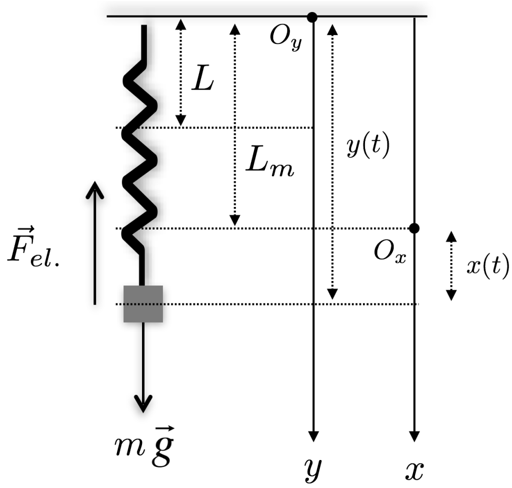
Esercizio sul moto armonico - Fisica 1

Esercizio 1

Una molla di costante elastica k=1N/cm e lunghezza a riposo L=10 cm e' appesa in verticale al soffitto come mostrato in Figura.
Determinare:
a) la lunghezza L_m di equilibrio della molla quando viene appeso all'estremita' inferiore un corpo (punto materiale) di massa m=200 g;
b) il moto del punto materiale quando esso viene lasciato libero di muoversi al tempo iniziale t=0 con velocita' iniziale nulla e lunghezza iniziale della molla pari ad L;
c) la velocita' v_m del punto materiale quando esso passa per la prima volta a distanza L_m dal soffitto, ed il tempo t_m che passa dall'istante iniziale.

Soluzione:

Si scrive l'equazione del moto del punto materiale sottoposto alla forza di gravita' ed alla forza elastica generata dalla molla. Questa si ottiene scrivendo il secondo principio della dinamica per il punto materiale in un istante generico del moto. Il sistema di riferimento O_y scelto coincide con l'asse verticale y, diretto verso il basso, ed ha origine sul soffitto dove e' fissata una delle due estremita' della molla, come indicato in Figura.



$F_y = mg - F_{el} = ma_y$
$mg - k(y - L) = m\frac{d^2y}{dt^2}$ [1]

a)

All'equilibrio:
$a_y = \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0$
$mg - k(y_{eq} - L) = 0$
$y_{eq} = L_m = \dfrac{mg}{k} + L = 0.12\ m$

b)

Equazione del moto (vedi [1] sopra):
$-ky + mg + kL = m\dfrac{d^2y}{dt^2}$

Cambio di variabile:
$-kx = -ky + mg + kL$
da cui:
$x = y - (\frac{mg}{k} + L) = y - L_m$ [2]
(equivale a scegliere un nuovo sistema di riferimento O_x il cui asse e' orientato come O_y, ma ha origine in un punto diverso posto a distanza L_m dal soffitto)

Si verifica che le derivate prima e seconda di x coincidono con quelle di y, essendo il cambio di variabile una semplice traslazione (L_m non dipende dal tempo):
$\frac{d\ x}{dt} = \frac{d\ y}{dt}$ $(v_x = v_y)$

$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2}$ $(a_x = a_y)$
L' equazione del moto in funzione della variabile x (ovvero nel sistema di riferimento O_x) e' quindi:
$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$
cioe' un moto armonico con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
La soluzione e' del tipo:
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ [3]
e quindi
$v_x(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ [4]
dove l'ampiezza A e la fase φ devono essere determinate dalle condizioni iniziali del moto (fornite dai dati del problema).

Le condizioni iniziali nella variabile y (ovvero nel sistema O_y) sono:
$y(t = 0) = L$
$v_y(t = 0) = 0$

Esse diventano in funzione della variabile x (ovvero nel sistema O_x):
[vedi la relazione [2] sopra]:
$x(t = 0) = y(t = 0) - L_m = L - L_m$
$v_x(t = 0) = v_y(t = 0) = 0$

Sostituendo nelle [3] e [4] riportate sopra si ottiene:
$x(t = 0) = A\cos(\varphi) = L - L_m$
$v_x(t = 0) = -A\omega\sin(\varphi) = 0$

Dalla seconda equazione si ricava:
$\varphi = 0$
(sono soluzione anche i multipli interi di π ma il risultato fisico non cambia essendo un moto periodico di un singolo punto materiale)
Sostituendo nella prima equazione si ottiene:
$A = L - L_m$

La soluzione per x(t) e' quindi:
$x(t) = (L - L_m)\cos(\omega t)$

La soluzione per y(t) [utilizzando la [2] sopra] diventa:
$y(t) = L_m + (L - L_m)\cos(\omega t)$

Con queste condizioni iniziale, il punto materiale esegue quindi delle oscillazioni periodiche di ampiezza pari ad $|L - L_m|$ intorno ad un punto posto a distanza L_m dal soffitto.

c)

Utilizzando l'equazione del moto
$y(t) = L_m + (L - L_m)\cos(\omega t)$
si calcola dopo quanto tempo t_m dall'istante iniziale il corpo passa la prima volta per un punto posto a distanza L_m dal soffitto.
$y(t_m) = L_m$
$L_m + (L - L_m)\cos(\omega t_m) = L_m$ --> $(L - L_m)\cos(\omega t_m) = 0$ --> $\cos(\omega t_m) = 0$
da cui:
$t_m = \pi/(2\omega) = 0.07\ s$

La velocita' e' quindi:
$v_y(t) = -(L - L_m)\omega\sin(\omega t)$
$v_y(t_m) = -(L - L_m)\omega\sin(\omega t_m) = -(L - L_m)\omega = 0.45\ m/s$ (il segno e' positivo in quando la velocita' e' orientata verso il basso, come l'asse y del sistema di riferimento).