Esercizi di cinematica - Fisica 1

Esercizio 1

In una gara di velocita' sui d =100 metri piani, due atleti arrivano al traguardo appaiati, entrambi con il tempo di t_{tot} =10.0 s. Il moto dei due atleti si puo' approssimare come la somma di un moto uniformemente accelerato nel primo tratto piu' un moto rettilineo uniforme fino al traguardo. Il primo atleta accelera per d_1 =20m, mentre il secondo accelera per d_2 =15m.
Determinare:
a) l'accelerazione dei due atleti;
b) le loro velocita' al traguardo;
c) chi e' primo dopo 50m;
d) chi avrebbe vinto se la gara fosse proseguita per altri 10 m e con quale distacco temporale.

Soluzione:

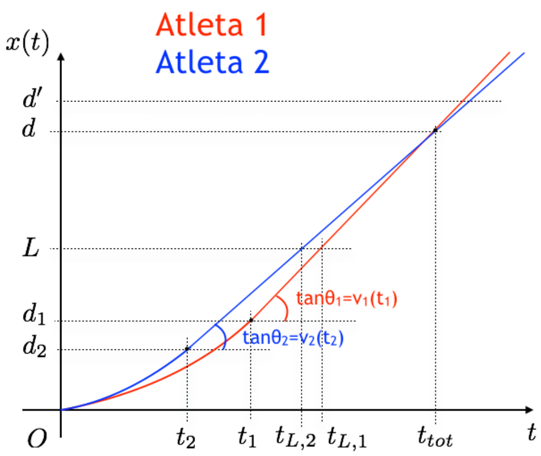
a)
Per il primo atleta le equazioni del moto sono:

PRIMO TRATTO (t<= t_1):
$a_1(t) = a_1$
$v_1(t) = v(t=0) + \int_0^t a_1(t)\,dt = a_1 t$
$x_1(t) = x(t=0) + \int_0^t v_1(t)\,dt = \frac{1}{2}a_1 t^2$

SECONDO TRATTO (t> t_1):
$a_1(t) = 0$
$v_1(t) = v(t=t_1) + \int_{t_1}^t a_1(t)\,dt = a_1 t_1$
$x_1(t) = x(t=t_1) + \int_{t_1}^t v_1(t)\,dt = d_1 + a_1 t_1 (t - t_1)$

Si impongono le condizioni del problema per il primo atleta:

$$d_1 = \frac{1}{2}a_1 {t_1}^2$$
$$d = d_1 + a_1 t_1 (t_{tot} - t_1)$$



risolvendo si ottengono:
$a_1 = \frac{(d+d_1)^2}{2 d_1 {t_{tot}}^2} = 3.60\ m/s^2$ e $t_1 = \frac{2 d_1 t_{tot}}{d+d_1} = 3.33\ s$

Analogamente per il secondo atleta:
$a_2 = \frac{(d+d_2)^2}{2 d_2 {t_{tot}}^2} = 4.41\ m/s^2$ e $t_2 = \frac{2 d_2 t_{tot}}{d+d_2} = 2.61\ s$

b)
$v_1(t_{tot}) = v_1(t_1) = a_1 t_1 = 12.0\ m/s$
$v_2(t_{tot}) = v_2(t_2) = a_2 t_2 = 11.5\ m/s$

c)
L=50m
Si calcola dopo quanto tempo il primo ($t_{L,1}$) ed il secondo ($t_{L,2}$) atleta raggiungono la distanza L:
$$L = d_1 + a_1 t_1 (t_{L,1} - t_1)$$
$$t_{L,1} = \frac{(L - d_1)}{a_1 t_1} + t_1 = 5.83\ s$$
ed analogamente:
$$t_{L,2} = \frac{(L - d_2)}{a_2 t_2} + t_2 = 5.65\ s$$
Essendo $t_{L,2} < t_{L,1}$, l'atleta 2 raggiunge per primo la distanza di 50 m.

d)
d' = d +10m = 110 m
$t_{d',1} = \frac{(d'-d_1)}{a_1 t_1} + t_1 = 10.833\ s$ e $t_{d',2} = \frac{(d'-d_2)}{a_2 t_2} + t_2 = 10.870\ s$

Essendo $t_{d',1} < t_{d',2}$, l'atleta 1 raggiunge per primo la distanza d' = 100m.
Il distacco temporale tra i due atleti sara' $\Delta t = t_{d',2} - t_{d',1} = 0.037\ s$

Esercizio 2

Un uomo primitivo, posto nell'origine di un sistema di riferimento fisso, lancia una freccia F puntando direttamente verso un scimmia S ferma su un albero. La scimmia intuisce l'intenzione aggressiva e, nell'istante in cui parte la freccia, si lascia cadere al suolo.
Determinare se la scimmia verra' colpita dalla freccia.

Soluzione:

Si scrivono le equazioni del moto per la freccia (F) e per la scimmia (S):

FRECCIA (F)

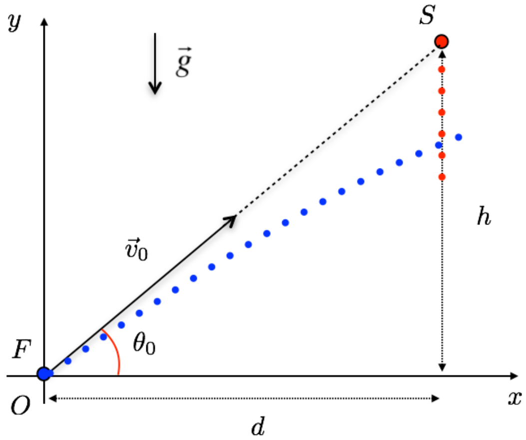
$a_{F,x} = 0 \qquad v_{F,x} = v_0 \cos\theta_0 \qquad x_F = v_0 \cos\theta_0 \, \mathrm{t}$

$a_{F,y} = -g \qquad v_{F,y} = v_0 \sin\theta_0 - gt \qquad y_F = v_0 \sin\theta_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2$

SCIMMIA (S)

$a_{S,x} = 0 \qquad v_{S,x} = 0 \qquad x_S = d$

$a_{S,y} = -g \qquad v_{S,y} = -gt \qquad y_S = h - \frac{1}{2} g t^2$



1) La condizione necessaria affinche' la freccia possa colpire la scimmia e' che la sua gittata sia superiore o uguale alla distanza d.

$y_F = 0 \quad da\ cui \quad v_0 \sin\theta_0 \, t' - \frac{1}{2} g t'^2 = 0$

Le soluzioni sono :

$t' = 0$ (istante iniziale) e $t' = \frac{2v_0 \ \sin(\theta_0)}{g}$ (tempo di gittata)

La gittata e' dunque: $x'_F = v_0 \cos\theta_0 \ \mathrm{t}' = \frac{{v_0}^2 2 \sin(\theta_0) \cos(\theta_0)}{g} = \frac{{v_0}^2 \sin(2\theta_0)}{g}$

La condizione $x'_F >= d$ implica che $v_0 >= \sqrt{\frac{gd}{\sin(2\theta_0)}}$

2) La freccia colpisce la scimmia se esiste un tempo T per il quale i vettori posizione di F ($\vec{r}_F(T)$) ed S ($\vec{r}_S(T)$) sono uguali.

Determiniamo a che istante T la coordinata y e' la stessa per F ed S:

$y_F(T) = y_S(T)$

$v_0 \sin\theta_0 \, T - \frac{1}{2} g T^2 \ == h - \frac{1}{2} g T^2$ da cui $T = \frac{h}{v_0 \sin\theta_0}$ (escludendo T=0, istante iniziale)

Determiniamo la coordinata x di F ed S al tempo T:

$x_S(T) = d$

$x_F(T) = v_0 \cos\theta_0 \, T = h/tan(\theta_0) == h/(\frac{h}{d}) = d$

Esiste dunque un tempo T in cui $\vec{r}_S(T) = \vec{r}_F(T)$.

La freccia colpisce sempre la scimmia (se v_0 soddisfa la condizione del punto 1)

Esercizio 3

Le lancette di un orologio indicano le ore 3. Dopo quanto tempo le lancette si ritrovano per la prima volta ad angolo retto?

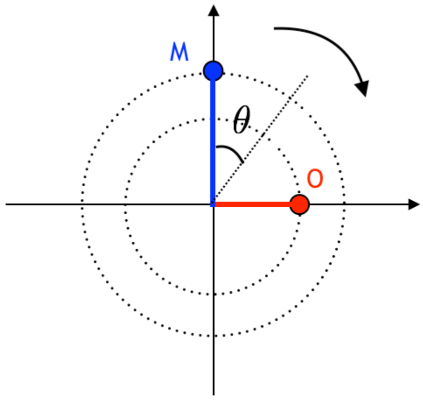
Soluzione:

Gli estremi delle lancette di un orologio sono punti materiali che si muovono di moto circolare uniforme con diverse velocita' angolari.

Per le ore (O): $\omega_O = 2\pi/12\ h$
Per i minuti (O): $\omega_M = 2\pi/1\ h$
h = ore

Indicando l'angolo θ quello formato tra le lancette e l'asse verticale si ottengono le equazioni del moto per le ore e per i minuti:

O: $\theta_O(t) = \frac{\pi}{2} + \omega_O t$
M: $\theta_M(t) = \omega_M t$



Le lancette si trovano la prima volta ad angolo retto quando:

$$\theta_M(t) - \theta_O(t) = \pi/2$$

da cui:

$$\omega_M t - \frac{\pi}{2} - \omega_O t = \frac{\pi}{2}$$

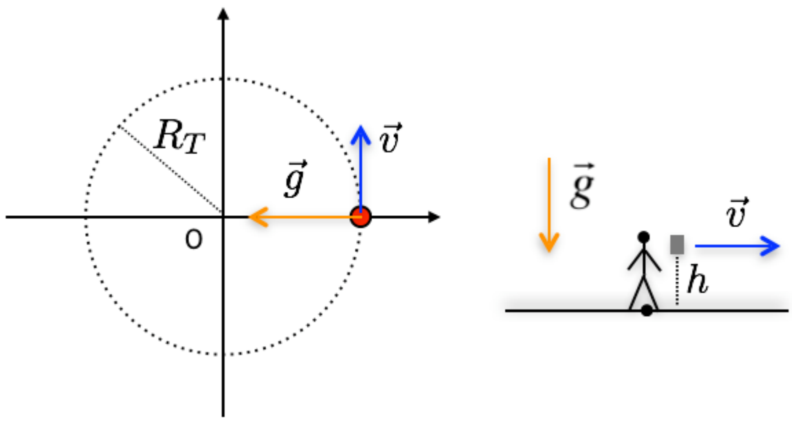
$$t = \frac{\pi}{(\omega_M - \omega_O)} = \frac{6}{11}\ h\ = \frac{6}{11}\ 60\ min. = 32.7\ min. =\ 1960\ s$$

Esercizio 4

Con che velocita' si deve lanciare orizzontalmente un corpo in prossimita' della superficie terrestre per far si che compia un giro completo intorno alla Terra? Si conosce il raggio della Terra pari a $R_T = 6300$ km.

Soluzione:

Lungo la direzione parallela alla superficie terrestre non ci sono forze. Quindi un corpo che compie un giro completo attorno alla Terra viaggia di moto circolare uniforme con velocita' v costante in modulo e raggio pari a R_T. Si noti come l'altezza h da cui viene lanciato il corpo (dell'ordine del metro) e' trascurabile rispetto al raggio della Terra e non entra nel problema.



In un moto circolare uniforme il modulo della velocita' v ed il modulo della accelerazione (solo centripeta) a sono legati al raggio r della circonferenza ed alla velocita' angolare ω dalla relazione:
$v = \omega r$ ed $a = \omega^2 r$

Nel caso particolare e' la forza di gravita' a produrre l'accelerazione centripeta. Quindi $a = g$. Inoltre $r = R_T$. Si ottiene:

$g = \omega^2 R_T = \frac{v^2}{{R_T}^2} R_T = \frac{v^2}{R_T}$ da cui $v = \sqrt{gR_T} = \sqrt{9.8 \cdot 6.3 \cdot 10^6} m/s = 7.86 \cdot 10^3 \ m/s = 7.86 \cdot 10^3 \cdot 3.6 \ km/h \sim 28300 \ Km/h$

Esercizio 5

Una piattaforma di una giostra si muove di moto circolare non uniforme. Parte da ferma e possiede una accelerazione angolare $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 0.1\ rad/s^2$. Determinare:
a) dopo quanto tempo Δt la velocita' angolare e' pari a 0.5 $giri/s$;
b) il valore del modulo dell'accelerazione di un punto che si trova alla distanza di R=5m dal centro della giostra.

Soluzione:

Consideriamo il moto circolare di un punto solidale con la giostra e posto ad una distanza R=5m dal centro.

a)
$\alpha(t) = \alpha = cost.$ $\qquad\qquad$ $\omega(t) = \omega(0) + \alpha(t-0) = \alpha t$

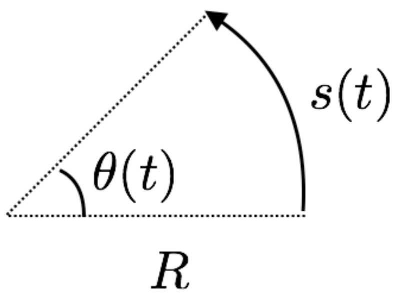
$\omega(\Delta t) = \alpha\Delta t$ $\qquad$ da cui: $\qquad$ $\Delta t = \omega(\Delta t)/\alpha = \frac{0.5\ giri/s}{0.1\ \ rad/s^2} = \frac{0.5\ 2\pi\ rad/s}{0.1\ \ rad/s^2} = 31.4\ s$

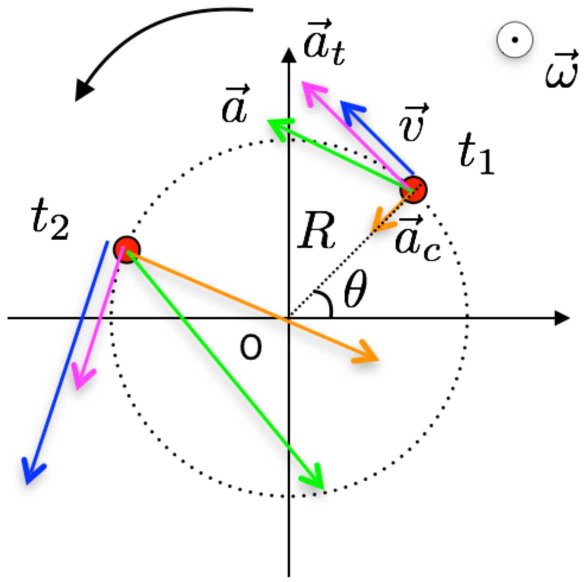
b)
L'accelerazione di un moto generico e' composta da un termine di accelerazione tangenziale ($\overrightarrow{a_t}$) ed un termine di accelerazione centripeta ($\overrightarrow{a_c}$).

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v \cdot \hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v \cdot \frac{d\hat{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + \vec{\omega}\times\vec{v} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_c}$ $\quad$ con

$\overrightarrow{a_t} = \frac{dv}{dt}\hat{v}$ e $\overrightarrow{a_c} = \vec{\omega}\times\vec{v}$

Il vettore $\vec{\omega}$ e' ortongonale al piano in cui il vettore $\vec{v}$ ruota (e quindi ortogonale al piano della giostra) ha direzione nel verso di colui che vede la rotazione in senso antiorario, ed il modulo e' pari alla velocita' angolare istantanea con cui il vettore $\vec{v}$ ruota. Quindi nel grafico e' un vettore uscente dal piano della giostra che individua l'asse di rotazione.
NOTA: essendo la velocita' sempre ortongale al vettore posizione del punto materiale, la velocita' angolare con cui ruota il vettore velocita' e' la stessa con cui ruota il vettore posizione e quindi $|\vec{\omega}| = \frac{d\theta}{dt}$.





In un moto circolare generico l'arco di circonferenza s e' legato all'angolo θ dalla seguente relazione: $\quad s = \theta R$
Essendo R costante in un moto circolare:
$\frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt}R = \omega(t)R$
Inoltre $\frac{ds}{dt}$ e' proprio uguale al modulo della velocita' del punto materiale: $\frac{ds}{dt} = |\vec{v}| = v(t)$

Quindi in un moto circolare generico:
$v(t) = |\vec{v}| = \omega(t)R$
$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt}R = \alpha(t)R$
(NOTA: la derivata del modulo della velocita' $\frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv(t)}{dt}$ e' in generale DIVERSA dal modulo dell'accelerazione $|\vec{a}| = |\frac{d\vec{v}}{dt}|$)

Analizziamo i termini di accelerazione tangenziale e centripeta in questo problema.

Il vettore accelerazione tangenziale $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\hat{v}$
ha direzione parallela alla velocita' (e quindi tangente alla traiettoria), verso come quello di rotazione della giostra,
e modulo pari a
$|\vec{a_t}| = \frac{dv}{dt} = \alpha R$ (il modulo dell'accelerazione tangenziale e' costante in questo moto)

Il vettore accelerazione centripeta $\vec{a_c} = \vec{\omega}\times\vec{v}$
ha direzione ortogonale sia a $\vec{\omega}$ che a $\vec{v}$ e verso secondo la regola del prodotto vettoriale, ed e' quindi diretto verso il centro della circonferenza.
Il suo modulo vale:
$|\vec{a_c}| = |\vec{\omega}||\vec{v}| \cdot \sin\gamma$ (con $\gamma = \pi/2$ per costruzione del vettore $\vec{\omega}$) = $|\vec{\omega}||\vec{v}| = \omega(t)[\,\omega(t)\ \ R] = \omega(t)^2 R = (\alpha t)^2 R = \alpha^{2}\, t^2 R$
$|\vec{a_c}| = \alpha^{2}\, t^2 R$ (il modulo dell'accelerazione centripeta cresce nel tempo in questo moto)

Quindi il modulo dell'accelerazione e':
$|\vec{a_{(t)}}| = \sqrt{|\vec{a_t}|^{2} + |\vec{a_c}|^2} = \sqrt{\alpha^{2} R^2 + (\alpha^{2}\, t^2 R)^2} = \alpha R\sqrt{1+\alpha^{2} t^4}$

$|\vec{a_{(\Delta t)}}| = \alpha R\sqrt{1+\alpha^{2}\Delta t^4} = 49.3\ m/s^2 \sim 5g$