

Fisica 1 per chimica industriale, secondo esonero 23/05/2017 - Meccanica dei sistemi

Docente: Santanastasio Francesco

Nome e cognome: Matricola:

Tempo a disposizione 2 ore, e' permessa la consultazione del solo libro di testo ed appunti (no libri di esercizi), e' obbligatorio spegnere i cellulari. Risolvere gli esercizi riportando le formule risolutive ed i risultati numerici utilizzando le unita' di misura del Sistema Internazionale.

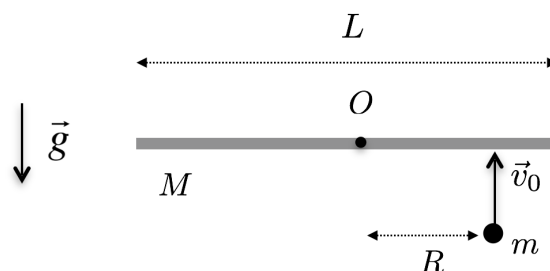
Esercizio 1

Una sbarretta omogenea di lunghezza $L=1\text{m}$ e massa $M=1\text{Kg}$ e' vincolata a ruotare senza attrito intorno ad un asse fisso orizzontale passante per il suo centro di massa O (vedi Figura 1). Inizialmente la sbarretta si trova in quiete nella posizione orizzontale e viene colpita dal basso, ad una distanza $R=0.3\text{m}$ dal punto O , da un proiettile (punto materiale) di massa $m=0.1\text{Kg}$ e velocita' $v_0 = 10\text{m/s}$ diretta ortogonalmente alla sbarretta.

Nell'ipotesi che il proiettile rimanga conficcato nella sbarretta (urto completamente anelastico), determinare:

- il momento d'inerzia I_{tot} del sistema sbarretta+proiettile rispetto all'asse di rotazione passante per O dopo l'urto;
- la velocita' angolare ω del sistema un istante dopo l'urto e l'energia dissipata nell'urto;
- il valore minimo di v_0 tale che la sbarretta compia un giro completo attorno al punto O .

Figura 1



Esercizio 2

Su un piano fisso, liscio, ed inclinato di un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto all'orizzontale e' posta una massa $m=0.5\text{Kg}$. Essa e' collegata ad un filo inestensibile di massa trascurabile che si avvolge, senza poter slittare, su una carrucola a forma di disco omogeneo di raggio $R=0.2\text{m}$ e massa $M=2\text{Kg}$. Il filo e' parallelo al piano inclinato e la carrucola puo' ruotare senza attrito attorno ad un asse orizzontale fisso passante per il suo centro di massa O . Inizialmente una forza F , diretta verso il basso ed applicata all'altro estremo del filo come indicato in Figura 2, tiene in equilibrio il sistema.

Determinare nella situazione di equilibrio iniziale:

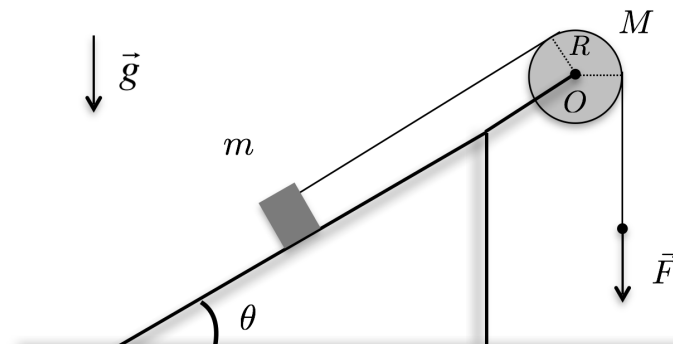
- il modulo della forza F e la tensione del filo nel tratto parallelo al piano inclinato.

Ad un certo istante, il modulo della forza F viene ridotto alla meta' rispetto alla situazione di equilibrio ed il sistema si mette in moto: la massa m inizia dunque a scendere lungo il piano inclinato mentre la carrucola inizia a ruotare attorno ad O in senso antiorario.

Determinare:

- l'accelerazione angolare α della carrucola e la tensione del filo nel tratto parallelo al piano inclinato, durante il moto.

Figura 2



Soluzione - Esercizio 1

a)

$$I_{tot} = \frac{ML^2}{12} + mR^2 = 0.0923 \text{ Kg}m^2$$

b)

Nell'urto si conserva la componente parallela all'asse di rotazione del momento angolare rispetto al polo O.

$$\begin{aligned} J_0^i &= J_0^f \\ J_0^i &= mv_0R \\ J_0^f &= I_{tot}\omega \\ \omega &= mv_0R/I_{tot} = 3.25 \text{ rad/s} \end{aligned}$$

$$E_{diss} = 1/2 I_{tot} \omega^2 - 1/2 m v_0^2 = -4.5 \text{ J}$$

c)

Dal momento che l'energia si conserva, la velocità minima $v_{0,min}$ è quella che permette al sistema di raggiungere la verticale con velocità nulla. Se la velocità iniziale è superiore a questo valore limite il sistema ha sufficiente energia per superare la posizione verticale e ripassa dunque per la posizione iniziale con la stessa velocità iniziale, compiendo un giro completo.

Nella fase iniziale, subito dopo l'urto, il sistema ruota con velocità angolare ω . In questa posizione, la massa m ed il centro di massa della sbarretta si trovano entrambi alla stessa quota. Definiamo che a questa quota l'energia potenziale della forza peso sia nulla. L'energia meccanica iniziale è pari dunque al solo termine di energia cinetica del sistema:

$$E_i = 1/2 I_{tot} \omega^2 = 1/2 I_{tot} (mv_{0,min} R/I_{tot})^2$$

Nello stato finale, la sbarretta si trova ferma in posizione verticale. Il centro di massa della sbarretta, che coincide con il punto O, è rimasto fermo alla quota iniziale. Invece la massa m è salita di una quantità pari ad R . L'energia meccanica finale è pari dunque al solo termine di energia potenziale della massa m :

$$E_f = mgR$$

Imponendo $E_i = E_f$ si ottiene:

$$\begin{aligned} 1/2 I_{tot} (mv_{0,min} R/I_{tot})^2 &= mgR \\ v_{0,min} &= \sqrt{\frac{2gI_{tot}}{mR}} = 7.76 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Soluzione - Esercizio 2

a)

All'equilibrio la risultante delle forze che agiscono su m lungo il piano inclinato deve essere nulla:

$$mg \sin \theta - T = 0$$

Anche il momento rispetto al polo fisso O delle forze che agiscono sulla carrucola deve essere nullo:

$$TR - FR = 0$$

$$\text{Da cui: } F = T = mg \sin \theta = 2.45 \text{ N}$$

b)

$$\text{Durante il moto } F = mg \sin \theta / 2 = 2.45/2 \text{ N} = 1.225 \text{ N}$$

Dal momento che la fune non può slittare sulla carrucola ed essendo il filo inestensibile, l'accelerazione lineare (a) della massa m e l'accelerazione angolare (α) della carrucola sono legate dalla seguente relazione: $a = \alpha R$

Il momento d'inerzia della carrucola (disco omogeneo) rispetto all'asse passante per O vale $I = MR^2/2 = 0.04 \text{ Kg}m^2$

Si scrivono le equazioni del moto separatamente per la massa m e per la carrucola:

$$mg \sin \theta - T = ma = m \alpha R$$

$$TR - FR = I\alpha$$

Risolvendo il sistema si ottengono:

$$\alpha = \frac{(mg \sin \theta - F)R}{I + mR^2} = 4.08 \text{ rad/s}^2$$

$$T = I\alpha/R + F = 2.04 \text{ N}$$