Formula di Poisson
(derivata di un vettore rotante di modulo costante)

Francesco Santanastasio

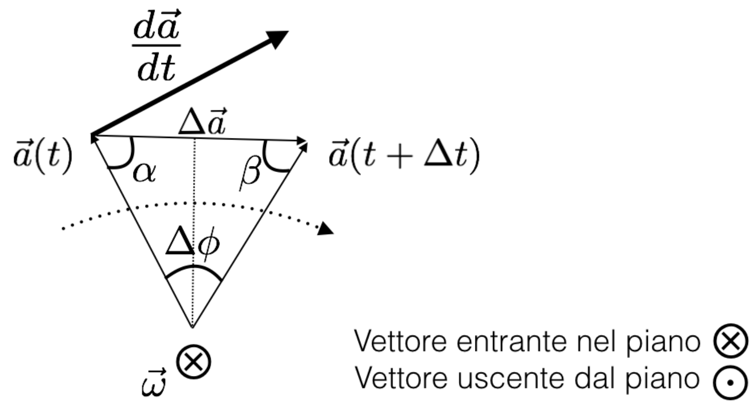
Marzo 2019

Formula di Poisson

Consideriamo un vettore $\vec{a}$ di modulo a costante, ma variabile nel tempo in direzione. Il vettore ruota nello spazio mantenendo costante il suo modulo. Si vuole calcolare la derivata rispetto al tempo:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{a}(t+\Delta t) - \vec{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{a}}{\Delta t} \tag{1}$$

Un vettore è definito da direzione, verso e modulo. Consideriamo il triangolo in figura.



Direzione e verso: quando $\Delta t \to 0$ anche l'angolo $\Delta\phi \to 0$. In questo limite $\alpha = \beta \to \pi/2$; quindi il vettore $\Delta\vec{a}$ tende ad essere ortogonale al vettore $\vec{a}$:

$$\Delta\vec{a} \perp \vec{a} \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{a}}{dt} \perp \vec{a} \tag{3}$$

Quindi il vettore $\frac{d\vec{a}}{dt}$ ha direzione ortogonale a quella di $\vec{a}$ e verso indicato dal senso di rotazione del vettore.

Modulo: Calcoliamo il modulo del vettore $\frac{d\vec{a}}{dt}$ considerando la figura :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| &= \lim_{\Delta t\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{a}}{\Delta t}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\vec{a}|}{\Delta t} && (4)\\
|\Delta\vec{a}| &= 2\cdot a\cdot\sin(\Delta\phi/2) && (5)\\
\left|\frac{d\vec{a}}{dt}\right| &= \lim_{\Delta t\to 0,\Delta\phi\to 0}\frac{2\cdot a\cdot\sin(\Delta\phi/2)}{\Delta t} && (6)\\
&= \lim_{\Delta t\to 0,\Delta\phi\to 0} 2\cdot\frac{\sin(\Delta\phi/2)}{\Delta\phi/2}\cdot\frac{\Delta\phi}{2}\cdot\frac{1}{\Delta t} && (7)\\
&= a\cdot\lim_{\Delta\phi\to 0}\frac{\sin(\Delta\phi/2)}{\Delta\phi/2}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta t} = a\cdot\frac{d\phi}{dt} = a\cdot\omega && (8)
\end{aligned}$$

dove $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ è il modulo della velocità angolare del vettore rotante.

Possiamo riunire le relazioni ottenute in un'unica formula:

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{a} \quad \text{se } |\vec{a}| = cost. \quad \text{(Formula di Poisson)} \tag{9}$$

dove $\times$ indica un prodotto vettoriale ed il vettore $\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ è così definito:

- direzione: ortogonale al piano di rotazione istantanea di $\vec{a}$;
- verso: tale che punti verso un osservatore che vede ruotare il vettore $\vec{a}$ in senso antiorario;
- modulo: $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ dove ϕ è l'angolo spazzato dal vettore durante la rotazione.

Applicazione alla cinematica del punto materiale

Posizione: $\vec{s}(t)$
Velocità: $\vec{v} = \frac{d\vec{s}(t)}{dt}$ (sempre tangente alla traiettoria del punto materiale)
Accelerazione: $\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$

Riscriviamo la velocità come $\vec{v} = v\cdot\hat{v}$ dove v è il modulo di $\vec{v}$ e $\hat{v}$ è il versore di $\vec{v}$ (modulo di vettore unitario con la stessa direzione e verso di $\vec{v}$). Calcoliamo l'accelerazione:

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= v\cdot\hat{v} && (10)\\
\vec{a} &= \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{dv}{dt}\cdot\hat{v} + v\cdot\frac{d\hat{v}}{dt} && (11)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{dv}{dt} \cdot \hat{v} + v \cdot \vec{\omega} \times \hat{v} && (12) \\
&= \frac{dv}{dt} \cdot \hat{v} + \vec{\omega} \times \vec{v} && (13)
\end{aligned}
$$

Si ottiene quindi:

$$
\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{a_t} + \vec{a_c} && (14) \\
\vec{a_t} &= \frac{dv}{dt} \cdot \hat{v} \quad \text{(accelerazione tangenziale)} && (15) \\
\vec{a_c} &= \vec{\omega} \times \vec{v} \quad \text{(accelerazione centripeta)} && (16)
\end{aligned}
$$