^2

Esempio di scattering anelastico

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$$

Risonanza Δ

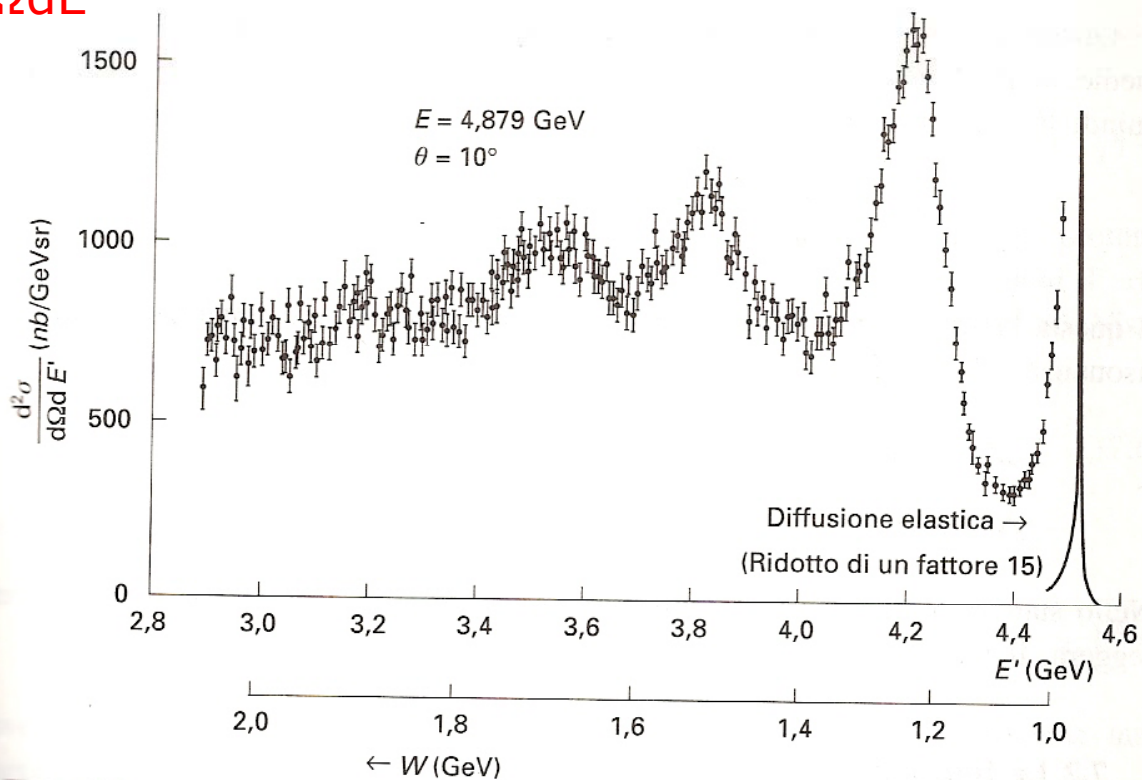


Figura 7.1

Spettro degli elettroni diffusi nell'urto elettrone-protone. L'energia degli elettroni incidenti è $E = 4.879$ GeV e l'angolo di diffusione è $\theta = 10^\circ$ (da [Ba68]).

Sezione d'urto doppio differenziale

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$$

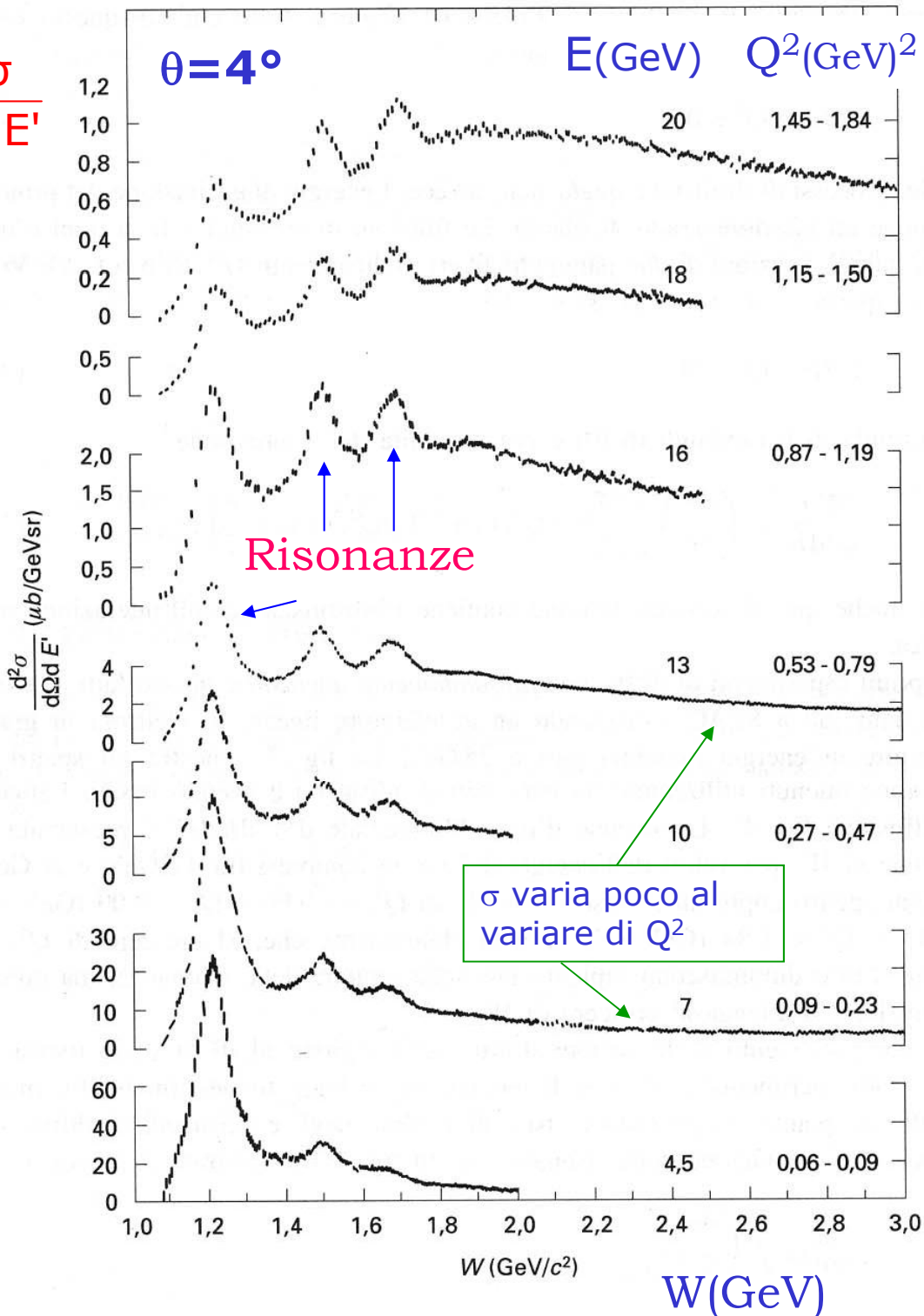
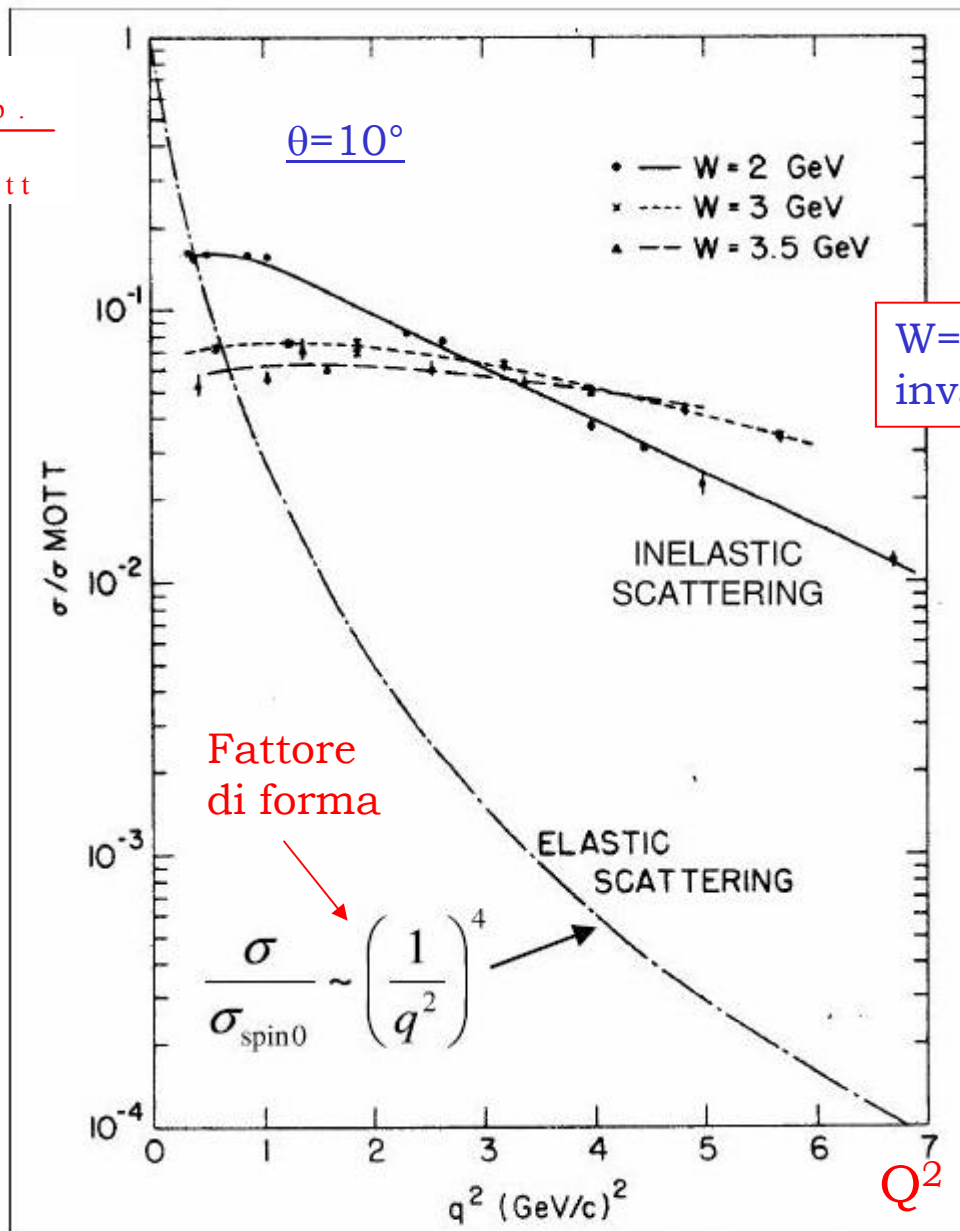


Figura 7.2

La diffusione elettrone-protone: gli spettri di eccitazione misurati nella diffusione profondamente anelastica elettrone-nucleone sono mostrati in funzione della massa invariante W [St75]. Si noti l'uso di differenti scale sull'asse delle ordinate. Le misure sono state effettuate ad un angolo di diffusione fisso $\theta = 4^\circ$. Il valore medio dell'intervallo in Q^2 coperto dalla misura cresce all'aumentare dell'energia del fascio E . Le risonanze (in particolare la prima a $W = 1.232 \text{ GeV}/c^2$) diventano sempre meno pronunciate, mentre la porzione di spettro continuo ($W \gtrsim 2.5 \text{ GeV}/c^2$) diminuisce solo debolmente.

Confronto tra le sezioni d'urto elastica e anelastica

$$\frac{\sigma_{\text{exp.}}}{\sigma_{\text{Mott}}}$$



M. Breidenbach et al.,
Phys. Rev. Lett. **23** (1969) 935

- L'energia dell'elettrone incidente varia tra 7 e 17 GeV
- I dati si discostano chiaramente dalla sezione d'urto elastica prevista, indicando l'esistenza di particelle puntiformi all'interno del protone.

Scattering anelastico elettrone-protone: sezione d'urto

- La sezione d'urto del processo di diffusione può essere scritta come:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \cdot S$$

Dove S rappresenta la struttura del bersaglio.

- Nel caso dello scattering elastico $e-\mu$, dove sia e che μ sono senza struttura, si ha:

$$S_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right)$$

dove M è la massa del muone. La δ esprime il fatto che ν e Q^2 non sono variabili indipendenti.

- Nel caso della diffusione anelastica $ep \rightarrow eX$, ν e Q^2 sono variabili indipendenti, ed abbiamo pertanto:

$$S_{ep \rightarrow eX} = W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- La struttura complessa del protone è riflessa dalla presenza di due **funzioni di struttura W_1 e W_2** , che per valori di Q^2 inferiori a circa 1 (GeV/c)^2 , sono funzioni sia di Q^2 che di ν .
- Bjorken ipotizzò che, se il protone fosse composto da particelle puntiformi, lo scattering quasi elastico dell'elettrone con queste particelle, doveva esibire un'invarianza di scala, cioè la sezione d'urto doveva essere indipendente da Q^2 , e dipendere solo dal rapporto $x = Q^2/2M\nu$

Scaling di Bjorken

- In altri termini, secondo lo scaling di Bjorken, le funzioni di struttura W_1 e W_2 devono ridursi a quelle puntiformi:

$$2W_1 = \frac{Q^2}{2m^2} \delta\left(v - \frac{Q^2}{2m}\right) \quad ; \quad W_2 = \delta\left(v - \frac{Q^2}{2m}\right)$$

m è la massa della particella costituente.

- Ricordando che: $\delta(ax) = \frac{1}{a} \delta(x)$ possiamo riscrivere le relazioni come:

$$2mW_1(Q^2, v) = \frac{Q^2}{2mv} \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2mv}\right) = x \cdot \delta(1-x)$$

$$vW_2(Q^2, v) = \delta\left(1 - \frac{Q^2}{2mv}\right) = \delta(1-x)$$

Come si vede queste funzioni di struttura sono funzioni solo di x (scaling di Bjorken).

- Possiamo dire che con l'aumentare di Q^2 , e quindi con il diminuire della lunghezza d'onda del fotone, la diffusione elastica dal protone, che può essere considerata come l'azione coerente di tutti i quark all'interno del protone, viene sostituita dalla sovrapposizione incoerente della diffusione elastica dei singoli quark puntiformi.

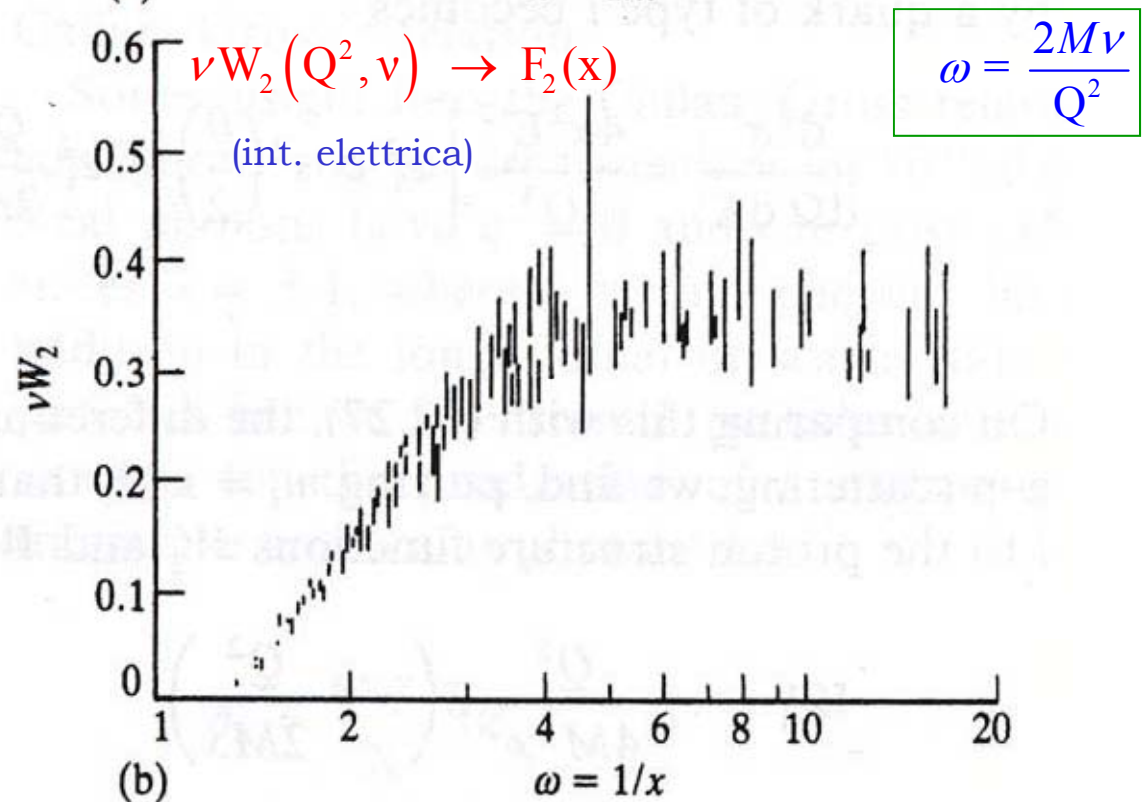
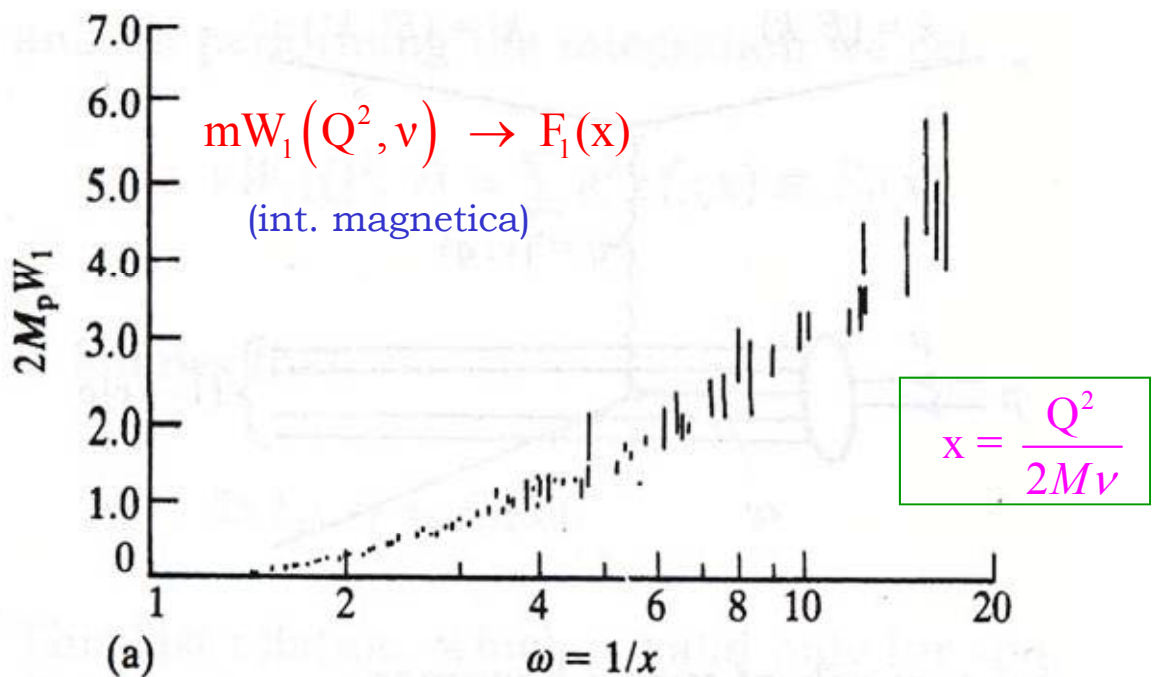
- Riassumendo, nel limite $Q^2 \rightarrow \infty$, $v \rightarrow \infty$ dove $x = \frac{Q^2}{2mv}$, si ha:

$$mW_1(Q^2, v) \rightarrow F_1(x) \quad ; \quad vW_2(Q^2, v) \rightarrow F_2(x)$$

int. magnetica int. elettrica

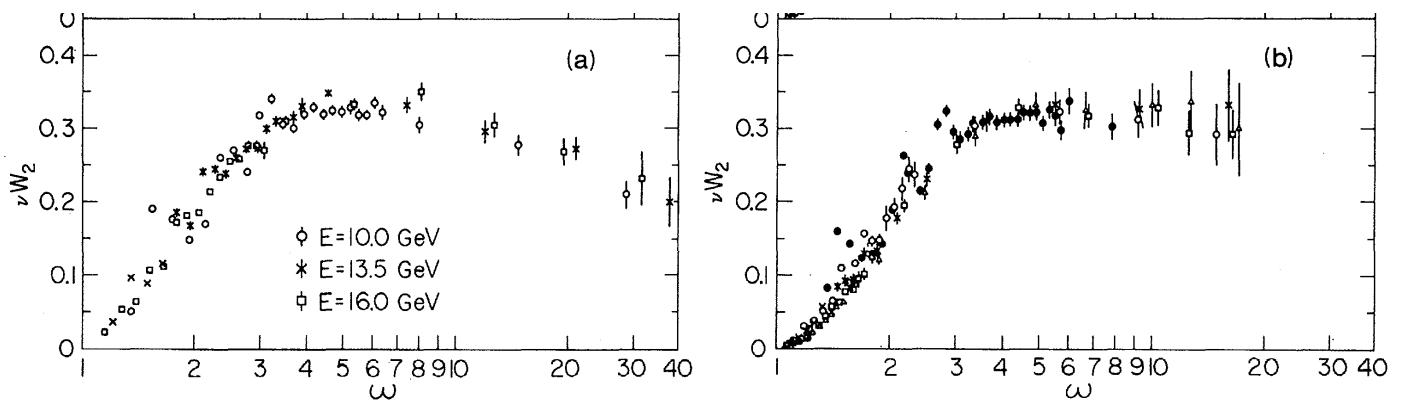
- I dati sperimentali supportano questa ipotesi per $Q^2 > (1 \text{ GeV}/c)^2$

Evidenza dello scaling



Si vede sperimentalmente che F_1 e F_2 sono delle funzioni monotone di una sola variabile

Scaling delle funzioni di struttura



- $\omega=1/x$
- Dati dell'esperimento SLAC a due differenti angoli e energia del fascio variabile
- Evidenza dello scaling
- $\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F(x)$

Evidenza dello scaling

$$\nu W_2(Q^2, \nu) \rightarrow F_2(x)$$

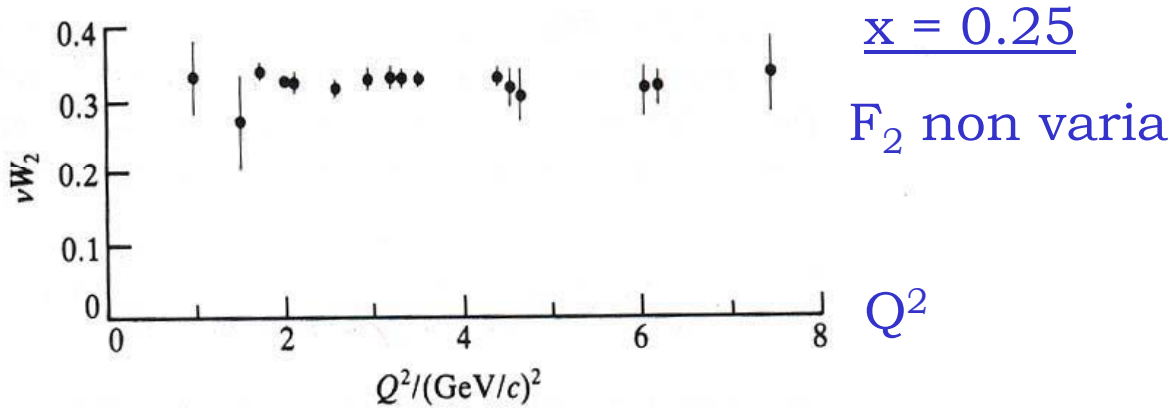


Figure 12.15 The proton structure function νW_2 plotted as a function of Q^2 for the fixed value of $x = 0.25$ and hadron masses greater than 2 GeV. The structure function is independent of Q^2 . (After Friedman J I and Kendall H W 1972 *Ann Rev Nucl Sci* **22** (203).)

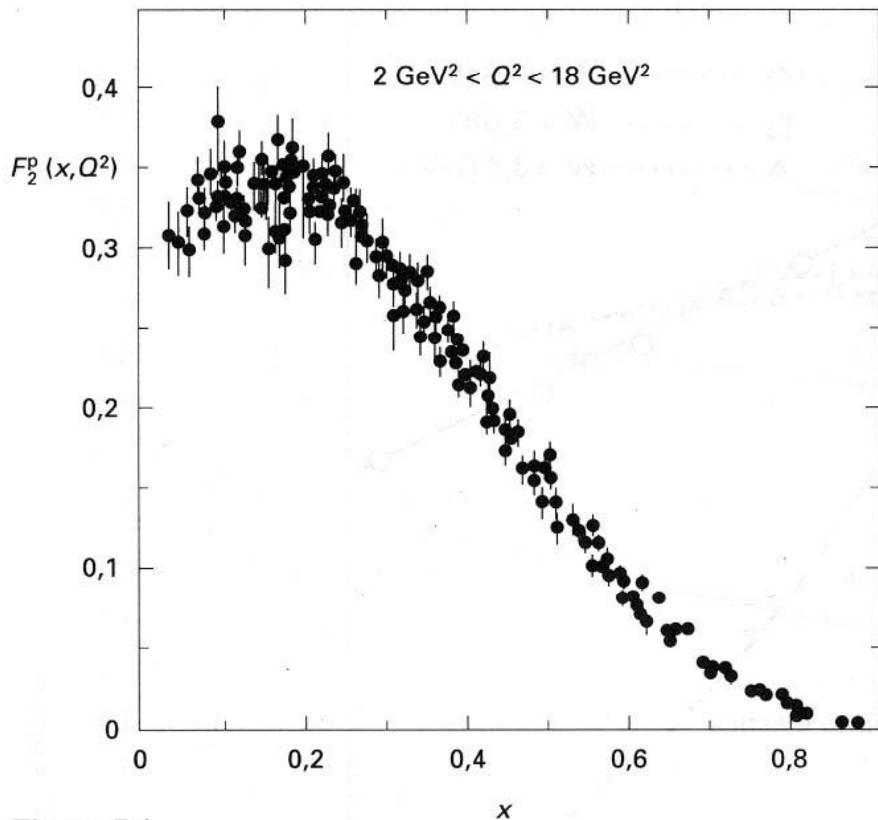


Figura 7.4

La funzione di struttura F_2 del protone in funzione di x , per valori di Q^2 compresi fra 2 $(\text{GeV}/c)^2$ e 18 $(\text{GeV}/c)^2$ [At82].

Interpretazione dello scaling

- La prima interpretazione "fisica" dello scaling di Bjorken fu data da Feynman nel 1969. Feynman ipotizzò che il protone fosse formato da particelle puntiformi chiamate **PARTONI**.
- Feynman postulò che ciascun partone trasportasse una frazione x dell'energia e della quantità di moto del protone.
- Ci sono diversi tipi di partoni. Un partone di tipo i ha il quadrimpulso:

$$\begin{cases} p_i = x \cdot p & (P \text{ è il quadrimpulso del protone}) \\ m_i = x \cdot M & (M \text{ è la massa del protone}) \end{cases}$$

- Si può dimostrare che la frazione " x " del momento del partone è proprio uguale alla variabile " x " di Bjorken:

$$x = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (\text{Ricordiamo che } \nu \text{ è l'energia trasferita dall'elettrone al protone nel sistema del laboratorio})$$

- Da questa formula discende immediatamente che, mettendo $m = xM$, abbiamo:

$$\nu = \frac{Q^2}{2xM} = \frac{Q^2}{2m}$$

che è la relazione che lega ν e Q^2 per uno scattering elastico su una particella puntiforme di massa m

Dimostrazione:

- Consideriamo un sistema di riferimento in cui il protone ha una quantità di moto così grande che tutte le masse in gioco e tutti i momenti trasversi possono essere trascurati (infinite momentum frame).
- In questo S.R. il quadrimpulso del protone è:

$$p \equiv (E, \vec{p}) = (p, 0, 0, p)$$

- Il protone è visto come uno sciame di partoni, tutti con impulso trasverso nullo rispetto alla direzione di volo del protone, ed ognuno di essi avente una frazione x della quantità di moto, della massa e dell'energia del protone.

$(xp+q)$ Quadrimpulso acquistato da partone dopo l'urto

$$(xp+q)^2 \approx m^2 \approx 0 \quad (\text{massa del partone}) \Rightarrow x^2 p^2 + 2xp \cdot q + q^2 = 0$$

$$p^2 = M^2 \approx 0 \quad (\text{massa del protone che può essere trascurata})$$

$$\Rightarrow x = \frac{q^2}{2p \cdot q}$$

$p \cdot q$ è un invariante relativistico e può essere calcolato in qualsiasi sistema di riferimento, ad esempio nel sistema del laboratorio dove il protone è fermo

$$p = (M, 0, 0, 0)$$

Mentre per il fotone si ha: $q = (v, \vec{q})$ dove $v = E - E'$ è l'energia trasferita dall'elettrone al protone nel sistema del laboratorio.

$$\Rightarrow p \cdot q = Mv \quad \Rightarrow \left[v = \frac{p \cdot q}{M} \right]$$

$$\Rightarrow x = \frac{q^2}{2Mv} = \frac{Q^2}{2Mv} \quad \text{c.v.d.}$$


N.B. è rigorosamente valida solo nell'infinite momentum frame 48



Friedman:

If Partons are Quarks

1) They must be spin $1/2$ particles

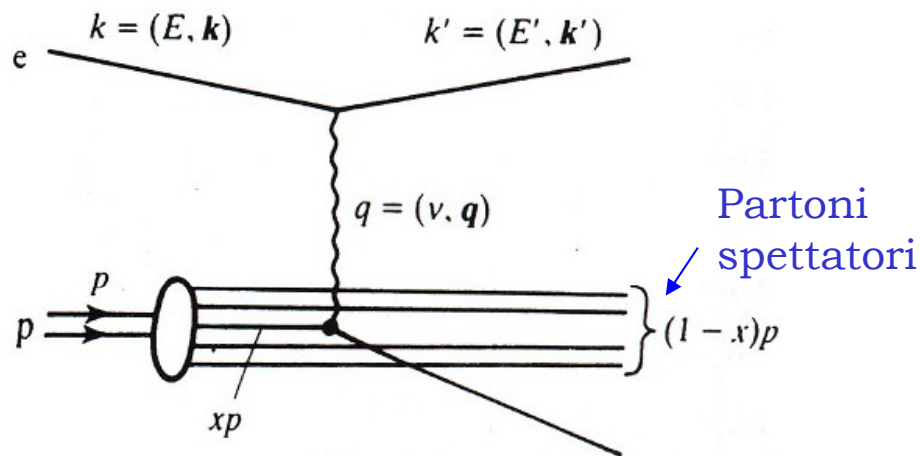


2) They must have fractional charges consistent with the quark model

Do Partons have Fractional Charges
($+2/3$, $-1/3$)?

- Comparisons of **Electron** Scattering and **Neutrino** Scattering provided the answer.
- First neutrino results came from Large Heavy Liquid Bubble Chamber at CERN “Gargamelle” (1971-1974)

Scattering elettrone-partone



- Assumendo che i partoni siano particelle puntiformi di spin $1/2$ possiamo scrivere la sezione d'urto differenziale dello scattering elastico elettrone-partone partendo dalla formula dello scattering elettrone-muone.
- Nella formula dobbiamo rimpiazzare α con αe_i , dove e_i è la carica frazionaria del partone.

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[e_i^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + e_i^2 \frac{Q^2}{2m_i^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

- Se confrontiamo questa formula con quella della sezione d'urto anelastica elettrone-protone:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E'^2}{Q^4} \left[W_2(Q^2, \nu) \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$$

abbiamo, ricordando che $m_i = xM$:

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4x^2 M^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

;

$$W_2^i = e_i^2 \cdot \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_i}\right)$$

Relazione di Callan-Gross

- I partoni che non partecipano allo scattering si comportano da "spettatori".
- I contributi dei singoli quark alla sezione d'urto differenziale dello scattering inelastico si sommano incoerentemente (non c'è interferenza, si sommano le sezioni d'urto e non le ampiezze).
- Ogni partone trasporta una frazione x dell'impulso del protone, dove la frazione x può essere diversa da partone a partone. Indichiamo con $f_i(x)$ la probabilità che un partone di tipo i abbia la frazione x dell'impulso del protone.

$$\Rightarrow W_1(Q_2, \nu) = \sum_i \int e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$$

$$\Rightarrow MW_1(Q_2, \nu) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \equiv F_1(x) \quad [x = Q^2/2M\nu]$$

- analogamente $W_2(Q_2, \nu) = \sum_i \int e_i^2 f_i(x) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) dx$

$$\Rightarrow \nu W_2(Q_2, \nu) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \equiv F_2(x)$$

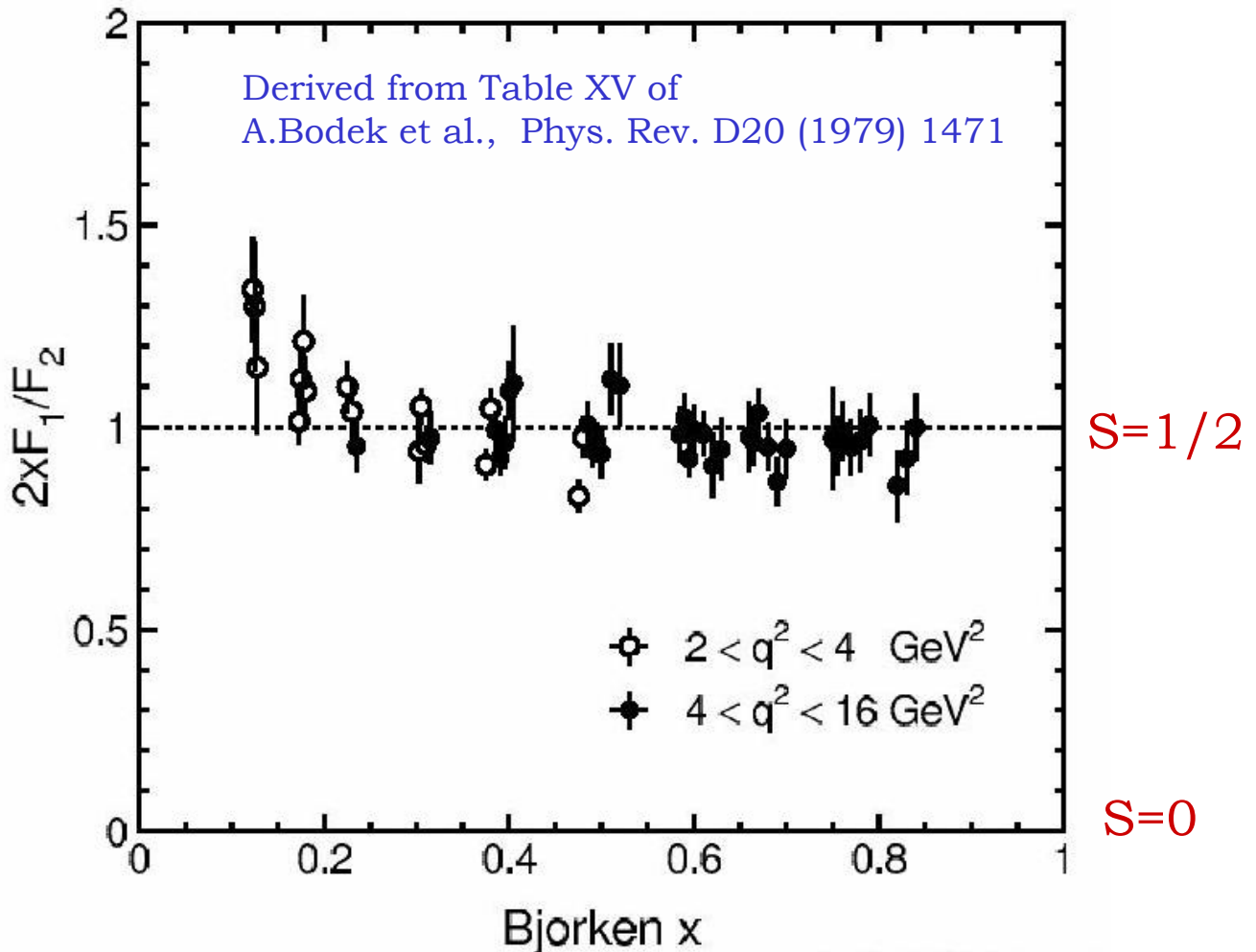
- Confrontando le due relazioni si ha:

$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

Questa si chiama relazione di Callan-Gross ed è valida solo per partoni di spin $1/2$.

Dalla sua verifica sperimentale si ricava che i partoni hanno spin $1/2$

Verifica sperimentale della relazione di Callan-Gross



$$2xF_1(x) = F_2(x)$$

- I dati supportano la presenza all'interno del protone di particelle puntiformi cariche di spin $1/2$
- Si ricordi che la funzione di struttura F_1 è legata all'interazione magnetica, ed una particella di spin zero non interagisce magneticamente.

Struttura a quark del nucleone

- Lo scaling di Bjorken può essere riassunto nelle relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} MW_1(Q_2, \nu) \rightarrow F_1(x) = \sum_i \frac{e_i^2}{2} f_i(x) \\ \nu W_1(Q_2, \nu) \rightarrow F_2(x) = \sum_i e_i^2 x f_i(x) \end{array} \right.$$

- I numeri quantici degli adroni derivano dalla loro composizione in quark; tuttavia se aggiungiamo coppie quark-antiquark, i numeri quantici non cambiano. Distinguiamo quindi i quark di valenza dai quark del mare.

- Utilizzando i numeri quantici dei quark u, d e s, possiamo scrivere per F_2 , nello scattering elettrone-protone:

$$F_2^{ep} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\}$$

$u^p(x)$ è la pdf (probability density function) del quark u nel protone, cioè la probabilità che il partone abbia la frazione di impulso del protone compresa tra x e $x+dx$.

- Per lo scattering elettrone-neutrone si può scrivere:

$$F_2^{en} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \right\}$$

- I quark u e d formano un doppietto di isospin, quindi per l'invarianza delle interazioni forti per rotazioni nello spazio SU(2) di isospin, ci aspettiamo che:

$$\left\{ \begin{array}{l} u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \\ d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \\ s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x) \end{array} \right.$$

Più vincoli simili per le altre coppie $q\bar{q}$ più pesanti

Quark di valenza e quark del mare

- Per ogni quark possiamo scrivere in generale:

$$q(x) = q_v(x) + q_s(x) \rightarrow \begin{array}{l} \text{sea (mare)} \\ \downarrow \\ \text{valenza} \end{array}$$

- Dato che i quark di valenza del protone sono u e d, dobbiamo avere:

$$q_v(x) = 0 \quad \text{per } s, \bar{s}, \bar{u}, \bar{d}$$

quindi nel protone i quark s (e gli altri quark più pesanti) e gli antiquark, devono appartenere al mare, mentre per i quark u e d si ha:

$$u(x) = u_v(x) + u_s(x) \quad ; \quad d(x) = d_v(x) + d_s(x)$$

- Se facciamo la semplificazione che i tre quark leggeri compaiono nel mare con la stessa frequenza e la stessa distribuzione in impulso, abbiamo:

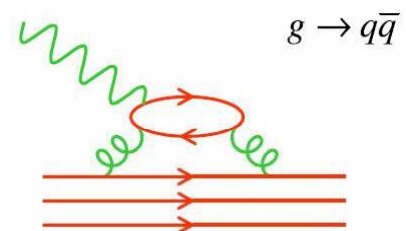
$$u_s(x) = d_s(x) = s_s(x) = \bar{u}_s(x) = \bar{d}_s(x) \equiv s(x)$$

- Con queste parametrizzazioni le funzioni di struttura del protone e del neutrone diventano:

$$F_2^{ep} = \frac{x}{9} [4 \cdot u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

$$F_2^{en} = \frac{x}{9} [u_v(x) + 4 \cdot d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

N.B. i quark del mare derivano dal fatto che questi interagiscono tra loro mediante lo scambio di gluoni, i quali a loro volta possono formare delle coppie virtuali quark-antiquark



Verifica dell'esistenza dei quark del mare

- Valutiamo il rapporto tra le funzioni di struttura del neutrone e del protone in funzioni di x .

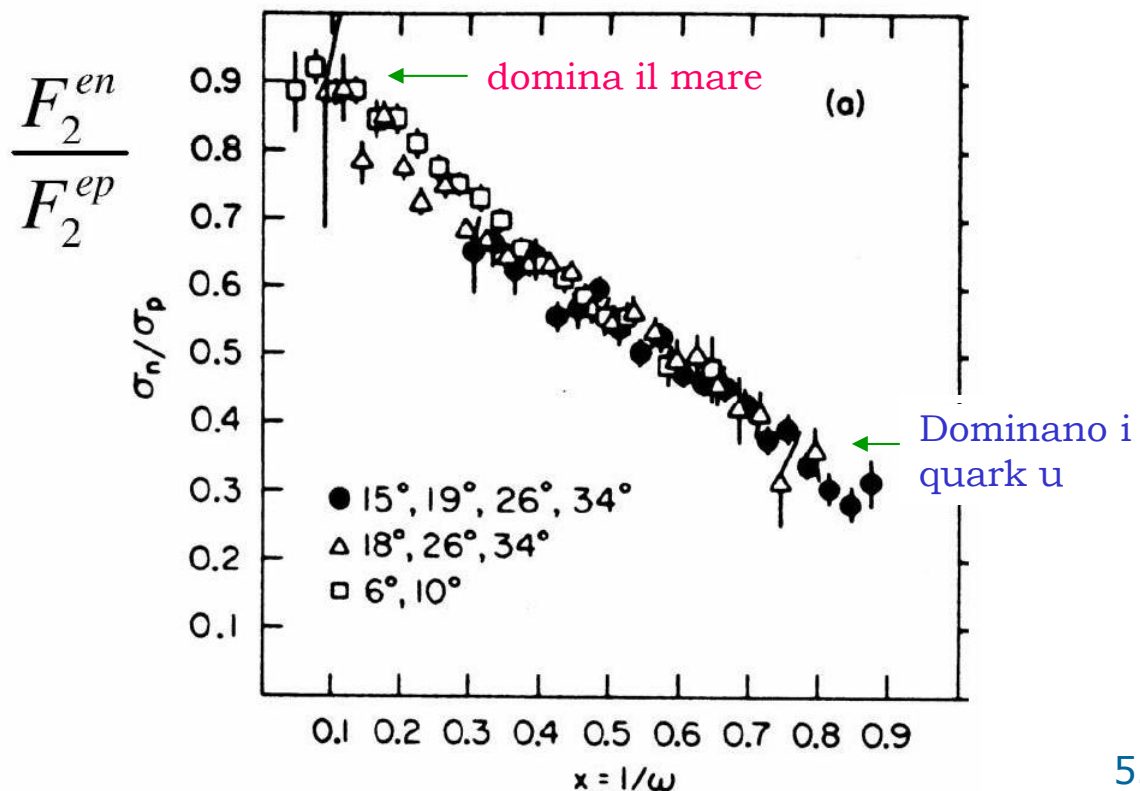
- Consideriamo due casi estremi:

a) Quark del mare dominanti, ci aspettiamo che questo avvenga a piccolo x :

$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{ep}}(x)} \rightarrow 1$$

b) Consideriamo il caso in cui dominano i quark u_v (ricordiamo che u indica la pdf di u nel protone e di d nel neut.)

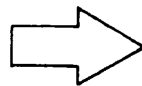
$$\frac{F_2^{\text{en}}(x)}{F_2^{\text{ep}}(x)} \rightarrow \frac{u_v + 4d_v}{4u_v + d_v} \rightarrow \frac{1}{4}$$



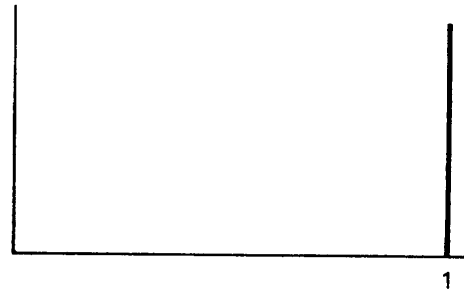
F_2 per diverse composizioni del protone

If the Proton is

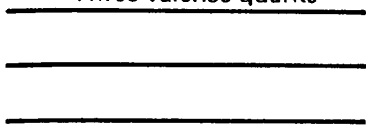
A quark



then $F_2^{ep}(x)$ is

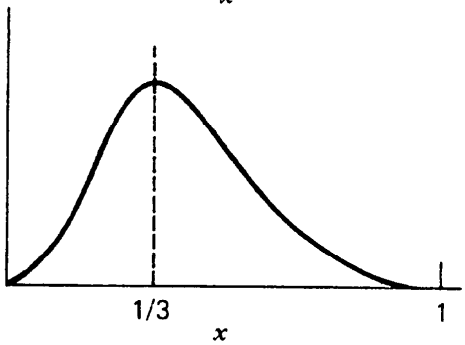
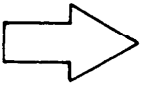
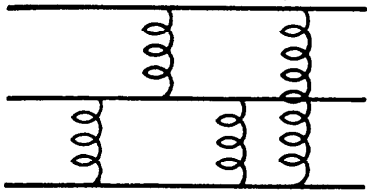


Three valence quarks

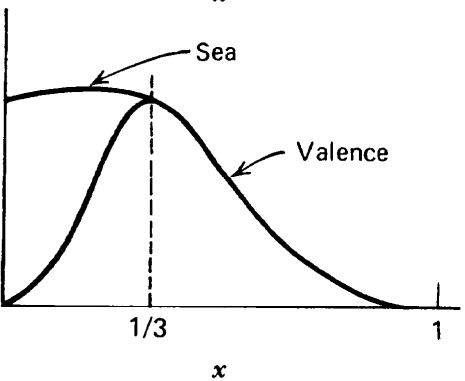
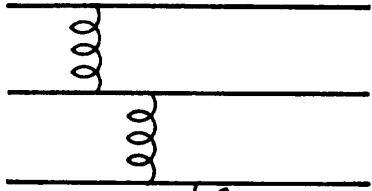


L'interazione tra i quark ridistribuisce l'impulso tra di loro

Three bound valence quarks



Three bound valence quarks + some slow debris, e.g., $g \rightarrow q\bar{q}$



Small x

Verifica della forma di F_2

- Ricordiamo che:

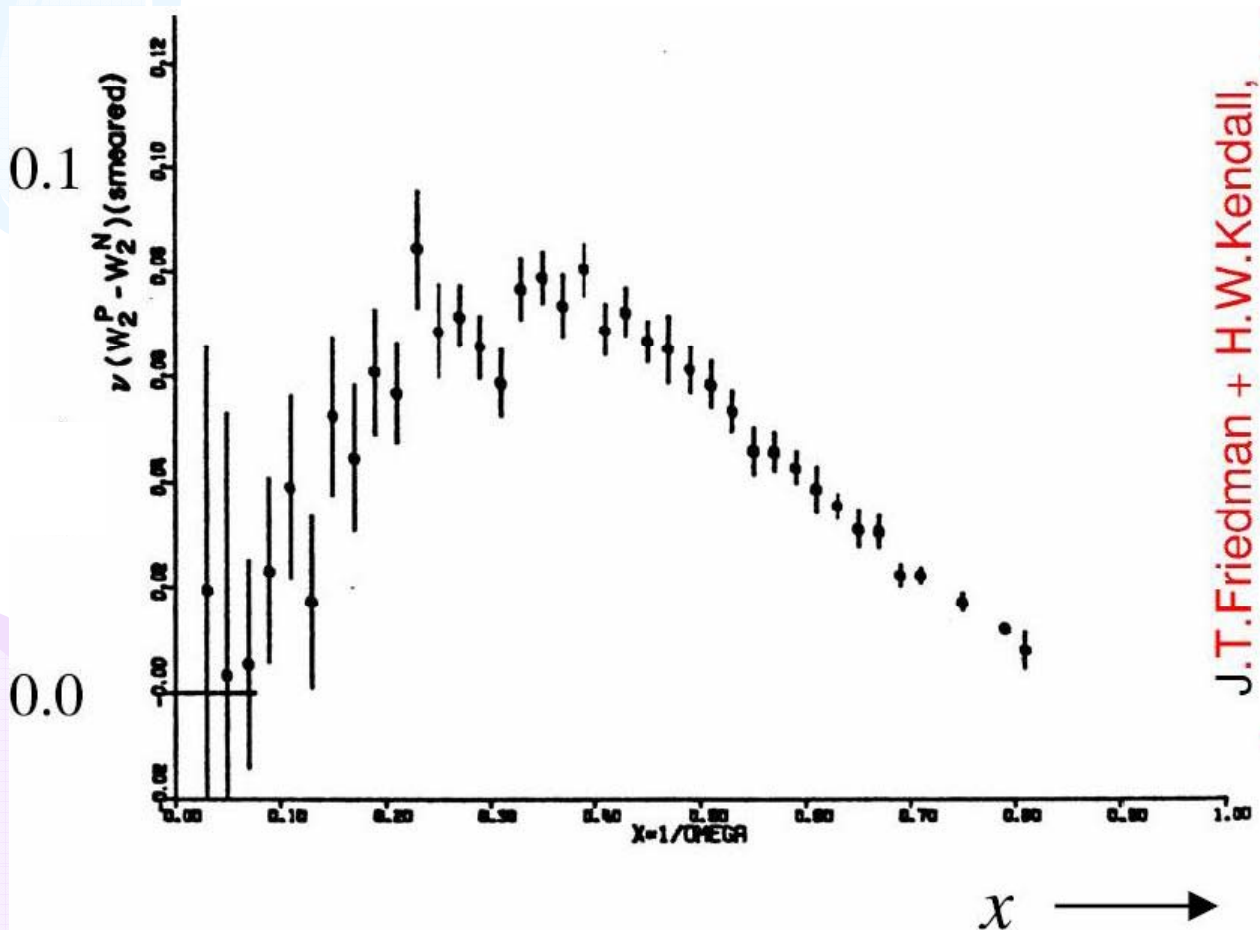
$$F_2^{\text{ep}} = \frac{x}{9} [4 \cdot u_v(x) + d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

$$F_2^{\text{en}} = \frac{x}{9} [u_v(x) + 4 \cdot d_v(x)] + \frac{4}{3} x \cdot s(x)$$

- Sottraendo le due espressioni, togliamo il contributo dei quark del mare:

$$F_2^{\text{ep}}(x) - F_2^{\text{en}}(x) = \frac{x}{3} [u_v(x) - d_v(x)]$$

$$F_2^{\text{ep}}(x) - F_2^{\text{en}}(x)$$



J.T.Friedman + H.W.Kendall,
Ann. Rev. Nucl. Sci. **22** (1972) 203

Integrali delle funzioni di struttura: contributo del gluone

- Ricordiamo la forma di F_2 :

$$F_2^{\text{ep}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x)] + \frac{1}{9} [s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\}$$

$$F_2^{\text{en}} = x \left\{ \frac{4}{9} [u^n(x) + \bar{u}^n(x)] + \frac{1}{9} [d^n(x) + \bar{d}^n(x)] + \frac{1}{9} [s^n(x) + \bar{s}^n(x)] \right\}$$

- Essa è del tipo $x \cdot f(x)$, quindi dal suo integrale possiamo ricavare la frazione di impulso del protone trasportata dalle particelle cariche al suo interno; in questa valutazione si può trascurare il contributo della frazione di impulso trasportata dai quark s.

$$\int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx \equiv \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \quad (\text{protone})$$

$$\int_0^1 F_2^{\text{en}} dx = \frac{4}{9} \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx + \frac{1}{9} \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx \equiv \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \quad (\text{neutrone})$$

$$\begin{cases} f_u = \int_0^1 x(u + \bar{u}) dx \\ f_d = \int_0^1 x(d + \bar{d}) dx \end{cases}$$

f_u = Frazione dell'impulso del protone trasportata da tutti i quark u e \bar{u} ed analogamente per f_d

- Le misure sperimentali danno:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^1 F_2^{\text{ep}} dx &= \frac{4}{9} f_u + \frac{1}{9} f_d \approx 0.18 \\ \int_0^1 F_2^{\text{en}} dx &= \frac{4}{9} f_d + \frac{1}{9} f_u \approx 0.12 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{cases} f_u \approx 0.36 \\ f_d \approx 0.18 \end{cases}$$

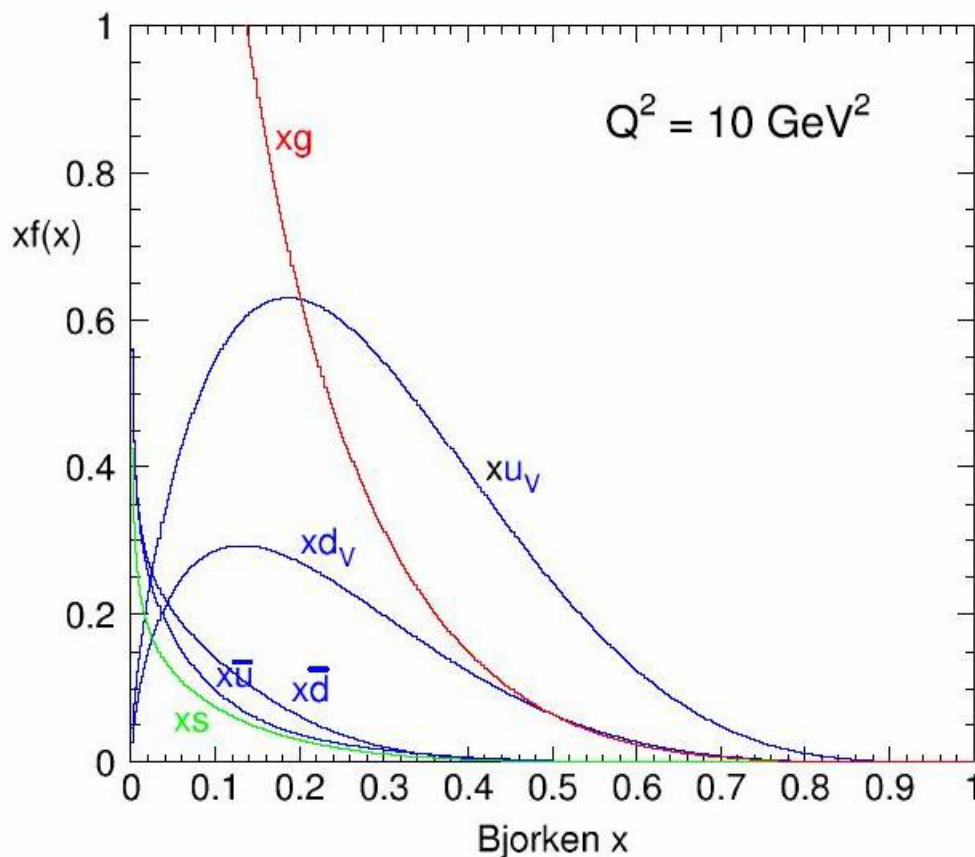
Solo il 50% dell'impulso del protone è trasportato dai quark e antiquark, il resto è trasportato dai gluoni

Sum rules

- Le funzioni di distribuzione di probabilità (pdf) dei quark devono soddisfare alcune regole di somma.
- Ad esempio, per il protone abbiamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 [u(x) - \bar{u}(x)] dx = 2 \quad \leftarrow 2 \text{ quark } u \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [d(x) - \bar{d}(x)] dx = 1 \quad \leftarrow 1 \text{ quark } d \text{ di valenza} \\ \int_0^1 [s(x) - \bar{s}(x)] dx = 0 \quad \leftarrow \text{stranezza } 0 \end{array} \right.$$

- Per confermare queste regole di somma, occorre analizzare lo scattering dei neutrini e degli antineutrini, che avviene per interazione debole tramite lo scambio di un W . Questo permette di distinguere i quark dagli antiquark.



Interazioni neutrino-nucleone

- A questo punto del corso diamo soltanto alcune formule che riguardano lo scattering neutrino (antineutrino) con il nucleone.
- Consideriamo soltanto le reazioni di corrente carica (scambio di un W); allora la conservazione della carica e del numero leptonico, fa sì che si hanno le reazioni:

$$\begin{cases} \nu_{\mu} d \rightarrow \mu^{-} u & ; \quad \nu_{\mu} \bar{u} \rightarrow \mu^{-} \bar{d} \\ \bar{\nu}_{\mu} u \rightarrow \mu^{+} d & ; \quad \bar{\nu}_{\mu} \bar{d} \rightarrow \mu^{+} \bar{u} \end{cases}$$

- Ricordiamo come abbiamo identificato le funzioni di distribuzioni di probabilità dei quark all'interno del protone e del neutrone:

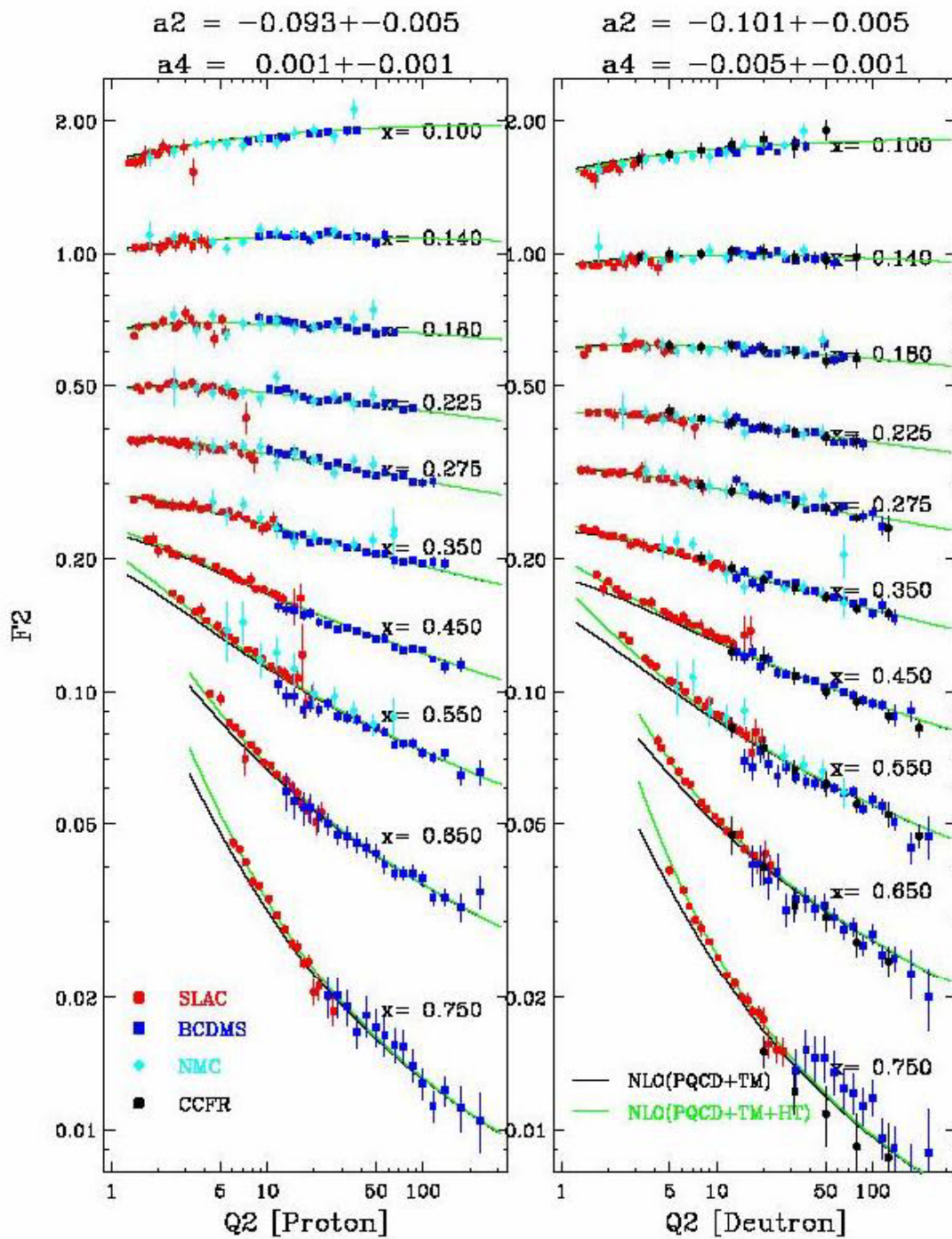
$$\begin{cases} u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \\ d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \\ s^p(x) = s^n(x) \equiv s(x) \end{cases}$$

- Per semplicità si usano bersagli isoscalari, ovvero con lo stesso numero di neutroni e di protoni. Si tenga presente che il neutrino misura d e \bar{u} , mentre l'antineutrino misura u e \bar{d}

$$\begin{cases} d^p(x) + d^n(x) = d(x) + u(x) \equiv Q(x) \\ \bar{u}^p(x) + \bar{u}^n(x) = \bar{u}(x) + \bar{d}(x) \equiv \bar{Q}(x) \end{cases}$$

- Nell'interazione del neutrino (antineutrino) compare una terza funzione di struttura, F_3 , dovuta all'interferenza tra le correnti vettoriali e assiali.

Violazione dello scaling: $F_2(x, Q^2)$



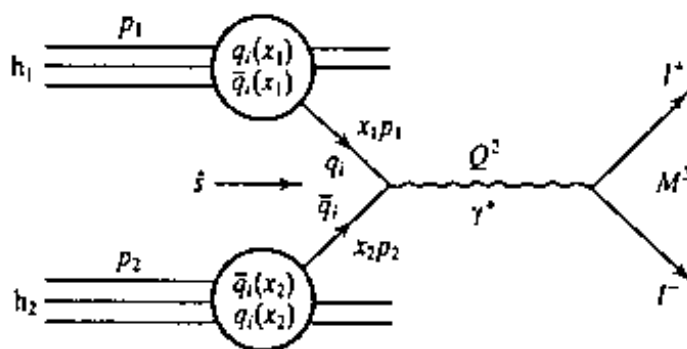
e^-p, μ^-p

$e^-d, \mu^-d, (vd)$

La violazione NON è dovuta ad una dimensione finita dei quark. Essa è dovuta alla continua interazione tra i partoni all'interno del protone.

Processi Drell-Yan

- Le proprietà delle funzioni di struttura sono universali e non dipendono dalla reazione particolare studiata
- Deve essere possibile calcolare sezioni d'urto diverse utilizzando le funzioni di struttura misurate nel deep inelastic scattering. Prendiamo ad esempio la produzione di coppie di leptoni in collisione adrone-adrone



$$\hat{s} = (x_1 p_1 + x_2 p_2)^2 \approx x_1 x_2 s = Q^2 = M^2.$$

- Sezione d'urto elementare per costituenti puntiformi:

$$\hat{\sigma}(q_i \bar{q}_i \rightarrow l^+ l^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3\hat{s}} e_{q_i}^2$$

Processi Drell-Yan

- Nel modello a partoni:

$$d^2\sigma(h_1 h_2 \rightarrow l^+ l^- X) = \frac{1}{3} \frac{4\pi\alpha^2}{3M^2} \sum_i e_{q_i}^2 [q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2) + \bar{q}_i(x_1)q_i(x_2)] dx_1 dx_2.$$

- Sperimentalmente misuriamo

$$\frac{d\sigma}{dM^2} = \int dx_1 dx_2 \frac{d^2\sigma}{dx_1 dx_2} \delta(M^2 - x_1 x_2 s).$$

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dM^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{9M^4} \int dx_1 dx_2 x_1 x_2 \delta(x_1 x_2 - \tau) \\ &\quad \times \sum_i e_{q_i}^2 [q_i(x_1)\bar{q}_i(x_2) + \bar{q}_i(x_1)q_i(x_2)] \end{aligned}$$

- La funzione delta assicura il constraint cinematico
- $\tau = M^2/s$

Processi Drell-Yan

- Ipotesi di scaling in questo processo :

$$M^4 \frac{d\sigma}{dM^2} = \frac{4}{9}\pi\alpha^2 F\left(\frac{M^2}{s}\right)$$

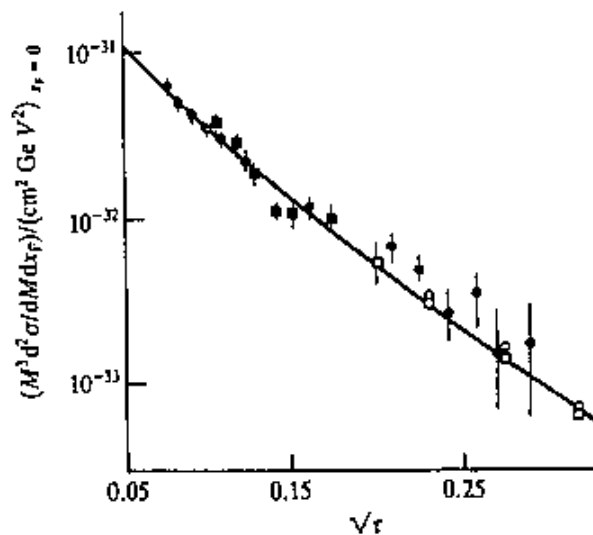
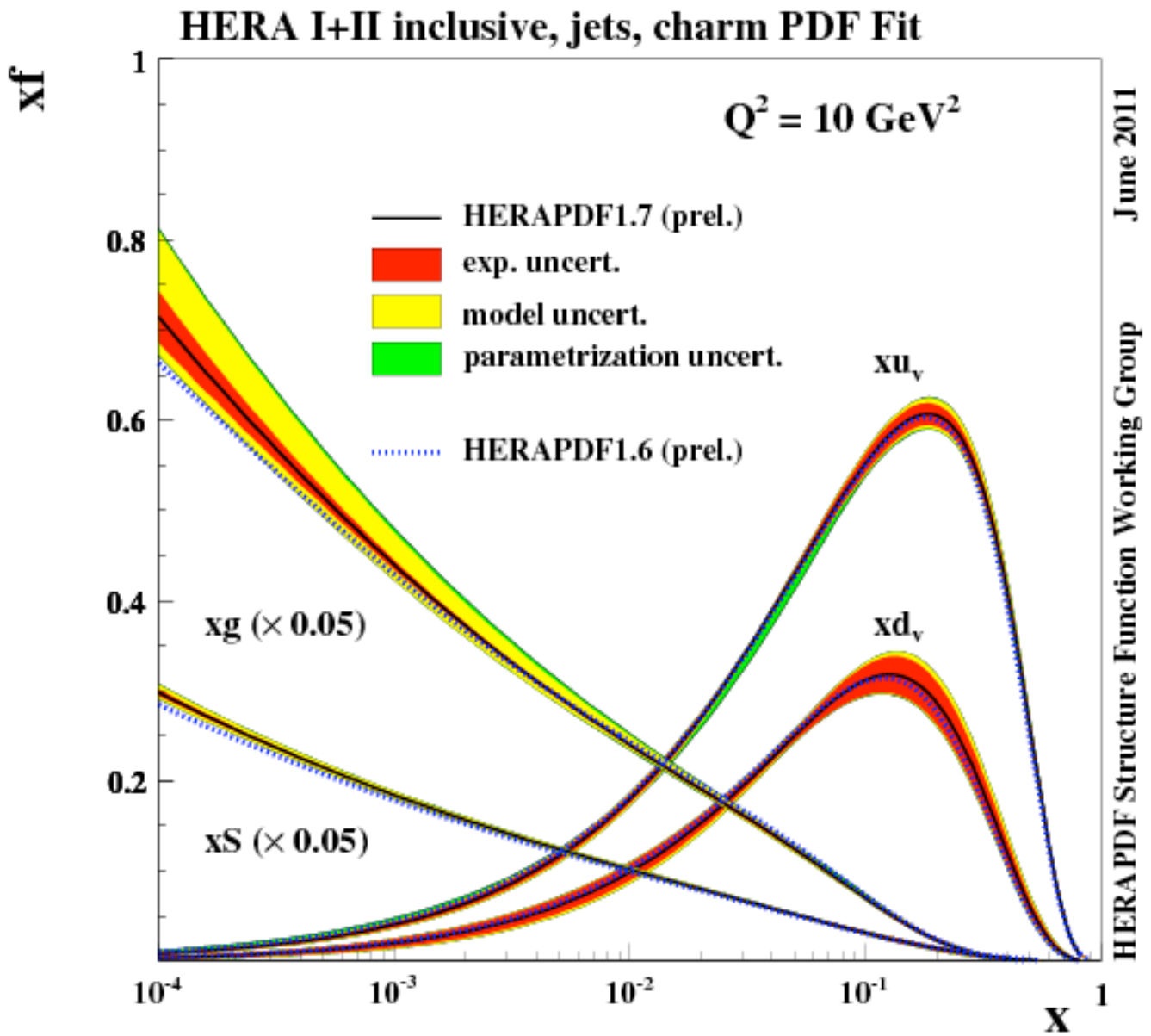


Figure 12.27 Experimental test of scaling in di-muon production in pp collisions. The differential cross-section $M^3(d^2\sigma/dM dx_F)$ at $x_F = 0$, measured over a range of \sqrt{s} from 24 to 62 GeV, depends only on the scaling variable $r = M^2/s$ where M is the di-muon mass: \circ , 23.8 GeV; \square , 27.4 GeV; \blacksquare , 44 GeV; \bullet , 62 GeV. (After Kenyon I R 1982 *Rep Prog Phys* 45 (1213).)

Modern PDF sets



Impact of LHC Drell-Yan

