**Fisica 1 per chimica industriale, primo esonero 20/04/2018 - Meccanica del punto materiale**
Docente: Santanastasio Francesco

Nome e cognome: ............................................................................................................ Matricola: ............................

*Tempo a disposizione 2 ore, e' permessa la consultazione di un solo libro di testo (no libri di esercizi svolti, no quaderni/appunti), e' obbligatorio spegnere i cellulari. Risolvere gli esercizi riportando le formule risolutive ed i risultati numerici utilizzando le unita' di misura del Sistema Internazionale.*

---

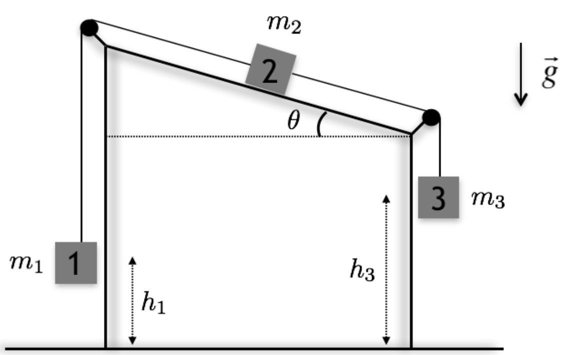
**Esercizio 1**

Un corpo di massa $m_2 = 1$ Kg e' posto su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale. Esso e' collegato tramite due fili (inestensibili, di massa trascurabile, e passanti attraverso due carrucole ideali) a due corpi di massa $m_3 = 2$ Kg ed $m_1$, come mostrato in Figura 1. Il corpo 1 e' inizialmente posto fermo ad una quota $h_1 = 0.5$ m da terra.

Assumendo che non ci sia attrito sul piano inclinato, determinare:
a) il valore di $m_1$ tale che il sistema sia in equilibrio ($m_{1,eq}$).
Ad un certo istante, il filo che collega il corpo 2 al corpo 3 viene tagliato. Assumendo $m_1 = m_{1,eq}$, determinare:
b) il valore minimo della quota iniziale $h_3$ del corpo 3 tale che il corpo 1 raggiunga terra prima del corpo 3.

Assumendo che, prima del taglio del filo, ci sia un coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.2$ tra il corpo 2 ed il piano inclinato, determinare
c) l'intervallo dei valori di $m_1$ tali che il sistema sia in equilibrio.

Figura 1




---

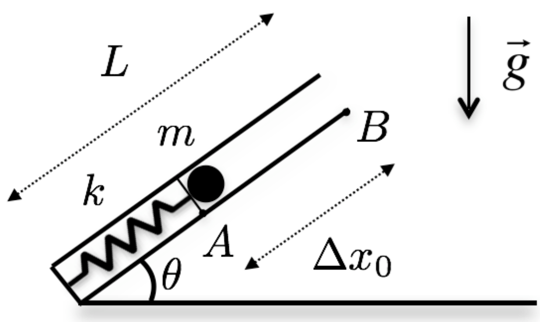
**Esercizio 2**

Un proiettile (punto materiale) di massa *m=50 g* e' lanciato da un cannoncino fisso, costituito da una molla ideale di costante elastica k=10 N/m e massa trascurabile ed un piano liscio inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto all'orizzontale, come mostrato in Figura 2. La lunghezza del cannoncino L=20 cm coincide con la lunghezza a riposo della molla. Inizialmente la molla e' compressa di una quantita' AB = $\Delta x_0 = 10$ cm ed il proiettile e' fermo.

Determinare:
a) il modulo della velocita' del proiettile nel punto B in uscita dal cannoncino;
b) l'angolo $\alpha$ tra il vettore velocita' del proiettile e l'orizzontale nell'istante in cui il proiettile tocca terra dopo aver eseguito un moto parabolico;
c) il tempo $t_{AB}$ in cui il proiettile percorre il tratto AB all'interno del cannoncino.

[*Nota: la molla puo' solo spingere il proiettile*]

Figura 2




---

**Soluzione - Esercizio 1**

**a)**

Si consideri una ascissa curvilinea parallela ai fili tale che il verso positivo della x coincide con la salita del corpo 3, la salita del corpo 2, e la discesa del corpo 1. In questo sistema di riferimento le condizioni di equilibrio sono:

$\mathrm{m}_1 g - \mathrm{T}_1 = 0$
$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 - \mathrm{m}_2 g \sin\theta = 0$
$\mathrm{T}_2 - \mathrm{m}_3 g = 0$

Risolvendo per l'unica incognita $\mathrm{m}_1$ si ottiene:
$\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_{1,eq} = \mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_2 \sin\theta = 2.5\ Kg$

**b)**

Dopo il taglio del filo le equazioni del moto per i corpi 1 e 2 sono:
$\mathrm{m}_1 g - \mathrm{T}_1 = \mathrm{m}_1 a_1 = \mathrm{m}_1 a_{12}$
$\mathrm{T}_1 - \mathrm{m}_2 g \sin\theta = \mathrm{m}_2 a_2 = \mathrm{m}_2 a_{12}$
essendo $a_1 = a_2 = a_{12}$ (fune inestensibile)

$a_{12} = \frac{(\mathrm{m}_1 - \mathrm{m}_2 \sin\theta)}{\mathrm{m}_1 + \mathrm{m}_2} g = 5.6\ m/s^2$

Si sceglie un sistema di riferimento con origine a terra ed asse y orientato verso l'alto.
Il corpo 1 e 3 eseguono due moti uniformemente accelerati:
$y_1(t) = h_1 - 1/2\ a_{12}\ t^2$
$y_3(t) = h_3 - 1/2\ g\ t^2$

I corpi toccano terra quando y=0:
$h_1 - 1/2\ a_{12}\ {t_1}^2 = 0$
$h_3 - 1/2\ g\ {t_3}^2 = 0$
da cui:
${t_1}^2 = 2h_1/a_{12}$
${t_3}^2 = 2h_3/g$

Il corpo 1 arriva a terra prima del corpo 3 se ${t_1}^2 < {t_3}^2$ da cui:
$h_3 > \frac{g}{a_{12}} h_1 = h_{3,min} = 0.875\ m$

**c)**

Utilizzando la stessa ascissa curvilinea del punto a) si ottengono queste condizioni di equilibrio in presenza della forza di attrito statico $\mathrm{F}_S$:

$\mathrm{m}_1 g - \mathrm{T}_1 = 0$
$\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2 - \mathrm{m}_2 g \sin\theta \pm \mathrm{F}_S = 0$
$\mathrm{T}_2 - \mathrm{m}_3 g = 0$

Caso +:
$\mathrm{F}_S = \mathrm{m}_2 g \sin\theta + \mathrm{m}_3 g - \mathrm{m}_1 g \leq \mathrm{F}_{S,max} = \mu_S N_2 = \mu_S \mathrm{m}_2 g \cos\theta$
Caso -:
$\mathrm{F}_S = -\mathrm{m}_2 g \sin\theta - \mathrm{m}_3 g + \mathrm{m}_1 g \leq \mathrm{F}_{S,max} = \mu_S N_2 = \mu_S \mathrm{m}_2 g \cos\theta$

($N_2$ reazione vincolare normale al piano inclinato che agisce sul corpo 2)

Si ottiene quindi l'intervallo di valori di $\mathrm{m}_1$ per cui il sistema si mantiene in equilibrio:
$\mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_2(\sin\theta - \mu_S \cos\theta) \leq \mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m}_3 + \mathrm{m}_2(\sin\theta + \mu_S \cos\theta)$

ovvero:

$2.3\ \mathrm{Kg} \leq \mathrm{m}_1 \leq 2.7\ \mathrm{Kg}$

**Soluzione - Esercizio 2**

Si definisce l'energia potenziale della forza peso in modo che sia nulla a terra.
Si definisce l'energia potenziale della forza elastica in modo che sia nulla nella posizione a riposo della molla.

**a)**

L'energia meccanica si conserva

L'energia meccanica si conserva da A a B essendo presenti solo forze conservative che fanno lavoro (forza elastiche e forza peso): **[1]**
$E_A = 1/2\, k\, \Delta x_0{}^2 + mgh_A$
$E_B = 1/2\, m\, v_B{}^2 + mgh_B$
con $h_B = h_A + \Delta x_0 \sin\theta$

Essendo $E_A = E_B$ si ottiene:

$v_B = \sqrt{\frac{k\,\Delta x_0{}^2}{m} - 2g\Delta x_0 \sin\theta} = 1\; m/s$

**b)**

Il punto materiale abbandona il cannoncino in B ed esegue un moto parabolico sotto l'effetto della sola forza peso.
$a_x = 0$ , $a_y = -g$
$v_x = v_B \cos\theta$ , $v_y = v_B \sin\theta - gt$
$x = L\cos\theta + v_B \cos\theta\, t$ , $y = L\sin\theta + v_B \sin\theta\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Il corpo tocca terra (punto C) al tempo $t_C$ quando y=0 :
$L\sin\theta + v_B \sin\theta\, t_C - \frac{1}{2}g t_C{}^2 = 0$
Risolvendo per $t_C$ si ottiene l'unica soluzione positiva:
$t_C = \frac{v_B \sin\theta + \sqrt{(v_B \sin\theta)^2 + 2L\sin\theta g}}{g} = 0.2\; s$

La tangente dell'angolo $\alpha$ e' pari a:
$\tan\alpha = \frac{v_y(t_C)}{v_x(t_C)}$
da cui:
$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y(t_C)}{v_x(t_C)}\right) = -59° \sim 1.03$ rad.

**c)**

Per calcolare il tempo tra A e B e' necessario risolvere l'equazione del moto del proiettile sottoposto alla forza elastica ed alla forza peso.
Scegliendo l'asse x con origine nel punto B ed orientato lungo il piano inclinato verso l'alto l'equazione del moto e':

$F_{tot,x} = ma_x$
$-kx - mg\sin\theta = m\frac{d^2x}{dt^2}$

Cambio di variabile
$-kx - mg\sin\theta = -ky$
da cui:
$x = y - \frac{mg}{k}\sin\theta$
e $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$

L'equazione in y e' quella di un moto armonico
$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$
con soluzione:
$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ con $\omega = \sqrt{k/m}$

Le condizioni iniziali del moto in x sono:
$x(0) = -\Delta x_0$ e $v_x(0) = 0$
che diventano in y:

$y(0) = -\Delta x_0 + \frac{mg}{k} \sin\theta$
$v_y(0) = v_x(0) = 0$

L'ampiezza A e la fase φ del moto armonico si ricavano dunque dalle condizioni iniziali in y:
$A\cos(\varphi) = -\Delta x_0 + \frac{mg}{k} \sin\theta$
$-A\sin(\varphi) = 0$
da cui:
$\varphi = 0$
$A = -\Delta x_0 + \frac{mg}{k} \sin\theta$

La soluzione in x e' quindi (dalla [1]):
$x(t) = \left(-\Delta x_0 + \frac{mg}{k} \sin\theta\right) \cos(\omega t) - \frac{mg}{k} \sin\theta$

Il tempo $t_{AB}$ si ottiene quando $x(t_{AB}) = 0$

$$\left(-\Delta x_0 + \frac{mg}{k} \sin\theta\right) \cos(\omega t_{AB}) - \frac{mg}{k} \sin\theta = 0$$

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{m}{k}} \arccos\left(\frac{1}{1 - \frac{\Delta x_0 k}{mg\sin\theta}}\right) = 0.134 \text{ s}$$