Esercizi di riepilogo - Fisica 1

Esercizio 1

Una corpo (punto materiale) di massa $m=5Kg$ scivola lungo un piano avente un coefficiente di attrito dinamico μ_d=0.2 ed inclinato di un angolo θ=30° rispetto all'orizzontale. Nel punto A, il corpo possiede inizialmente una velocita' $v_A = 1m/s$ diretta lungo il piano inclinato (vedi Figura 1). Dopo aver percorso un tratto L=1m lungo il piano, il corpo incontra nel punto B l'estremo libero di una molla ideale di costante elastica k e la comprime. Si misura che la massima compressione della molla e' pari a Δx=20cm.

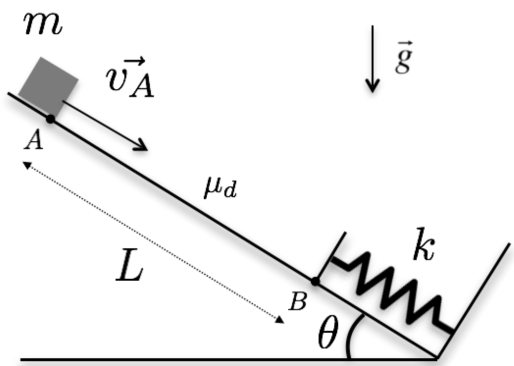
Determinare:
a) il lavoro della forza di attrito nel tratto AB di lunghezza L;
b) il modulo della velocita' del corpo nel punto B;
c) la costante elastica k della molla;
d) il tempo tra l'istante in cui il corpo passa per il punto B e l'istante in cui la molla ha raggiunto la massima compressione

[N.B. l'attrito e' presente lungo tutto il piano inclinato e quindi anche durante la fase di compressione della molla.]

Soluzione:

a)
$L_{attrito} = -|F_d| \cdot L = -\mu_d \cdot mg\cos\theta \cdot L$ = -8.5 J

(F_d = $forza\ attrito\ dinamico$)



b)
$L_{attrito} = \Delta E = E_B - E_A$
$E_B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + mgh_B$
$E_A = \frac{1}{2}mv_A{}^2 + mg(h_B + L\sin\theta)$
$v_B = \sqrt{v_A{}^2 + 2gL(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)} = 2.72\ m/s$

c)
$L_{attrito}{}' = \Delta E = E_f - E_B$

$L_{attrito}{}' = -\mu_d \cdot mg\cos\theta \cdot \Delta x$

$E_f = mgh_{min} + \frac{1}{2}k\Delta x^2$
$E_B = \frac{1}{2}mv_B{}^2 + mg(h_{min} + \Delta x\sin\theta)$

$$k = 2\frac{mg\Delta x(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_B{}^2}{\Delta x^2} = 1085\ N/m$$

d)
Per ricavare il tempo e' necessario scrivere esplicitamente l'equazione del moto del punto materiale.
Si sceglie un sistema di riferimento con origine nel punto B (posizione di equilibrio della molla) ed asse x orientato lungo il piano inclinato verso il basso. Si assume inoltre che nel punto B il tempo $t_B = 0$.
Nella fase di compressione della molla (corpo che si muove dall'alto verso il basso), in un istante generico il punto materiale occupa la posizione x che coincide con la compressione della molla rispetto alla posizione di equilibrio.

Lungo l'asse x agiscono la forza elastica, la forza di attrito dinamico e la componente lungo x della forza peso. Tenendo conto del verso dell'asse x, l'equazione del moto e' quindi:

$F_x^{tot} = ma_x$
$-kx - F_d + mg\sin\theta = m\dfrac{d^2x}{dt^2}$
dove F_d = modulo della forza di attrito dinamico = $\mu_d \cdot mg\cos\theta$

Quindi:
$-kx + mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = m\frac{d^2x}{dt^2}$ [1]

Cambio di variabile:
$-ky = -kx + mg(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$ da cui:
$y = x - \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) = x - C$
con
$C = \frac{mg}{k}(\sin\theta - \mu_d\cos\theta)$ (>0 con i dati del problema)
Inoltre:
$\frac{d\ y}{dt} = \frac{d\ x}{dt}$ e $\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$ (la velocita` e l'accelerazione non cambia passando da x a y)

L'equazione [1] espressa in funzione di y e' quella di un oscillatore armonico:
$-ky = m\frac{d^2y}{dt^2}$
la cui soluzione e':
$y(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ [2]
con pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
La velocita' e' quindi:
$v_y(t) = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$ [3]

Le condizioni iniziali del moto sono:
$y(t = t_B = 0) = x(t = t_B = 0) - C = -C$
$v_y(t = t_B = 0) = v_x(t = t_B = 0) = \mathrm{v}_B$

Sostituendo nella [2] e nella [3]
$A\cos(\varphi) = -C$
$-A\omega\sin(\varphi) = \mathrm{v}_B$
si ricavano l'ampiezza A e la fase φ:
$\tan(\varphi) = \dfrac{\mathrm{v}_B}{\omega C}$
$A = -\dfrac{C}{\cos(\varphi)} = -C\sqrt{1 + \tan^2\varphi} < 0$

La soluzione per x(t) e':
$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi) + C$

La massima compressione della molla si ha quando
$x(t_C) = \Delta x$ assume il valore massimo.
Essendo A<0, questa condizione si verifica se $\cos(\omega t_C + \varphi) = -1$

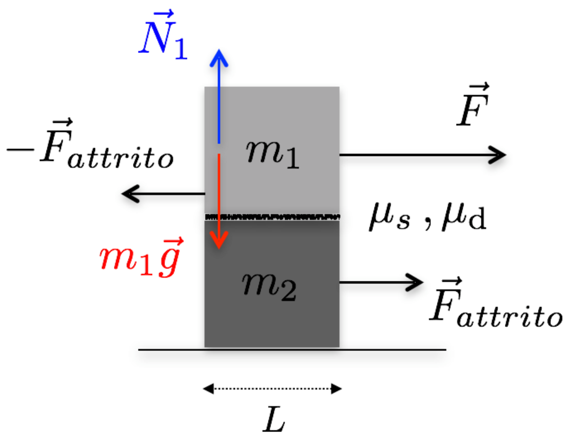
Il tempo nel punto C e quindi:
$\omega t_C + \varphi = \pi$
$\varphi = arctan(\dfrac{\mathrm{v}_B}{\omega C})$
$t_C = \frac{\pi - \varphi}{\omega}$=0.11 s

Come verifica, si puo' inoltre ricalcolare il valore della costante elastica k richiesta al punto c) a partire dall'equazione del moto.
$\Delta x = x(t_C) = -A + C$ --> $\Delta x = C\sqrt{1 + \tan^2\varphi} + C$ --> $\frac{\Delta x}{C} - 1 = \sqrt{1 + \tan^2\varphi}$
$\left(\dfrac{\Delta x}{C}\right)^2 + 1 - 2\dfrac{\Delta x}{C} = 1 + \tan^2\varphi$
$\Delta x^2 - 2\Delta x C = \left(\frac{\mathrm{v}_B}{\omega}\right)^2$ sostituendo
$k = \dfrac{2mg\Delta x(\sin\theta - \mu_d\cos\theta) + mv_B{}^2}{\Delta x^2} = 1085\ N/m$ (come ottenuto nel punto c))

Esercizio 2

Due blocchi (punti materiali) di lato L e di massa m_1 ed m_2 sono sovrapposti come mostrato in Figura. Sul corpo 1 agisce la forza costante F. Inoltre e' presente attrito tra i due corpi con coefficienti di attrito statico μ_s ed attrito dinamico μ_d , mentre non c'e' attrito tra il corpo 2 e il piano. Determinare:
a) il valore minimo del coefficiente di attrito statico $\mu_{s,min}$ tale che i due corpi si muovano in maniera solidale
Se $\mu_s < \mu_{s,min}$, determinare:
b) l'accelerazione relativa tra i due blocchi
c) il tempo necessario perche' il blocco m_1 inizi a cadere dal blocco m_2

Soluzione:



a)
Se i corpi 1 e 2 si muovono in maniera solidale allora $a_1 = a_2 = a$

$F - F_S = m_1a_1 = m_1a$ [1]
$F_S = m_2a_2 = m_2a$

dove F_S e' la forza di attrito "statico" dal momento che il corpo 1 e' fermo rispetto al corpo 2.

Dalle [1] si ricavano le due incognite a ed F_S:

$$a = \frac{F}{(m_1 + m_2)}$$

$$F_S = \frac{m_2}{(m_1 + m_2)}F$$

F_S e' dunque la forza di attrito statico necessaria per realizzare la condizione che i due corpi si muovano solidalmente.

$$F_S < F_{S,max} = \mu_s N_1 = \mu_s m_1 g$$

$$\mu_s > \mu_{s,min} = \frac{m_2}{m_1}\frac{F}{(m_1 + m_2)g}$$

b)
Se $\mu_s < \mu_{s,min}$ il corpo 1 si muove rispetto al corpo 2 con $a_1 > a_2$.
E' quindi presente una forza di attrito "dinamico" F_D tra i due corpi.
Le equazioni del moto (simili alla [1]) diventano:

$F - F_D = m_1a_1$
$F_D = m_2a_2$
con $F_D = \mu_d N_1 = \mu_d m_1 g$

da cui:

$$a_1 = \frac{F - \mu_d m_1 g}{m_1}$$

$$a_2 = \frac{\mu_d m_1 g}{m_2}$$

L'accelerazione realtiva e' :
$a_{rel} = a_1 - a_2$

c)
I due corpi eseguono moti uniformemente accelerati con accelerazioni $a_1 > a_2$.
$x_1(t) = 1/2\ a_1 t^2$
$x_2(t) = 1/2\ a_2 t^2$

Il corpo 1 inizia a cadere quando il suo centro si trova sul bordo del corpo 2, ovvero quando il corpo 1 ha percorso una distanza L/2 rispetto al corpo 2:

$$x_1(t_{caduta}) - x_2(t_{caduta}) = L/2$$

$$t_{caduta} = \sqrt{\frac{L}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{L}{a_{rel}}}$$