Esercizi di Fisica 1

1.1 Cinematica del punto materiale in una dimensione

Es. 1.1) Cambio unita' di misura - Limiti di velocita'

In un tratto di strada negli USA vi e' il limite di velocita di 55 miglia all'ora.
Sapendo che un miglio e' uguale a 5280 piedi, un piede uguale a 12 pollici, ed un pollice uguale a 2.54 cm, determinare:
a) la lunghezza di un miglio in km;
b) il limite di velocita' in km/h;
c) il limite di velocita' in m/s.

Es. 1.2) Analisi dimensionale - Pendolo semplice

Un pendolo semplice e' formato da un punto materiale di massa M appeso ad un filo inestensibile di massa trascurabile. Il pendolo, inizialmente fermo ed inclinato di un angolo θ, viene lasciato andare ed inizia ad oscillare. Determinare il periodo di oscillazione del pendolo (tempo necessario per una oscillazione completa) utilizzando la sola analisi dimensionale.

Es. 1.3) Inseguimento di un treno

Una persona insegue un treno in partenza.
Nell'istante iniziale in cui il treno inizia a muoversi il passeggero e' a distanza d dal treno e corre con velocita' costante $v = 5\ m/s$. Il treno accelera con $a = 1\ m/s^2$ partendo da fermo. Rispondere alle seguenti domande:
a) se $d = 30m$, determinare se la persona raggiunge il treno;
b) determinare la distanza massima tale che la persona riesca a salire sul treno;
c) la velocita' del treno quando la persona sale sul treno se $d = 10.5m$

Es. 1.4) Gioco della banconota da 10 euro

Una persona (A) sfida un amico (B) a prendere una banconota da 10 euro nel seguente modo: A tiene in verticale la banconota per il suo estremo superiore, mentre il pollice ed indice della mano di B sono al centro del biglietto senza che si tocchino. A lascia cadere la banconota in un istante qualunque a sua scelta (senza ovviamente avvertire B). B deve provare a prendere la banconota senza spostare la sua mano verso il basso (ovvero semplicemente chiudendo il pollice con l'indice). Riuscira' A a vincere la sfida?
(Dati: La lunghezza di una banconota da 10 euro e' circa 12.7 cm. Si assuma per B un tempo di reazione medio pari a 0.2 secondi.)

Es. 1.5) Lancio verso l'alto di una pietra

Dal tetto di un palazzo di altezza $h = 50m$, una pietra viene lanciata verso l'alto con velocita' iniziale $v_0 = 20\frac{m}{s}$. La pietra raggiunge la massima altezza e quando ricade verso il basso, sfiora il bordo dell'edificio ed infine raggiunge terra. Si assuma che nel momento del lancio il tempo t=0.
Determinare:
a) l'istante di tempo in cui la pietra raggiunge la massima altezza;
b) la massima altezza da terra;
c) la velocita' della pietra quando essa ripassa per il punto di lancio;
d) posizione e velocita' dopo 5 secondi dal lancio;
e) se l'altezza del palazzo e' $h = 30m$, come cambia la risposta alla domanda a)?

Es. 1.6) Moto rettilineo con accelerazione dipendente dal tempo

Un punto materiale si muove con una traiettoria rettilinea con accelerazione dipendente dal tempo a=Ct con $C=-4m/s^3$. Se all'istante t=0 il punto materiale ha una velocita' $v_0=2$ m/s, determinare quanto spazio percorrera' prima di fermarsi.

Soluzioni.

Es .1.1)
1 miglio = 5280 * 12 * 2.54 cm = 5280 * 12 * 2.54 * $10^{-2}10^{-3}km$ = 1609 km
vlim = 88.5 km/h = 24.6 m/s (essendo 1 h = 60 * 60 s = 3600 s)

Es. 1.2)
Le grandezze fisiche da cui il periodo puo' dipendere sono la massa M, la lunghezza del filo L, l'accelerazione di gravita' g e l'angolo θ. Essendo θ adimensionale non entra in gioco nell'analisi dimensionale:
$[T] = m^{\alpha} l^{\beta} a^{\gamma} = m^{\alpha} l^{\beta+\gamma} t^{-2\gamma}$
[T] = $t \quad = m^0 l^0 t^1$
da cui:
α=0
β+γ=0
-2γ=1
risolvendo il sistema:
α=0
β=1/2
γ=-1/2
Quindi
[T] = $m^0 l^{1/2} a^{-1/2}$
Utilizzando le grandezze del problema
$T \ = \ f(\theta) \sqrt{\frac{L}{g}}$
dove f(θ) e' una grandezza adimensionale.

Es. 1.3)
Persona = P
Treno = T
Scelta del sistema di riferimento:
al tempo t=0 P si trova nel punto x=0, il verso dell'asse x e' orientato come la velocita' di P.

a)
Le equazioni del moto di P e T sono, tenendo conto delle condizioni iniziali:
$x_P(t) = v\ t$ (moto rettilineo uniforme)
$x_T(t) = d\ +\ 1/2\ a\ t^2$ (moto uniformemente accelerato)

P raggiunge T se esiste un tempo t^* tale che $x_P(t^*) = x_T(t^*)$.

$$t^*_{12} = \frac{v_P\ +/-\ \sqrt{{v_p}^2 - 2ad}}{a} = \frac{5 +/- \sqrt{25\ -\ 2*1\ *\ 30}}{1}$$

Non ci sono soluzioni reali.
Quindi P non raggiunge il treno T.

b)
Affinche' P possa salire sul treno deve verificarsi che ci sia almeno un tempo in cui $x_P(t^*) = x_T(t^*)$. Dunque il termine ${v_p}^2 - 2ad\ \geq 0$
$d\ \leq {v_p}^2\ /\ 2a\ =\ distanza\ massima\ =\ 12.5\ m$

c)
Essendo d = 10.5 m< distanza massima, P raggiunge T.
La velocita' del treno nel momento in cui P raggiunge T e'
$v_T\ =\ a\ t^*_{12} = v_P\ +/-\ \sqrt{{v_p}^2 - 2ad}$ = 5 +/- 2 m/s
Due soluzioni possibili:
1: v = (5-2) m/s = 3m/s : P sale su T appena lo raggiunge
2: v = (5+2) m/s = 7 m/s : P supera T senza salire sul treno; T continua ad aumentare la velocita' e quindi ad un certo punto raggiunge nuovamente P; in questo momento P sale su T.

Es. 1.4)
Consideriamo l'estremo superiore della banconota (il punto materiale E).
Nel momento in cui A lascia andare la banconota, essa cade eseendo soggetta all'accelerazione di gravita' g.
Il punto materiale E segue dunque un moto uniformemente accelerato verso il basso. Essendo un tratto breve possiamo trascurare la resistenza dell'aria ed assumere un semplice moto rettilineo per il punto E.

Se il punto E percorre un tratto pari a meta' della lunghezza della banconota (L/2, corrispondente al punto dove si trova la mano di B) in un tempo Δt inferiore al tempo di reazione di B, allora B non riesce a prendere la banconota e quindi A vince la scommessa.
La condizione affinche' A vinca la scommessa e' dunque che:
$\Delta t < t_{reazione}$

La legge oraria del punto materiale E e':
$y = 1/2\, g\, t^2$
Quindi il tempo Δt per percorrere un tratto L/2 si calcola da questa relazione:
$$\frac{L}{2} = \frac{1}{2} g\, \Delta t^2$$
$$\Delta t = \pm\sqrt{\frac{L}{g}} = \sqrt{\frac{0.127\, m}{9.8\, m/s^2}} = 0.11\, s < t_{reazione} = 0.2\, s$$

Quindi A vince la scommessa!

Es. 1.5)
Scelta del sistema di riferimento: asse y diretto verso l'alto con orgine (y=0) a terra.
Con questa scelta, e tendendo conto delle condizioni iniziali, le equazioni del moto della pietra P sono:
$a = -g$
$v = v_0 - gt$
$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2$
a)
Quando P raggiunge la massima altezza, v=0:
$0 = v_0 - g\, t_{max}$
$t_{max} = \frac{v_0}{g} = 2\, s$

b)
$y_{max} = h + v\_0\, t_{max} - 1/2\, g\, t_{max}{}^2$ = 70.4 m

c)
Essendo
$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2$
imponendo che y =h troviamo:
$h = h + v_0 t^* - \frac{1}{2} g\, t^{*2}$
$t^* = \frac{2\, v_0}{g}$ (escludendo la soluzione t=0 dello stato iniziale)

$v^* = v_0 - g\, t^* = -v_0 = -20\, m/s$ (il modulo uguale alla velocita' iniziale. Vedremo che questo risultato e' legato alla conservazione dell'energia nel campo gravitazionale).

d)

$v = v_0 - gt$
$y = h + v_0 t - \frac{1}{2} g\, t^2$

$y(5\, sec.) = 27.5$ m
$v(5\, sec.) =$ -29 m/s

e)
La risposta alla domanda a) non cambia.
Il risultato e' indipendente dalla quota iniziale, dal momento che l'accelerazione di gravita' e' circa la stessa in ogni punto in prossimita' della superficie terrestre.

Es .1.6)

Si tratta di un tipico problema inverso della cinematica (si vuole ottenere la posizione x(t) a partire dall'accelerazione a(t)).

Scegliamo il sistema di riferimento tale che al tempo t=0 il punto materiale sia nell'origine del sistema stesso.

Le condizioni iniziali del moto sono quindi:
$x(0) = 0$ e $v(0) = v_0$

Si ricavano velocita' e posizione:

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t')dt' = v_0 + \int_0^t Ct'dt' = v_0 + \frac{C}{2}t^2$$
$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t')dt' = 0 + \int_0^t (v_0 + \frac{C}{2}t'^2)dt' = v_0 t + \frac{C}{2}\frac{t^3}{3}$$

Il tempo di arresto del punto materiale t_{stop} si ottiene da:
$$v(t_{stop}) = v_0 + \frac{C}{2}{t_{stop}}^2 = 0$$
$$t_{stop} = \sqrt{-\frac{2v_0}{C}} = 1\ s$$
(notare che C ha un valore negativo, altrimenti il corpo non si fermerebbe e non ci sarebbero soluzioni reali per il tempo)

Lo spazio di arresto e' quindi:

$$x(t_{stop}) = v_0 t_{stop} + \frac{C}{2}\frac{{t_{stop}}^3}{3} = 4/3\ m\ =\ 1.33\ m$$