Nome: .... **Cognome:** .... **Matricola:** ....

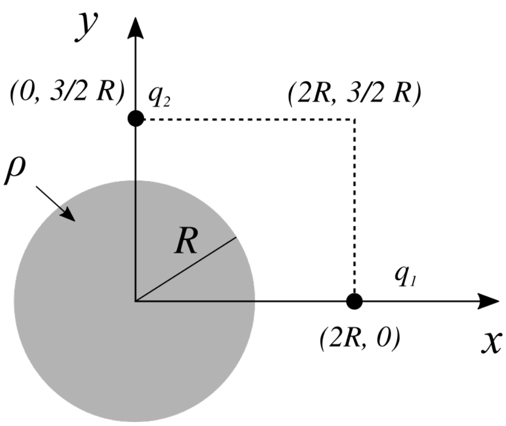
Tipologia: ☐ I esonero - ☐ II esonero - ☐ scritto

ESAME SCRITTO FISICA II - AA 2018/2019 - 11/06/2019

- Chi svolge tutto lo scritto ha **due ore** per svolgere gli esercizi
- Chi recupera uno dei due esoneri ha **un'ora** per svolgere gli esercizi
- Scrivete nome, cognome, matricola e ID del compito sui fogli che consegnate
- Chi si vuole ritirare può farlo ma *deve* consegnare questo foglio (che non verrà corretto)
- Sono vietati i telefoni: chiunque venga trovato ad utilizzare il telefono dovrà abbandonare l'aula

Elettricità

Un sistema è composto da una sfera isolante di raggio $R = 2$ m, carica uniformemente con densità di carica $\rho = 10^{-9}$ C/m^3, e da due cariche puntiformi $q_1 = 3.77 \times 10^{-9}$ C e $q_2 = -2q_1$. Le cariche sono disposte su tre vertici di un rettangolo (vedi figura).



1. Determinare il campo elettrico nel vertice posto in $(2R, 3/2R)$ **(6 punti)**.

- Il campo elettrico risultante è la somma dei campi elettrici generati da q_1, q_2 e dalla sfera. I primi due contributi sono diretti, rispettivamente, verso $\hat{y}$ e verso $-\hat{x}$ e sono dati da:

$$\vec{E}_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\hat{y}}{9R^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{x}}{R^2} = -\frac{2q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{x}}{4R^2}.$$

Applicando il teorema di Gauss possiamo considerare la sfera come una carica puntiforme di carica $q_s = \frac{4}{3}\pi R^3\rho = 3.35 \times 10^{-8}$ C. Il contributo dato da questa carica ha direzione

$$\hat{r} = \frac{1}{r_s}\left(2R, \frac{3}{2}\right),$$

dove $r_s = 5/2R$ è la distanza del centro della sfera dal vertice $(2R, 3/2R)$. Il campo elettrico generato dalla sfera vale quindi:

$$\vec{E}_s = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0 r_s}\left(\frac{8\hat{x}}{25R} + \frac{12\hat{y}}{50R}\right) = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{16\hat{x}}{125R^2} + \frac{12\hat{y}}{125R}\right)$$

Il campo totale è dato dalla somma di questi tre contributi:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_s.$$

2. Determinare il campo elettrico nel centro della sfera uniformemente carica **(4 punti)**.

- Nel centro della sfera la densità di carica di quest'ultima non ha effetto, quindi il campo elettrico è dato solamente dalle due cariche puntiformi, cioè

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

dove

$$\vec{E}_1 = -\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\hat{x}}{4R^2}$$

$$\vec{E}_2 = -\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\hat{y}}{9R^2} = \frac{2q_1}{\pi\epsilon_0}\frac{\hat{y}}{9R^2}.$$

3. Calcolare la variazione di energia elettrostatica del sistema qualora la carica q_1 venisse rimossa **(6 punti)**.

- La differenza di energia elettrostatica è definita come $\Delta U = U_f - U_i$, dove U_f e U_i sono i valori di energia finali ed iniziali del sistema. Poiché cambia solamente l'energia relativa a q_1 dobbiamo calcolare solamente i contributi in cui è presente quest'ultima. Quando q_1 è a distanza infinita la sua energia vale $U_f = 0$, mentre nello stato iniziale è pari a $U_i = q_1(V_2 + V_s)$, dove V_2 e V_s sono i valori del potenziale dovuto alla presenza di q_2 e della sfera carica. Questi due contributi si possono immediatamente calcolare utilizzando l'espressione del potenziale dovuto alla presenza di cariche puntiformi:

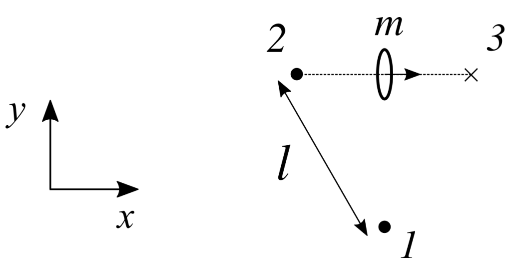
$$V_2 = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 \frac{5}{2}R} = -27\text{V}$$

$$V_s = \frac{q_s}{4\pi\epsilon_0 2R} = 75\text{V}$$

e quindi la differenza di energia richiesta vale $\Delta U = -U_i = -q_1(V_2 + V_s) = -1.82 \times 10^{-7}$ J.

Magnetismo

Tre fili indefiniti percorsi dalla stessa intensità di corrente $i = 3$ A ma verso diverso sono posti sui vertici di un triangolo equilatero di lato $l = 4$ m (vedi figura). Nel punto mediano **C** tra i fili 2 e 3 si pone una spira di momento di dipolo di modulo $m = 3.7 \times 10^{-5}$ Am^2 diretto lungo l'asse x.



1. Determinare il modulo del campo magnetico generato dai fili nel punto **C (7 punti)**.

- Il campo magnetico in **C** è dato dalla somma dei campi generati dai tre fili. Poiché i fili 2 e 3 sono percorsi da correnti di verso opposta ma eguale intensità, il loro contributo è uguale sia in modulo che in verso e vale

$$\vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \frac{2\mu_0 i}{2\pi l}\hat{y} = \frac{\mu_0 i}{\pi l}\hat{y}$$

mentre il contributo del primo filo è dato da

$$\vec{B}_1 = -\frac{2\mu_0 i}{2\pi\sqrt{3}l}\hat{x} = -\frac{\mu_0 i}{\pi\sqrt{3}l}\hat{x}$$

e quindi il campo magnetico totale è

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 = \frac{\mu_0 i}{\pi l}\left(-\frac{\hat{x}}{\sqrt{3}} + 2\hat{y}\right),$$

il cui modulo vale

$$B = \frac{\mu_0 i}{\pi l}\sqrt{4 + \frac{1}{3}} = 6.2 \times 10^{-7}\mathrm{T}$$

2. Calcolare l'energia potenziale del dipolo magnetico **(4 punti)**.

- L'energia potenziale di un dipolo magnetico in un campo data dal prodotto scalare del momento di dipolo con il campo stesso preso con il segno negativo, quindi

$$U = -\vec{m}\cdot\vec{B} = -m\hat{x}\cdot\vec{B} = -m\hat{x}\cdot\vec{B}_1 = m\frac{\mu_0 i}{\pi\sqrt{3}l} = 6.4 \times 10^{-12}\,\mathrm{J}.$$

Il segno positivo dell'energia viene dal fatto che il momento di dipolo e il campo sono di verso opposto.

3. Calcolare il modulo del momento meccanico delle forze subito dal dipolo magnetico **(5 punti)**.

- Il momento meccanico agente su di un dipolo è dato dal prodotto vettoriale tra il dipolo ed il campo, cioè:

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} = m\hat{x}\times(\vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3) = m\hat{x}\times(\vec{B}_2 + \vec{B}_3) = m\frac{2\mu_0 i}{\pi l}\hat{x}\times\hat{y} = m\frac{2\mu_0 i}{\pi l}\hat{z}$$

dove sono presenti solo i contributi dovuti ai fili 2 e 3 poiché il campo magnetico generato dal filo 1 è diretto lungo $\hat{x}$ e quindi il suo prodotto vettoriale con il momento di dipolo è 0. Il modulo del momento meccanico vale quindi

$$M = m\frac{2\mu_0 i}{\pi l} = 2.2 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm}$$