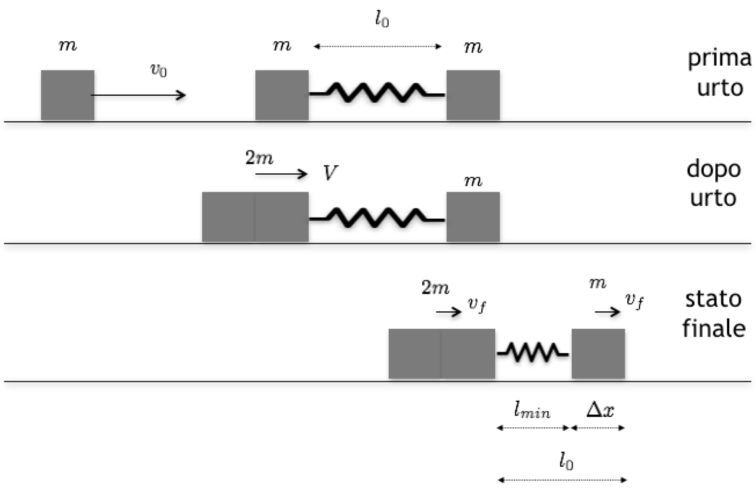
Esercizi su urti e quantita' di moto - Fisica 1

Esercizio 1

Due punti materiali di massa m =0.3 Kg sono collegati da una molla ideale di massa nulla, costante elastica k=3.4 N/m e lunghezza a riposo $l_0 = 0.03\ m$ e possono muoversi senza attrito su di un binario orizzontale. Le due masse sono inizialmente in quiete nel sistema del laboratorio. Un terzo punto materiale anche esso di massa m viene lanciato con velocita' v_0 verso il sistema delle due masse e l'urto che ne consegue e' di tipo completamente anelastico. Determinare:
a) la velocita' del centro di massa del sistema delle tre masse prima e dopo l'urto;
b) l'energia dissipata nell'urto;
c) la lunghezza minima della molla dopo l'urto.

Soluzione:



a)

Non ci sono forze esterne che agiscono sul sistema e quindi si conserva la quantita' di moto.

$p_{tot} = M_{tot} v_{cm} = cost.$
$p_{tot} = p_{iniziale} = m v_0$
$v_{cm} = m v_0 / M_{tot} = m v_0 / 3m = v_0/3 = 0.033\ m/s\ =\ 3.3\ cm/s$, costante durante tutto il moto

b)

Nell'urto anelastico si conserva la quantita' di moto. Dopo l'urto i due corpi restano attaccati e si muovono con velocita' V.
L'urto e' localizzato nello spazio e quindi sia la molla che la massa 3 restano ferme durante l'urto. Si considera solo l'urto tra 1 e 2.

$p_{iniziale} = p_{finale}$
$m v_0 = 2mV$
$V = v_0/2$

L'energia dissipata nell'urto e' dunque
$\Delta E = E_f - E_i = 1/2\ (2m)\ V^2 - 1/2\ m\ v_0{}^2$ = - 1/4 m $v_0{}^2 = -0.75\ mJ\ < 0$

c)

Dopo l'urto abbiamo solo due corpi che si muovono, uno di massa 2m e velocita' V ed uno di massa m inizialmente fermo, collegato al precedente dalla molla. Dopo l'urto, entrambi i corpi iniziano a muoversi verso destra e la molla inizia a comprimersi. La lunghezza minima della molla corrisponde al situazione in cui i due corpi hanno la stessa velocita' pari a v_f incognita.

Essendo in gioco solo la forza elastica, si conserva l'energia del sistema tra lo stato iniziale (subito dopo l'urto) e lo stato finale (quello che corrisponde alla lunghezza minima della molla). Nello stato finale la molla risulta compressa rispetto alla posizione di equilibrio di una quantita' incognita Δx.

$E_i = \frac{1}{2}(2m)V^2$
$E_f = \frac{1}{2}(2m){v_f}^2 + \frac{1}{2}(m){v_f}^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$
La prima equazione e' dunque:
$E_i = E_f$
$\frac{1}{2}(2m)V^2 = \frac{1}{2}(2m){v_f}^2 + \frac{1}{2}(m){v_f}^2 + \frac{1}{2}k\Delta x^2$ (Eq 1)

La seconda equazione si ottiene dalla conservazione della quantita' di moto del sistema (agiscono solo forze interne tra i due corpi).

$p_i = p_f$
$2mV = 2mv_f + mv_f$ (Eq 2)

Risolvendo il sistema delle due equazioni (Eq 1) e (Eq 2), ed essendo $V = v_0/2$, si ottiene:

$\Delta x = v_0\sqrt{\frac{m}{6k}}$ che e' pari alla compressione massima della molla.

La lunghezza minima della molla e' dunque

$$L_{min} = l_0 - \Delta x = 1.8\ cm$$

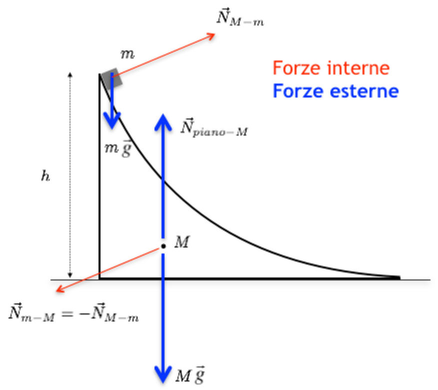
Esercizio 2

Un corpo di massa m viene lasciato cadere dalla cima di una guida di massa M. Inizialmente i due corpi sono fermi. Assumendo che non ci sia attrito ne' tra i due corpi ne' tra il corpo di massa M ed il piano orizzontale, determinare:
a) le velocita' v_m e v_M dei due corpi quando il corpo di massa m ha raggiunto la base della guida
b) considerare le risposte al punto a) nel caso limite in cui M>>m

Soluzione:

Durante la discesa del corpo di massa m lungo la guida si generano due forze interne (quindi uguali ed opposte) dovute al contatto tra m e M, come indicato in Figura. Queste forze hanno componenti lungo l'asse x orientate in versi opposti: il corpo m viene dunque spinto verso destra dalla reazione vincolare prodotta dal corpo M, mentre la guida M viene spinta verso sinistra dalla reazione vincolare prodotta dal corpo m (uguale ed opposta alla precedente). Quindi quando il corpo raggiunge la base del piano, m si muove verso destra con velocita' incognita v_m ed M si muove verso sinistra con velocita' incognita v_M. Determiniamo le velocita'.

a)
Le forze esterne che agiscono sul sistema m+M sono tutte verticali: forza peso di M, forza peso di m, e la reazione vincolare esercitata dal piano sul corpo di massa M. Non ci sono invece forze esterne lungo l'asse x. Quindi si conserva la quantita' di moto del sistema m+M lungo l'asse x.

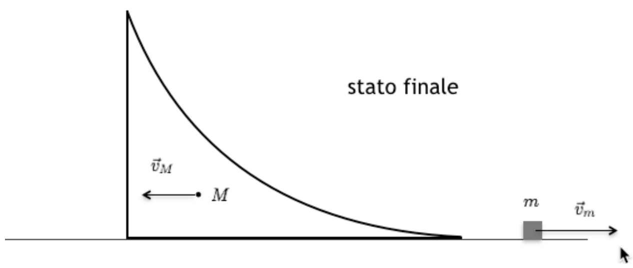


$p_{i,x} = 0 \ \ (tutto\ fermo\ inizialmente)$
$p_{f,x} = mv_m + M\,v_M (tutto\ fermo\ inizialmente)$

Per la conservazione della quantita' di moto totale lungo x:
$p_{i,x} = p_{f,x}$ e quindi $mv_m + M\,v_M = 0$

Inoltre si conserva l'energia meccanica tra lo stato iniziale e finale:
$E_i = mgh$
$E_f = 1/2\,m{v_m}^2 + 1/2\ M\,{v_M}^2$
$E_i = E_f$ da cui: $mgh = 1/2\,m{v_m}^2 + 1/2\ M\,{v_M}^2$

Dal sistema:
$mv_m + M\,v_M = 0$
$mgh = 1/2\,m{v_m}^2 + 1/2\ M\,{v_M}^2$
si ottiene:
$v_M = -\frac{m}{M}\sqrt{\frac{2gh}{(1+\frac{m}{M})}}$ <0 (scegliendo la soluzione negativa secondo la quale M va verso sinistra)
$v_m = -\frac{M}{m} v_M = \sqrt{\frac{2gh}{(1+\frac{m}{M})}} > 0$



b) Nel limite M>>m
$v_M = 0$
$v_m = \sqrt{2gh}$
E' quello che succede quando consideriamo un guida fissa nei problemi di cinematica del punto materiale.