Nome: .... Cognome: .... Matricola: ....

I ESONERO FISICA II - AA 2018/2019 - 09/11/2018

- Avete due ore per svolgere gli esercizi
- Chi si vuole ritirare può farlo ma *deve* consegnare questo foglio (che non verrà corretto)
- Sono vietati i telefoni: chiunque venga trovato ad utilizzare il telefono dovrà abbandonare l'aula
- Chi viene espulso dall'aula non potrà fare il secondo esonero

Esercizio 1

Parte A

Un piano indefinito orientato parallelamente al piano (y, z) è carico con densità di carica superficiale $\sigma = 10^{-9}$ C/m^2.

i. Calcolare il campo elettrico (modulo, direzione e verso) in tutto lo spazio **(2 punti)**.
   - Il campo è uniforme e diretto lungo $\hat{x}$ per $x > 0$ (e viceversa). Il modulo vale $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = 56.5$ V / m.

ii. Scrivere l'espressione della differenza di potenziale tra un punto generico (x, y, z) ed il piano stesso **(2 punti)**.
   - $\Delta V = -Ex = -\frac{\sigma x}{\epsilon_0}$

iii. Calcolare la differenza di potenziale $V(\vec{P}_2) - V(\vec{P}_1)$, dove $\vec{P}_1 = (2d, 0, d)$ e $\vec{P}_2 = (d, d, 2d)$, $d = 10$ m **(2 punti)**.
   - $\Delta V = -\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d - 2d) = \frac{\sigma d}{\epsilon_0} = 565$ V.

Parte B

Dal piano viene rimosso un anello di raggio $R = 15$ m e spessore molto piccolo, $\delta r = 0.1$ m. Indizio: lo spessore è così piccolo che se l'anello fosse carico con densità superficiale σ_a, si potrebbe considerare con buona approssimazione carico con densità lineare $\lambda_a = \sigma_a \delta r$.

i. Calcolare il campo elettrico generato dal nuovo sistema (modulo, direzione e verso) su di un generico punto dell'asse passante per il centro dell'anello **(6 punti)**.
   - Il campo è diretto lungo $\hat{x}$, e per il verso vale lo stesso discorso di prima. Il modulo si trova sommando il contributo del piano a quello dell'anello, preso con la densità di carica opposta. Utilizzando i dati del problema l'anello ha carica

$$q_a = -2\pi R \delta r \sigma = -9.4 \times 10^{-9} \text{ C}$$

   e il campo vale (per $x > 0$):

$$E_x(x, y, z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{R \delta r \sigma}{2\epsilon_0} \frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

ii. Una particella di massa m e carica $q > 0$ è inizialmente posizionata su di un punto posto sull'asse dell'anello rimosso a distanza d dal piano. Scrivere l'espressione della velocità iniziale minima con la quale la particella deve essere lanciata verso il piano perché possa arrivare al centro dell'anello **(6 punti)**.

- Al tempo 0 la particella ha energia

$$U_e^{(i)} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{dq\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{R\delta r\sigma q}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+d^2}}$$

  mentre l'energia finale della particella che tocca il piano con $v = 0$ vale:

$$U_e^{(f)} = -\frac{R\delta r\sigma q}{2\epsilon_0 R}$$

  si ha quindi

$$v = \sqrt{\frac{m\sigma}{\epsilon_0}\left(dq + \frac{R\delta rq}{\sqrt{R^2+d^2}} - \frac{R\delta rq}{R}\right)}$$

iii. Una particella di massa m e carica $q < 0$ è inizialmente posizionata al centro dell'anello e possiede una velocità iniziale v uscente dal piano. Scrivere l'espressione del valore minimo di v per il quale la particella raggiunge un punto posto a distanza d dal piano **(6 punti)**.

- L'energia iniziale vale

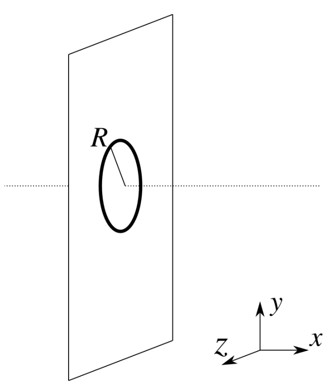
$$U_e^{(i)} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{R\delta r\sigma q}{2\epsilon_0 R}$$

  mentre quella finale è

$$U_e^{(f)} = -\frac{R\delta r\sigma q}{2\epsilon_0\sqrt{R^2+d^2}} - \frac{dq\sigma}{2\epsilon_0}$$

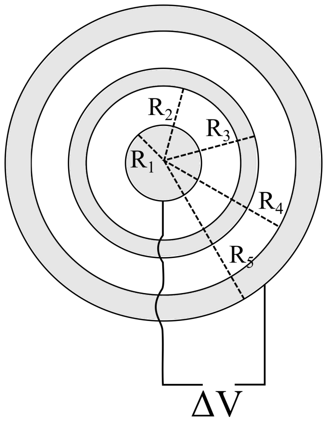
  uguagliando le due quantità e risolvendo per v si trova

$$v = \sqrt{\frac{m\sigma}{\epsilon_0}\left(\frac{R\delta rq}{R} - \frac{R\delta rq}{\sqrt{R^2+d^2}} - dq\right)}$$



Esercizio 2

Un cilindro conduttore di raggio $R_1 = 10$ cm è circondato da un guscio cilindrico di raggi $R_2 = 12$ cm ed $R_3 = 15$ cm. Quest'ultimo è a sua volta circondato da un guscio cilindrico di raggi $R_4 = 20$ cm ed $R_5 = 22$ cm. Il conduttore più interno e quello più esterno sono mantenuti ad una differenza di potenziale $\Delta V = 10$ V.



i. Calcolare la densità di carica presente su ogni superficie conduttrice **(6 punti)**.
    - Definendo la densità di carica lineare λ, la d.d.p. tra il conduttore interno e quello esterno vale

$$\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left[\log\left(\frac{R_2}{R_1}\right) + \log\left(\frac{R_4}{R_3}\right)\right]$$

e quindi la densità di carica presente sulle facce delle armature vale

$$|\lambda| = 1.184 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m}$$

la più interna sarà caricata con λ, poi $-\lambda$, poi λ, poi $-\lambda$ e, infine, λ. Si può anche scrivere la densità superficiale di carica su di una superficie generica di raggio R_i:

$$\sigma = \frac{\lambda}{2\pi R_i}$$

ii. Se il conduttore più esterno venisse messo a terra, quale sarebbe la differenza di potenziale tra il conduttore mediano ed un punto $r > R_5$ **(6 punti)**.
    - Mettere il guscio più esterno a terra significa scaricare la sua superficie più esterna e mettere il suo potenziale a 0. Si trova quindi:

$$V(R_3) - V(r > R_5) = V(R_3) - V(R_4) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\log\left(\frac{R_4}{R_3}\right) = 6.12\,\mathrm{V}$$

iii. Un guscio **cilindrico** di materiale dielettrico (lineare ed omogeneo) di raggi R_3 e $1.2R_3 = 18$ cm e costante dielettrica $\kappa = 3$ viene inserito nell'intercapedine tra il secondo ed il terzo conduttore. Calcolare la densità di carica di polarizzazione sulle sue superfici **(6 punti)**.
    - La due densità di carica si ottengono applicando $\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n}$ alle due superfici cilindriche, ricordando che

$$\vec{P}(r) = \epsilon_0 \chi \vec{E}(r) = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\lambda}{2\pi r} \hat{r}$$

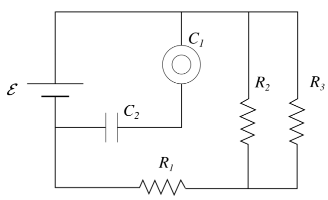
e quindi

$$\sigma_p^{(i)} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\lambda}{2\pi R_3} = 0.84 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$$
$$\sigma_p^{(e)} = -\frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{\lambda}{2\pi 1.2 R_3} = -0.70 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/m^2}$$

Esercizio 3

Parte A

Il circuito in figura è composto da un generatore di forza elettromotrice $\mathcal{E} = 10$ V e resistenza interna trascurabile, da un condensatore sferico C_1 di raggi $R_1 = 5$ cm ed $R_2 = 6$ cm, da un condensatore piano C_2 di dimensioni $a \times b \times h$ ($a = 10$ cm, $b = 10$ cm, $h = 1$ cm) e da tre resistori, $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 30\,\Omega$ e $R_3 = 10\,\Omega$.



i. Disegnare il circuito equivalente, calcolando esplicitamente R_{eq} e C_{eq} **(4 punti)**.
   - I due condensatori hanno capacità

$$C_1 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = 3.34 \times 10^{-11}\,\mathrm{F}$$
$$C_2 = \frac{\epsilon_0 ab}{h} = 8.85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

   e sono connessi in serie, quindi

$$C_{\mathrm{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 7 \times 10^{-11}\,\mathrm{F}$$

   Per quanto riguarda i resistori, R_1 è in serie al parallelo di R_2 ed R_3 quindi

$$R_{\mathrm{eq}} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} + R_1 = 17.5\,\Omega$$

ii. Calcolare l'intensità di corrente che scorre in R_1 **(4 punti)**.
   - Nei circuiti di corrente continua i condensatori sono interruzioni del circuito e quindi non si devono considerare nell'analisi. La corrente che scorre in R_1 si calcola applicando la legge di Ohm

$$\mathcal{E} = R_{\text{eq}} i$$

e quindi

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{eq}}} = 0.57 \text{ A}$$

iii. Calcolare la quantità di carica immagazzinata dai due condensatori **(4 punti)**.
   - Poiché non scorre corrente si deve avere $\mathcal{E} = \frac{q}{C_{\text{eq}}}$, quindi la carica dei due condensatori (che sono collegati in serie e quindi contengono la stessa carica) vale

$$q = \mathcal{E} C_{\text{eq}} = 7 \times 10^{-10} \text{ C}$$

Parte B

Si ha la possibilità di riempire con un materiale dielettrico lineare ed omogeneo di costante dielettrica $\kappa = 4$ uno solo dei due condensatori. Mostrare quale delle tre combinazioni possibili (dielettrico in C_1, dielettrico in C_2, no dielettrico)

i. massimizza la carica immagazzinata nel condensatore equivalente **(2 punti)**
   - La carica immagazzinata è proporzionale alla capacità equivalente, che aumenta maggiormente se riempiamo C_2 ($C_{\text{eq}} = 1.7 \times 10^{-10}$ F vs. $C_{\text{eq}} = 0.83^{-10}$ F).

ii. massimizza la differenza di potenziale ai capi di C_2 **(2 punti)**
   - Sappiamo che $q = C_{\text{eq}} \Delta V$, quindi la d.d.p. ai capi di C_2 vale:

$$\Delta V_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Delta V$$

   che è un funzione monotona crescente di C_1 e decrescente di C_2: è quindi meglio riempire C_1 di dielettrico (così da avere $C_1 \to \kappa C_1$).

iii. massimizza l'energia elettrostatica immagazzinata dal condensatore equivalente **(2 punti)**
   - Poiché la d.d.p. è mantenuta costante, capacità e carica sono proporzionali. Poiché l'energia vale $U_e = \frac{q^2}{2C_{\text{eq}}}$, è meglio massimizzare la carica e quindi la capacità. Questo si ottiene riempiendo di dielettrico C_2 ($C_{\text{eq}} = 1.7 \times 10^{-10}$ F vs. $C_{\text{eq}} = 0.83^{-10}$ F).