Fisica 1 per chimica industriale, compito scritto 18/09/2017
Docente: Santanastasio Francesco

Nome e cognome: .... Matricola: ....

Tempo a disposizione 3 ore, e' permessa la consultazione del solo libro di testo ed appunti (no libri di esercizi), e' obbligatorio spegnere i cellulari. Risolvere gli esercizi riportando le formule risolutive ed i risultati numerici utilizzando le unita' di misura del Sistema Internazionale.

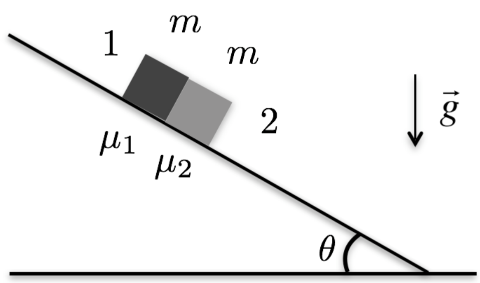
Esercizio 1 - Meccanica del punto materiale

Due corpi (punti materiali) di massa m =10 Kg scendono lungo un piano inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Durante la discesa i due corpi sono a contatto tra loro, come indicato in Figura 1. Tra il corpo 1 ed il piano e' presente un coefficiente di attrito dinamico μ_1=0.3 , mentre per il corpo 2 il coefficiente di attrito dinamico e' μ_2=0.5.

Determinare:
a) l'accelerazione dei due corpi e la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1;
b) il valore massimo del coefficiente μ_1 (μ_1^{max}) tale che durante la discesa ci sia contatto tra i corpi 1 e 2.

Se $\mu_1 = \frac{7}{5}\mu_1^{max}$, determinare a partire dall'istante in cui i corpi si distaccano:
c) il tempo Δt dopo il quale la differenza di velocita' dei due corpi e' pari ad 1m/s.

Figura 1

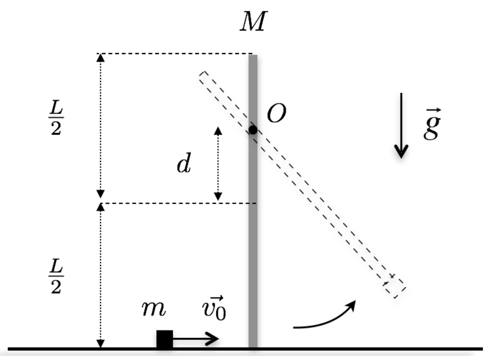


Esercizio 2 - Meccanica dei sistemi

Un sbarretta rigida omogenea di lunghezza $L = 1\ m$ e massa $M = 1\ Kg$ e' vincolata a ruotare attorno ad un asse fisso orizzontale passante per il punto O. Il punto O si trova ad una distanza $d = 0.25\ m$ dal centro della sbarretta. Inizialmente la sbarretta e' in quiete nella posizione verticale. Un corpo (punto materiale) di massa $m = 0.3\ Kg$ urta la sbarretta in modo completamente anelastico con una velocita' $v_0 = 3\ m/s$, come indicato in Figura 2. Dopo l'urto il sistema corpo+sbarretta inizia a ruotare attorno al punto O.

Determinare:
a) la velocita' angolare (ω_f) del sistema corpo+sbarretta un istante dopo l'urto;
b) l'altezza da terra del centro di massa del sistema corpo+sbarretta (y_{CM}) un istante dopo l'urto;
c) la massima altezza da terra (y_m) raggiunta dal corpo di massa m durante il moto.

Figura 2



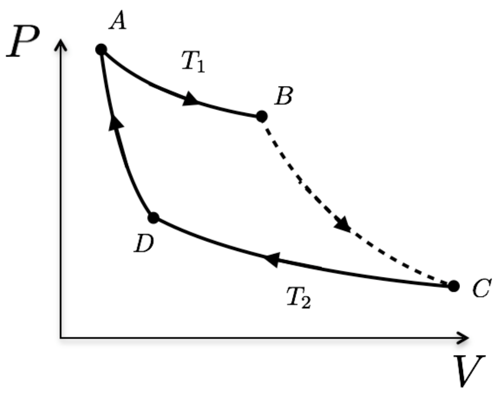
Esercizio 3 - Termodinamica

Un gas perfetto compie il ciclo termodinamico indicato in Figura 3, costituito dalle seguenti trasformazioni: un'espansione isoterma reversibile a temperatura $T_1 = 500K$ (AB), un'espansione adiabatica irreversibile (BC), una compressione isoterma reversibile a temperatura $T_2 = 200K$ (CD) ed una compressione adiabatica reversibile (DA). Si conoscono i rapporti dei seguenti volumi: $V_B/\ V_A = 2$ e $V_C/\ V_D = 2.3$.

Determinare:
a) il rapporto dei lavori compiuti dal gas nelle due trasformazioni adiabatiche (L_{BC}/L_{DA});
b) il rendimento del ciclo e confrontarlo con quello di un ciclo di Carnot che opera tra le stesse temperature T_1 e T_2.

Sapendo che il numero di moli del gas e' pari ad n=1, determinare:
c) la variazione di entropia del gas nella trasformazione irreversibile BC.

Figura 3



Soluzione - Esercizio 1

a)

Sia F la forza che il corpo 2 esercita sul corpo 1 (uguale ed opposta a quella che il corpo 1 esercita sul corpo 2).

Forza di attrito per 1: $\mu_1 \, m \;\; g \cos\theta$
Forza di attrito per 2: $\mu_2 \, m \;\; g \cos\theta$

Le equazioni del moto per il corpo 1 e 2 sono:
$m \;\; g \sin\theta - \mu_1 \, m \;\; g \cos\theta - F = m \;\; a$
$m \;\; g \sin\theta - \mu_2 \, m \;\; g \cos\theta + F = m \;\; a$

Risolvendo il sistema:
$$F = \frac{(\mu_2 - \mu_1)\, m \;\; g \cos\theta}{2} = 8.5\; N$$
$$a = g\left(\sin\theta - \cos\theta \frac{(\mu_2 + \mu_1)}{2}\right) = 1.5\; m/s^2$$

b)

C'e' contatto tra i due corpi se
$$F = \frac{(\mu_2 - \mu_1)\, m \;\; g \cos\theta}{2} > 0$$
da cui
$\mu_1 < \mu_2$

Quindi $\mu_1^{max} = \mu_2 = 0.5$

c)

Essendo $\mu_1 = \frac{7}{5}\mu_1^{max} = 0.7$, non c'e' contatto tra i due corpi (F=0).

Le equazioni del moto per il corpo 1 e 2 sono quindi:
$m \;\; g \sin\theta - \mu_1 \, m \;\; g \cos\theta = m a_1$
$m \;\; g \sin\theta - \mu_2 \, m \;\; g \cos\theta = m a_2$
dove le accelerazione sono diverse.

Il moto dei due corpi lungo il piano e' uniformemente accelerato:
$v_1 = a_1 t + v_0$
$v_2 = a_2 t + v_0$

La differenza di velocita' e' pari a:
$\Delta v = v_2 - v_1 = (a_2 - a_1)\Delta t$

$$\Delta t = \frac{\Delta v}{(a_2 - a_1)} = \frac{\Delta v}{g \cos\theta\, (\mu_1 - \mu_2)} = 0.59\; s$$

Soluzione - Esercizio 2

a)

Dopo l'urto il momento d'inerzia del sistema corpo+sbarretta e' pari a:

$$I \quad = I_{sbarretta} + I_{corpo} = (\frac{ML^2}{12} + Md^2) + m\left(\frac{L}{2} + d\right)^2 = 0.314\ kg\ m^2$$

$$J^i_{sistema} = J^i_{corpo} = mv_0\left(\frac{L}{2} + d\right)$$

$$J^f_{sistema} = J^f_{corpo+sbarretta} = I\omega_f$$

Il momento angolare si conserva

$$J^f_{sistema} = J^i_{sistema}$$

da cui:

$$\omega_f = \frac{mv_0\left(\frac{L}{2} + d\right)}{I} = 2.15\ rad/s$$

b)

L'asse y ha origine a terra ed e' orientato verso l'alto.
La posizione del CM lungo quest'asse (altezza da terra) e' quindi:

$$y_{CM} = \frac{0 \cdot m + \frac{L}{2}M}{m + M} = 0.385\ m$$

c)

L'energia meccanica si conserva nella rotazione.
Lo stato iniziale e' quello subito dopo l'urto con il sistema corpo+sbarretta in rotazione con velocita' angolare ω_f.

$$E_i = \frac{1}{2}I{\omega_f}^2$$

Lo stato finale e' quello in cui il sistema raggiunge la massima quota dopo aver ruotato di un angolo pari a θ.
L'energia nello stato finale e' quindi quella potenziale della forza peso dovuta ad una variazione di quota Δy del centro di massa del sistema

$$E_f = (m + M)g\Delta y$$

Imponendo $E_i = E_f$ si ricava:

$$\Delta y = \frac{I{\omega_f}^2}{2(m + M)g} = 0.057\ m$$

L'altezza massima raggiunta dal corpo di massa *m* (y_m) si ottiene da considerazioni geometriche:

$$\Delta y = \left(\frac{L}{2} + d - y_{CM}\right)(1 - \cos\theta)$$

$$(1 - \cos\theta) = \frac{\Delta y}{\left(\frac{L}{2} + d - y_{CM}\right)}$$

$$y_m = \left(\frac{L}{2} + d\right)(1 - \cos\theta) = \frac{\left(\frac{L}{2} + d\right)\Delta y}{\left(\frac{L}{2} + d - y_{CM}\right)} = 0.117\ m$$

Soluzione - Esercizio 3

a)

Essendo BC e DA adiabatiche:
$Q_{BC} = Q_{DA} = 0$

Si calcolano i lavori nelle trasformazioni BC e DA utilizznaod il primo principio della termodinamica:

$\Delta U_{BC} = Q_{BC} - L_{BC} = -L_{BC}$
$L_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nc_v(T_2 - T_1)$

$\Delta U_{DA} = Q_{DA} - L_{DA} = -L_{DA}$
$L_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nc_v(T_1 - T_2)$

Il rapporto dei lavori e' quindi:
$\frac{L_{BC}}{L_{DA}} = \frac{=-nc_v(T_2-T_1)}{-nc_v(T_1-T_2)} = -1$ (per ogni valori di n e c_v)

b)

$\eta_{ciclo} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|}$

Si studiano i calori scambiati nelle trasformazioni.
AB: $Q_{AB} = L_{AB} = nRT_1 ln\frac{V_B}{V_A}$ >0 (calore assorbito = Q_{ass})
BC: $Q_{BC} = 0$
CD: $Q_{CD} = L_{CD} = nRT_2 ln\frac{V_D}{V_C}$ <0 (calore ceduto = Q_{ced})
DA: $Q_{DA} = 0$

$\eta_{ciclo} = 1 - \frac{|Q_{ced}|}{|Q_{ass}|} = 1 - \frac{|nRT_2 ln\frac{V_D}{V_C}|}{|nRT_1 ln\frac{V_B}{V_A}|} = 0.52$

$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0.6 > \eta_{ciclo}$ *(come previsto dal teorema di Carnot)*

c)

La variazione di entropia del ciclo e' nulla, essendo l'entropia una funzione di stato.
Si calcolano quindi le entropie delle singole trasformazioni.
$\Delta S_{AB} = nRln\frac{V_B}{V_A} = 5.76\, J/K$
$\Delta S_{CD} = nRln\frac{V_D}{V_C} = -nRln\frac{V_C}{V_D} = -6.92\, J/K$
$\Delta S_{DA} = 0$

$\Delta S_{ciclo} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CD} + \Delta S_{DA} = 0$

Da cui:
$\Delta S_{BC} = -\Delta S_{AB} - \Delta S_{CD} - \Delta S_{DA} = 1.16\, J/K$ >0 (come previsto essendo BC una trasformazione adiabatica irreversibile)