Fisica 1 per chimica industriale, primo esonero 15/04/2016 - Meccanica del punto materiale
Docente: Santanastasio Francesco

Nome e cognome: .... Matricola: ....

Tempo a disposizione 2 ore, e' permessa la consultazione del solo libro di testo ed appunti (no libri di esercizi), e' obbligatorio spegnere i cellulari. Risolvere gli esercizi riportando le formule risolutive ed i risultati numerici utilizzando le unita' di misura del Sistema Internazionale.

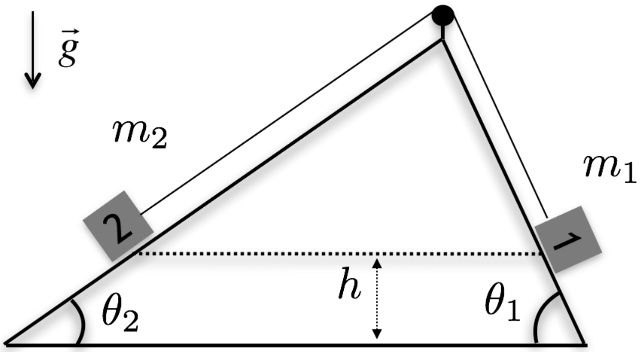
Esercizio 1

Due corpi (punti materiali) di massa $m_1 = 3Kg$ ed $m_2 = 5Kg$ sono collegati da una fune inestensibile e di massa trascurabile che passa attraverso una carrucola ideale di massa trascurabile. I corpi 1 e 2 poggiano, rispettivamente, su due piani inclinati di un angolo $\theta_1 = 65°$ e $\theta_2 = 35°$ rispetto alla direzione orizzontale, come rappresentato in Figura 1. Inizialmente i corpi si trovano entrambi ad una quota h=1.5 m da terra.

Assumendo che non ci sia attrito tra i corpi ed i piani inclinati, determinare:
a) l'accelerazione dei due corpi e la tensione della fune;
b) quale corpo tocca terra e dopo quanto tempo dall'istante iniziale.

Determinare inoltre:
c) il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s tra i corpi ed i piani inclinati tale che il sistema resti fermo nella posizione iniziale.

Figura 1



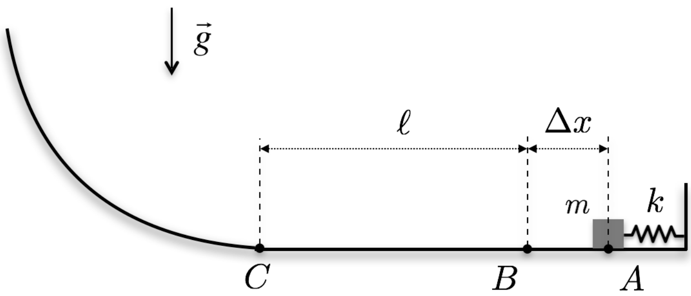
Esercizio 2

Un corpo (punto materiale) di massa *m=100g* si muove su una guida come mostrato in Figura 2. Alla base della guida e' posta una molla ideale di costante elastica *k*=100N/m e massa trascurabile. Nell'istante iniziale la molla e' compressa di una quantita' Δx=10cm rispetto alla propria lunghezza a riposo ed il corpo viene posto fermo a terra a contatto con la molla nel punto A. Nella fase di estensione, la molla spinge il corpo che inizia a muoversi a contatto con la guida.

Assumendo che non ci sia attrito, determinare:
a) l'altezza massima da terra raggiunta dal corpo.

Sapendo che il coefficiente di attrito dinamico nel tratto orizzontale AC della guida e' pari a $\mu_d = 0.1$ e che la distanza BC e' $\ell = 1m$, determinare:
b) l'altezza massima da terra raggiunta dal corpo;
c) il valore minimo della compressione iniziale della molla Δx_{min} tale che il corpo ripassi per il punto B dopo la fase di discesa.

Figura 2



Soluzione - Esercizio 1

a)

Scriviamo le forze risultanti che agiscono sui due corpi.

Scelta del sistema di riferimento: definiamo positive le forze dirette verso il basso per il corpo 1 e quelle dirette verso l'alto per il corpo 2.

$$\mathrm{m}_1 a = \mathrm{m}_1 g sin\theta_1 - T$$
$$\mathrm{m}_2 a = T - \mathrm{m}_2 g sin\theta_2$$

Da cui si ricavano a e T:

$$a = \frac{(\mathrm{m}_1 sin\theta_1 - \mathrm{m}_2 sin\theta_2)g}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} = -0.18\ m/s^2$$
$$T = \frac{\mathrm{m}_1 \mathrm{m}_2 g(sin\theta_1 + sin\theta_2)}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} = 27.2\ N$$

b)

Essendo a<0 nel sistema di riferimento scelto il corpo 2 scende mentre il corpo 1 sale.
Quindi il corpo 2 raggiunge terra dopo aver percorso uno spazio lungo il piano inclinato pari a $d = h/sin\theta_2$

Il moto e' uniformemente accelerato.
$x = 1/2\ a\ t^2$
quindi il tempo Δt di arrivo a terra si ottiene dalla relazione
$d = 1/2\ a\ \Delta t^{\ 2}$
da cui:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{a sin\theta_2}} = 5.4\ s$$

c)

In assenza di attrito il corpo 2 scende mentre il corpo 1 sale. Le due forze di attrito statica si oppongono al moto dei corpi.
Utilizzando lo stesso sistema di riferimento del caso precedente, la condizione di stabilita' del sistema e' pertanto:

$$\mathrm{m}_1 a = \mathrm{m}_1 g sin\theta_1 - T + \mathrm{m}_1 g cos\theta_1 \mu_s = 0$$
$$\mathrm{m}_2 a = T - \mathrm{m}_2 g sin\theta_2 + \mathrm{m}_2 g cos\theta_2 \mu_s = 0$$

Da cui si ricava il coefficiente di attrito statico:

$$\mu_s = \frac{\mathrm{m}_2 sin\theta_2 - \mathrm{m}_1 sin\theta_1}{\mathrm{m}_2 cos\theta_2 + \mathrm{m}_1 cos\theta_1} = 0.027$$

Soluzione - Esercizio 2

Si definisce l'energia potenziale della forza peso in modo che sia nulla lungo il tratto orizzontale della guida.

a)

L'energia meccanica si conserva essendo presenti solo forze conservative:
$\Delta E = E_f - E_A = 0$

$E_A = 1/2\, k\, \Delta x^2$
$E_f = mgh$

$$h = \frac{k\Delta x^2}{2mg} = 0.51\, m$$

b)

L'energia meccanica NON si conserva a causa della forza di attrito.
Il lavoro fatto dalla forza di attrito e' uguale alla differenza di energia meccanica:
$L_{attrito} = \Delta E = E_f - E_A$

$L_{attrito} = -|F_{attrito}| \cdot (\ell + \Delta x) = -\mu_d \cdot mg \cdot (\ell + \Delta x)$

$E_f = mgh$
$E_A = 1/2\, k\, \Delta x^2$

$$h = \frac{k\, \Delta x^2}{2mg} - \mu_d \cdot (\ell + \Delta x) = 0.4\, m$$

c)

Il minimo valore della compressione della molla tale che il corpo ripassi per il punto B si ottiene imponendo che il corpo arrivi in B con velocita' nulla (per valori maggiori della compressione minima il corpo arrivera' nel punto B con velocita' maggiore di zero).

L'energia non si conserva e quindi si deve utilizzare:
$L_{attrito} = \Delta E = E_B - E_A$
imponendo che la velocita' in B sia nulla.

$L_{attrito} = -|F_{attrito}| \cdot (2\ell + \Delta x) = -\mu_d \cdot mg \cdot (2\ell + \Delta x)$
(2ℓ perche' il corpo percorre il tratto BC due volte, la prima volta dopo la spinta della molla e la seconda volta dopo la fase di discesa dal tratto curvilineo della guida)

$E_B = 0$ (vedi condizione che il corpo arrivi con velocita' nulla nel punto B)

$E_A = 1/2\, k\, \Delta x^2$

Quindi si ottiene da
$L_{attrito} = \Delta E = E_B - E_A$
una equazione di secondo grado con incognita Δx:

$k\Delta x^2 - 2mg\mu_d \Delta x - 4mg\ell\mu_d = 0$

Risolvendo per Δx si ottengono le due soluzioni reali per la compressione minima richiesta:

$$\Delta x_{1,2} = \frac{mg\mu_d \pm \sqrt{mg\mu_d \cdot (mg\mu_d + 4\ell k)}}{k}$$

Solo la soluzione positiva ha senso fisico (in quanto l'altra soluzione fornirebbe una compressione negativa):

$$\Delta x_{1,2} = \frac{mg\mu_d + \sqrt{mg\mu_d \cdot (mg\mu_d + 4\ell k)}}{k} = 0.064\, m\ (=\ 6.4\, cm)$$