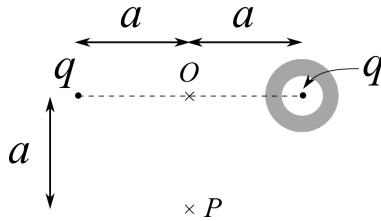


PRIMO ESONERO FISICA II - AA 2020/2021 - 13/11/2020

- Avete **due ore** per svolgere gli esercizi
- Scrivete nome, cognome, matricola e ID del compito su ogni foglio che scansionate

Primo esercizio

Un sistema è formato da un conduttore sferico cavo e da una carica puntiforme $q = 10^{-9}$ C, entrambi distanti $a = 50$ cm dal punto O . All'interno della cavità del conduttore è presente un'altra carica q (uguale in segno e modulo alla prima). Si svolga tutto l'esercizio trascurando gli effetti di induzione che le cariche **esterne** al conduttore (cioè quella posta a distanza $2a$ e, per i punti 2 e 3 dell'esercizio, q_0) hanno su di esso.



1. Determinare l'espressione del campo elettrostatico nel punto P posto a distanza a da O (**6 punti**).

- Il conduttore sferico genera al proprio esterno un campo equivalente a quello di una carica q in tutto e per tutto uguale all'altra. Di conseguenza, il campo generato in P avrà come unica componente quella diretta verso il basso (perché le componenti orizzontali dei campi generati dalle due cariche sono uguali e contrarie), che varrà

$$E_{\text{tot}} = 2E_q \cos \theta$$

dove θ è l'angolo compreso tra $\vec{r}_P - \vec{r}_q$ e $\vec{r}_P - \vec{r}_O$. Dati i valori in figura si trova $\cos \theta = a/r$, dove $r = \sqrt{2}a$ e quindi

$$E_{\text{tot}} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \frac{a}{r^3} = \frac{q}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 a^2}$$

2. Calcolare il lavoro fatto dalla **forza elettrostatica** per portare una carica $q_0 = -10^{-9}$ C dall'infinito fino al punto P (**4 punti**).

- Il lavoro richiesto è pari alla differenza di energia potenziale cambiata di segno, cioè $W = -\Delta U_e$. Ricordando che $U_e = q_0 V$ e considerando che l'energia iniziale $U_e^i = 0$ perché la carica si trova inizialmente all'infinito si ha

$$W = -\Delta U_e = U_e^i - U_e^f = -U_e^f = -q_0 V(P) = -\frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} = -\frac{qq_0}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{2}a} = 2.54 \times 10^{-8} \text{ J}$$

Poiché q_0 è negativa, lo spostamento di q_0 dall'infinito a P è concorde con il verso della forza elettrostatica, quindi ci aspettiamo un lavoro di segno positivo, come effettivamente abbiamo trovato.

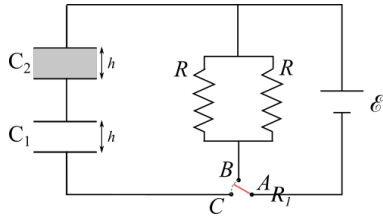
3. Una volta che q_0 è in posizione il conduttore viene **messo a terra**. Calcolare il lavoro che una **forza esterna** deve compiere per rimuovere q_0 in queste condizioni (**6 punti**).

- In questo caso il lavoro richiesto è quello svolto dalle forze esterne, per cui vale $W_{\text{ext}} = \Delta U_e$. L'energia potenziale finale di q_0 è 0, mentre quella iniziale dipende solamente dalla carica puntiforme q , perché nel momento in cui viene messo a terra il conduttore perde la sua carica libera, quindi non genererà più alcun campo elettrico. Si ha quindi

$$W_{\text{ext}} = \Delta U_e = -U_e^i = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{2}a} = -1.27 \times 10^{-8} \text{ J}$$

Qui il segno negativo è comprensibile ricordando che la forza esterna ha verso contrario a quello della forza elettrostatica.

Secondo esercizio



Il circuito in figura è formato da un generatore di forza elettromotrice \mathcal{E} , da due resistenze $R = 10\ \Omega$, e da due condensatori piani aventi armature di superficie $\Sigma = 100\ \text{cm}^2$ e spessore $h = 1\ \text{cm}$. Uno dei due condensatori è pieno di un dielettrico di costante relativa $\kappa = 2$. Nel circuito c'è anche un interruttore (in rosso in figura) che può connettere, a scelta, i punti A e B oppure i punti A e C . Quando A e B sono connessi ognuna delle due resistenze dissipa una potenza di $10\ \text{W}$.

1. Determinare il valore di \mathcal{E} (**6 punti**).

- La corrente che scorre in ognuna delle due resistenze si può trovare ricordando che $\mathcal{P} = Ri^2$, quindi $i = 1\ \text{A}$. Poiché le due resistenze sono in parallelo, per ognuna vale la legge di Ohm, $\mathcal{E} = Ri$, da cui si ricava $\mathcal{E} = 10\ \text{V}$.

2. Si connettono A e C e si aspetta che i condensatori si carichino. Calcolare i moduli dei campi elettrici presenti all'interno dei due condensatori (**6 punti**).

- Le capacità dei due condensatori sono $C_1 = \epsilon_0 \Sigma / h = 8.85 \times 10^{-12}\ \text{F}$ e $C_2 = \kappa C_1 = 1.78 \times 10^{-11}\ \text{F}$. Poiché sono collegati in serie la capacità del condensatore equivalente è

$$C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = \frac{\kappa C_1}{\kappa + 1} = \frac{2}{3} C_1 = 5.90 \times 10^{-12}\ \text{F}$$

La carica sulle armature dei condensatori è la stessa (perché sono collegati in serie) e vale

$$q = C_{\text{eq}} \mathcal{E} = 5.9 \times 10^{-11}\ \text{C}$$

Dalla carica possiamo ottenere direttamente il valore dei campi utilizzando la relazione $E = \sigma / \epsilon_0$ e ricordando che $\sigma = q / \Sigma$. Troviamo quindi

$$E_1 = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0} = 6.66 \times 10^2\ \text{V/m}, \quad E_2 = \frac{q}{\Sigma \epsilon_0 \kappa} = \frac{E_1}{\kappa} = 3.33 \times 10^2\ \text{V/m}$$

3. Dal secondo condensatore viene rimosso il dielettrico. Calcolare la variazione di energia elettrostatica del sistema (**4 punti**).

- In ogni dato momento l'energia elettrostatica del sistema è $U_e = \frac{1}{2} C_{\text{eq}} \mathcal{E}$. Quella iniziale vale $U_e^i = \frac{1}{2} \frac{\kappa C_1}{\kappa + 1} \mathcal{E} = \frac{1}{3} C_1 \mathcal{E}$, mentre quella finale è $U_e^f = \frac{1}{2} \frac{C_1}{2} \mathcal{E} = \frac{1}{4} C_1 \mathcal{E}$, quindi

$$\Delta U_e = U_e^f - U_e^i = -\frac{1}{12} C_1 \mathcal{E} = -7.37 \times 10^{-12}\ \text{J}$$