$$\omega_b = \sqrt{\omega^2 + \frac{2(m_s + m)g}{l\left(\frac{m_s}{3} + \frac{m}{4}\right)}} = 55{,}5 rad/s$$

Problema 5)

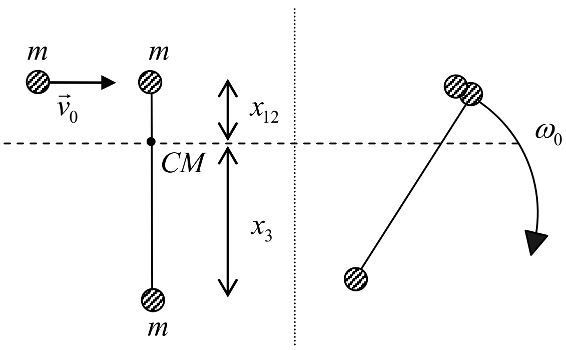
Due masse identiche, collegate da una sbarretta rigida di massa trascurabile, poggiano, in quiete, su un piano orizzontale privo di attrito. Una terza massa, identica alle prime due, scivolando sul piano con velocita' $\vec{v}_0$ ortogonale alla sbarretta, urta una delle due masse e vi resta saldata. Si calcoli la percentuale dell' energia meccanica iniziale che viene dissipata nell' urto.

Soluzione

Il sistema e' isolato ($\vec{F}_e = 0;\ \vec{M}_e = 0$) e quindi sia la quantita' di moto che il momento angolare si conservano.
La velocita' del CM e'

$$v_{CM} = \frac{v_0}{3}$$

e per la conservazione della quantita' di moto essa rimane invariata dopo l' urto.



Per il calcolo del momento angolare possiamo scegliere come polo un punto che giace sulla retta che descrive la traiettoria del CM. Le distanze delle due masse da tale polo (e dunque dal CM) proiettate nella direzione ortogonale al vettore $\vec{v}_0$ sono

$$x_{12} = \frac{l}{3}; \qquad x_3 = \frac{2l}{3}$$

Se dunque imponiamo la conservazione del momento angolare otteniamo

$$p_i = mv_0 \frac{l}{3}$$

$$p_f = I\omega = \left[2m\left(\frac{l}{3}\right)^2 + m\left(\frac{2l}{3}\right)^2\right]\omega = \frac{2}{3}ml^2\omega$$

$$p_i = p_f \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \frac{v_0}{2l}$$

Calcoliamo ora l' energia cinetica prima e dopo l' urto.

$$T_i = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2}$$

$$T_f = T_{rot} + T_{CM} = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} 3 m v_{CM}^{\ 2} = \frac{1}{2}\frac{2}{3} m l^2 \frac{v_0^{\ 2}}{4l^2} + \frac{1}{2} 3m \frac{v_0^{\ 2}}{9} = \frac{1}{2} m v_0^{\ 2}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2} T_i$$

Dunque l' energia cinetica si dimezza.
E' interessante notare come l' energia cinetica rotazionale dipende da dove la massa colpisce la sbarretta, mentre la velocita' del CM (come e' ovvio) no. Infatti, se ad esempio colpiamo la sbarretta nel CM, allora non vi sara' alcuna rotazione (il momento angolare era nullo prima dell' urto).