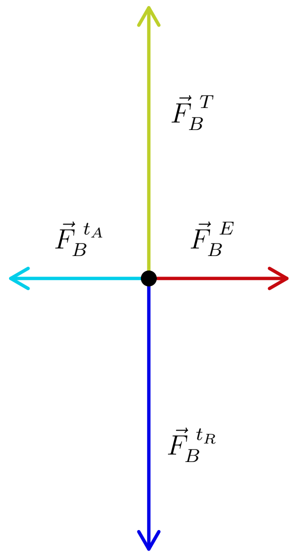

Figura 2.15: Bilancio delle forze sulla bottiglia, assimilata ad un punto materiale. [Nota: per un problema tecnico nella figura sono sparite le parentesi e, ad esempio, $\vec{F}_B^{(T)}$ è diventato $\vec{F}_B^T$, e così via.]

- la forza peso *sulla* bottiglia dovuta alla Terra e indicata in figura con $\vec{F}_B^{(T)}$ è bilanciata dalla forza di *reazione vincolare* del tavolo *sulla* bottiglia ($\vec{F}_B^{(t_R)}$);
- similmente, la forza dell'elastico, verso destra e indicata con $\vec{F}_B^{(E)}$ è bilanciata dalla forza di attrito che il tavolo esercita sulla bottiglia ($\vec{F}_B^{(t_A)}$).

Ben altra è l'analisi delle reazioni a ciascuna forza, per le quali, come abbiamo imparato, è sufficiente scrivere:

$$\vec{F}_T^{(B)} = -\vec{F}_B^{(T)} \tag{2.90}$$
$$\vec{F}_{t_R}^{(B)} = -\vec{F}_B^{(t_R)} \tag{2.91}$$
$$\vec{F}_E^{(B)} = -\vec{F}_B^{(E)} \tag{2.92}$$
$$\vec{F}_{t_A}^{(B)} = -\vec{F}_B^{(t_A)}\,.. \tag{2.93}$$

2.8 Secondo e terzo principio rivisti

Dopo aver detto più volte che la notazione $\vec{a} = \vec{F}/m$ è più istruttiva di $\vec{F} = m\,\vec{a}$, andiamo a vedere come Newton aveva formulato la seconda legge della meccanica facendo ricorso direttamente all'originale in latino

> *Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, & fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur:*

la variazione del moto *è proporzionale alla forza motrice esercitata e avviene lungo una line retta secondo la quale tale forza è esercitata*. Come si vede chiaramente, Newton non usa nessuna delle due formulazioni. Parla invece di *moto*. Ma con questo termine non intendeva, come intendiamo noi, qualcosa di generico e di qualitativo. Si riferiva invece a qualcosa di quantificabile, sia in 'grandezza' (visto che doveva essere proporzionale alla forza) che in direzione e verso. Mentre, come ripetuto più volte, molti concetti fisici, come velocità, accelerazione e forza, hanno un corrispondente omonimo nella vita quotidiana, il *motus* di Newton non ce l'ha. Si pensi a domande del tipo "quanto moto possiede un'auto in corsa"? Qualcuno dice che un treno ha una "grande forza" (una "grande forza distruttrice", cantava Guccini ne *La locomitiva*, 'forza' confrontata alla "stessa forza della dinamite"). Oppure, si dice che quando un sasso cade da molto in alto "è come se pesasse cento chili". Insomma, mancando nel linguaggio comune un termine che quantifichi il moto (nel senso newtoniano), per rendere l'idea che un moscerino ha meno 'moto' di un autotreno si fa ricorso, impropriamente, a forza o massa (o eventualmente forza peso).

2.8.1 Quantità di moto di un corpo e impulso di una forza

Newton precisa chiaramente cosa intende per 'motus': è la massa per la velocità e ha quindi direzione e verso della velocità. È quella che in Fisica si chiama la *quantità di moto*, anche se in genere non si sta tanto a pensare tanto al vero significato del nome.[31] Essa è indicata usualmente con il simbolo $\vec{p}$ ed è quindi *definita* come

$$\vec{p} \;=\; m\,\vec{v}\,. \tag{2.94}$$

Quindi il significato di questa espressione è ancora diverso da $F = m\,g$ (che fornisce il valore della forza su m dovuta alla Terra, di massa M_T e raggio R_T – grandezze riassunte nella costante g: insomma F è *effetto* dell'interazione fra M_T e m) e da $a = F/m$ (l'accelerazione è l'*effetto* di F che agisce su m). La 2.94 non è una legge, nel senso che non 'collega' niente. È semplicemente una definizione.

La seconda legge del modo come formulata da Newton è che la quantità di moto $\vec{p}$ varia proporzionalmente alla forza applicata e il fattore di proporzionalità, viene poi chiarito, è pari al tempo durante in quale la forza agisce. In caso di una forza costante durante il tempo Δt abbiamo quindi[32]

$$\Delta\vec{p} \;=\; \vec{F}\times\Delta t\,. \tag{2.95}$$

La variazione di quantità di moto è pari alla forza totale applicata per il tempo durante la quale essa agisce. Ricordiamo che $\Delta\vec{p}$ su un intervallo di tempo Δt vale per definizione

$$\Delta\vec{p} \;=\; \vec{p}(t+\Delta t)-\vec{p}(t) \tag{2.96}$$

e quindi la (2.95) può essere riscritta, con identico sognificato, come

$$\vec{p}(t+\Delta t) \;=\; \vec{p}(t)+\vec{F}\times\Delta t\,, \tag{2.97}$$

ovvero, se indichiamo, come si fa spesso, t_1 e t_2 i due tempi che differiscono di Δt (ovvero tali che $t_2 - t_1 = \Delta t$), possiamo riscrivere questa legge come

$$\vec{p}(t_2) \;=\; \vec{p}(t_1)+\vec{F}\times(t_2-t_1)\,, \tag{2.98}$$

[31] Anche se qui non rende l'idea, diciamo che che l'espressione viene detta sbrigativamente *quantitàdimoto*, quasi come un sostantivo a se stante, invece di staccare le parole ad indicare "quanto moto ha un oggetto".

[32] Ricordiamo che si tratta sempre di risultante di forze, anche se la indichiamo semplicemente con $\vec{F}$, invece di $\vec{F}_t$, per non appesantire la notazione.

Un altro modo di esprimere lo stesso concetto è di dire che la quantità di moto cambia perché la forza trasmette un *impulso* al corpo, ove l'impulso è definito proprio dal prodotto $\vec{F} \times \Delta t$.

Vediamo ora cosa succede se la forza varia con il tempo. Procedendo come al solito per gradi, immaginiamo che la forza resti costante, e pari a $\vec{F}_i$, per ciascun intervallo di tempo Δt_i. L'impulso totale della forza sarà quindi pari alla somma degli impulsi in ciascun intervallo Δt_i, e ciascun impulso produrrà una variazione di quantità di moto $\Delta\vec{p}_i$. La variazione totale di quantità di moto sarà quindi data da

$$\Delta\vec{p} = \sum_i \Delta\vec{p}_i \quad = \quad \sum_i \vec{F}_i \times \Delta t_i\,. \tag{2.99}$$

In altre parole la *variazione totale della quantità di moto di un punto materiale è pari all'impulso totale ricevuto*.

Quando la forza totale varia nel tempo in continuazione basta considerare intervallini di tempo molto piccoli e quindi, come abbiamo visto nel primo capitolo per il calcolo dei volumi, la somma di infiniti termini infinitesimi diventa tecnicamente un integrale. Scriveremo quindi

$$\Delta\vec{p}\big|_{t_1}^{t_2} \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt\ : \tag{2.100}$$

la variazione di quantità di moto fra gli istanti t_1 e t_2 è pari all'impulso totale della forza in tale intervallo, espressione che, ripetiamo, deve esser intesa come

$$\vec{p}(t_2) \quad = \quad \vec{p}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)\,dt\,, \tag{2.101}$$

in quanto $\Delta\vec{p}\big|_{t_1}^{t_2}$ significa esattamente $\vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1)$. Ricordiamo infine che trattandosi di equazioni vettoriali esse rappresentano tre equazioni, una per asse cartesiano. Avremo quindi

$$\Delta p_x\big|_{t_1}^{t_2} \quad = \quad \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\,dt \tag{2.102}$$

$$p_x(t_2) \quad = \quad p_x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F_x(t)\,dt\,, \tag{2.103}$$

e così via per le eventuali componenti y e z.

2.8.2 Equivalenza delle due formulazioni

Ovviamente, se oggigiorno chiamamo $\vec{a} = \vec{F}/m$ "seconda legge di Newton" vuol dire che tale lettura è equivalente alla formulazione originale. In effetti, dalla (2.95) segue

$$\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} \quad = \quad \vec{F} \tag{2.104}$$

e questa relazione può essere estesa ad una variazione istantanea con il solito procedimento di limite per $\Delta t \to 0$. Quindi, in definitiva:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} \quad = \quad \vec{F}\,. \tag{2.105}$$

Facciamo ora l'esercizio di sostituire nella (2.105) la definizione di quantità di moto e procedere con qualche passaggio matematico. Assumendo che la massa dell'oggetto non vari nel tempo abbiamo

$$\frac{d\,(m\vec{v})}{dt} = \vec{F} \tag{2.106}$$

$$m\,\frac{d\,\vec{v}}{dt} = \vec{F} \tag{2.107}$$

$$m\,\vec{a} = \vec{F}\,. \tag{2.108}$$

Si capisce quindi che in normali sistemi 'classici' in cui le variabili in gioco (e quelle meglio percepite dalla mente umana!) sono le forze, le masse e le velocità (con le loro variazioni), dire semplicemente che l'accelerazione è pari alla forza diviso la massa ha un significato immediato ed è più comoda per applicazioni pratiche. Ed è in genere così che la useremo anche noi, Ma vale la pena di accennare al fatto che *la (2.105) ha una validità molto più generale, anche in fisica moderna* (previa una correzione alla definizione della quantità di moto apportata dalla teoria della reletività ristretta di Einstein – ma qui siamo decisamente fuori tema rispetto agli obiettivi di questo corso introduttivo).

2.8.3 Terzo principio e conservazione della quantità di moto

Facciamo ora l'esercizio di rileggere il terzo principio alla luce della relazione che lega la variazione di quantità di moto all'impulso della forza.

Immaginiamo un 'universo' costituito da due soli corpi interagenti fra di loro, ovvero formanti quello che si dice un *sistema isolato*. Ad esempio potrebbero essere Terra e Luna se non ci fosse nient'altro intorno, oppure se tutti gli altri corpi celesti fossero talmente lontani da poter trascurare la loro interazione con gli oggetti del sistema isolato.

Il principio di azione e reazione ci dice, se indichiamo con A e B i due oggetti, che $\vec{F}_A^B = -\vec{F}_B^A$. Comunque complicate siano le espressioni delle forze e le loro eventuali variazioni in funzione della posizione relativa ed eventualmente dal tempo, fintanto che vale il terzo principio esse saranno *istante per istante uguali e opposte*. Ne segue che anche gli impulsi sui corpi A e B saranno uguali e opposti, qualunque sia la durata dell'interazione. Ne segue quindi:

$$\Delta\vec{p}_A = -\Delta\vec{p}_B\,: \tag{2.109}$$

se due oggetti A e B formano un sistema isolato ad ogni variazione di quantità di moto dell'oggetto A segue una variazione di quantità di moto uguale e contraria dell'oggetto B. Un altro modo di esprimere lo stesso concetto è riscrivendo la (2.109) come

$$\Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0\,, \tag{2.110}$$

ovvero

$$\Delta(\vec{p}_A + \vec{p}_B) = 0\,: \tag{2.111}$$

la quantità di moto totale di due corpi che costituiscono un sistema isolato si conserva.

Senza entrare nei dettagli non si fa fatica a capire come il ragionamento possa esssere esteso un sistema isolato costituito da tanti oggetti. Poiché questa legge vale per ciascuna possibile coppia e quindi vale per l'insieme degli oggetti, ovvero

$$\Delta\sum_i \vec{p}_i = 0 \qquad \text{(sistema isolato)}\,, \tag{2.112}$$

Figura 2.16: Getti di gas ad alta velocità usati per variare la quantità di moto di un corpo nello spazio (immagine da `http://phys.org/news/2012-03-lunar-lander-touchdown.html`).

che possiamo scrivere come

$$\sum_i \vec{p}_i \;=\; \text{costante} \qquad \text{(sistema isolato)} \;: \tag{2.113}$$

in un sistema isolato si conserva la quantità di moto totale, essendo questa pari alla somma di tutte le quantità di moto degli 'oggetti' del sistema. Questa è una delle più importanti *leggi di conservazione* della Fisica, della quale vedremo nel seguito delle applicazioni. Come abbiamo dimostrato, è una consequenza diretta del principio di azione e reazione. La sua utilità consiste nel fatto che mentre è difficile – talvolta impossibile – fare il bilancio delle forze durante le interazioni, l'analisi delle quantità di moto in gioco, ad esempio prima e dopo l'interazione, è in genere molto più semplice e permette di fare semplici previsioni sul risultato di interazioni.

Un esempio pratico di applicazione è mostrato in figura 2.16. I getti di gas ad alta velocità causano una variazione di quantità del moto nel verso opposto. Questa tecnica è usata ad esempio nella fase di 'allunaggio' delle navicelle spaziali in quanto, in mancanza di aria, non sono utilizzabili né paracaduti né motori ad elica.

Un classico problemino

Sull'uso della conservazione della quantità di moto torneremo ne seguito. Ecco un primissimo esercizio che ci mostra la sua potenza nel calcolare la velocità raggiunta da un oggetto senza conoscere i dettagli della forza agente. Un cannoncino giocattolo è poggiato su un piano che può essere considerato virtualmente privo di attrito. In cannoncino spara orizzontalmente un proiettile di 10 g ad una velocita di 20 m/s. Determinare la velocità del cannoncino dopo lo sparo, sapendo che la sua massa è pari a 400 g.

Siccome nello sparo i corpi coinvolti sono soltanto cannoncino e proiettile, si conserva la quantità di moto totale durante lo sparo, ovvero, con ovvia notazione

$$\vec{p}_P + \vec{p}_C \;=\; 0\,, \tag{2.114}$$

in quanto inizialmente i due oggetti erano fermi. Ne segue, indicando con $t = 0$ l'istante di separazione,

$$\begin{aligned}
\vec{p}_C(t=0) &= -\vec{p}_P(t=0) && (2.115)\\
m_C \cdot \vec{v}_C(t=0) &= -m_P \cdot \vec{v}_P(t=0) && (2.116)\\
\vec{v}_C(t=0) &= -\frac{m_P}{m_C} \times \vec{v}_P(t=0)\;: && (2.117)
\end{aligned}$$

i dati del problema ci permettono quindi di calcolare che il cannoncino 'rincula' con una velocità pari a 1/40 di quella del proiettile, ovvero a 0.5 m/s nel verso opposto.

Per tempi successivi il cannoncino scorre sul tavolo a velocità costante (per l'ipotesi di piano orizzontale senza attrito), mentre il proiettile sarà soggetto alla forza peso ed eventualmente a quella di resistenza dell'aria, ma non più alla forza del cannoncino e quindi $\vec{p}_P$ e $\vec{p}_C$ smetteranno di essere legati fra di loro. In particolare, sotto le ipotesi del problema e trascurando la resistenza dell'aria (e fino ad eventuali urti successivi) avremo:

$$\begin{aligned}
\vec{p}_C(t) &= \vec{p}_C(t=0) && (2.118)\\
\vec{p}_P(t) &= \vec{p}_P(t=0) + \vec{F}_{peso}\,t && (2.119)
\end{aligned}$$

2.8.4 Forza $\times$ spostamento e variazione di $mv^2/2$

Riprendiamo le formule che esprimono lo spazio percorso e la variazione di velocità di un oggetto ad accelerazione. Ad esempio, limitatamente all'asse x abbiamo

$$\begin{aligned}
v_x &= a_x\,t && (2.120)\\
x &= \frac{1}{2}\,a_x\,t^2\,. && (2.121)
\end{aligned}$$

Dalla prima equazione ci possiamo ricavare il tempo al quale è stata raggiunta una certa velocità, $t = v_x/a_x$, che sostituito nella seconda ci dà la seguente relazione fra spazio percorso e variazione di velocità

$$x \;=\; \frac{1}{2}a_x\,\frac{v_x^2}{a_x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{v_x^2}{a_x}\,, \tag{2.122}$$

da cui segue

$$a_x\,x \;=\; \frac{1}{2}\,v_x^2\,. \tag{2.123}$$

In particolare, per x_1 e x_2 abbiamo

$$\begin{aligned}
a_x\,x_1 &= \frac{1}{2}\,v_{x_1}^2 && (2.124)\\
a_x\,x_2 &= \frac{1}{2}\,v_{x_2}^2\,, && (2.125)
\end{aligned}$$

ovvero

$$a_x\,\Delta x \;=\; \Delta\left(\frac{1}{2}\,v_x^2\right): \tag{2.126}$$

il prodotto di accelerazione per spostamento lungo la x è pari alla variazione della metà del quadrato della velocità lungo lo stesso asse. In particolare, si può mostrare facilmente come tale variazione sia positiva o negativa a seconda che il prodotto $a_x\,\Delta x$ sia positivo o negativo, ovvero che accelerazione e variazione di posizione siano dello stesso segno o di segno opposto.

Relazioni analoghe valgono per i prodotti $a_y\,\Delta y$ e $a_z\,\Delta z$. Se sommiamo i tre contibuti otteniamo

$$a_x\,\Delta x + a_y\,\Delta y + a_z\,\Delta z \;=\; \Delta\left(\frac{1}{2}\,v_x^2\right) + \Delta\left(\frac{1}{2}\,v_y^2\right) + \Delta\left(\frac{1}{2}\,v_z^2\right) \tag{2.127}$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{2}\,v_x^2 + \frac{1}{2}\,v_y^2 + \frac{1}{2}\,v_z^2\right) \tag{2.128}$$

$$= \Delta\left(\frac{1}{2}v^2\right)\,. \tag{2.129}$$

La somma dei prodotti di accelerazione per spostamento è pari alla variazione della metà del quadrato della velocità.

Inoltre, con ragionamenti analoghi a quelli eseguiti precedentemente per le variazioni di quantità di moto abbiamo che, in generale, se in diversi tratti Δx_i l'accelerazione vale $a_{x_i}\,\Delta x_i$, la variazione totale di $v_x^2/2$ sarà data da

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\,v_x^2\right) \;=\; \sum_i a_{x_i}\,\Delta x_i \tag{2.130}$$

la quale può essere estesa al solito modo quando a_x cambia con continuità in funzione di x:

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\,v_x^2\right)\Bigg|_{x_1}^{x_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} a_x(x)\,dx. \tag{2.131}$$

Quindi, usando la notazione integrale come quella più generale e ricordando il passaggio dalla (2.128) alla (2.129), possiamo scrivere

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\,v^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} a_x(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} a_y(y)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} a_z(z)\,dz\,, \tag{2.132}$$

ove P_1 e P_2 rappresentano il punto iniziale e finale: la variazione del semiquadrato della velocità è pari alla somma degli integrali di accelerazione per spostamento lungo ciascun asse. Da essa, moltiplicando entrambi i membri per la massa della particella soggetta all'accelerazione otteniamo una analoga formula che lega la variazione di $1/2\,mv^2$ alla somma degli integrali della forza per lo spostamento lungo ciascun asse:

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right)\Bigg|_{P_1}^{P_2} \;=\; \int_{x_1}^{x_2} m\,a_x(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} m\,a_y(y)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} m\,a_z(z)\,dz \tag{2.133}$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} F_x(x)\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y(y)\,dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z(z)\,dz\,, \tag{2.134}$$

alla quale daremo un significato nel seguito. Diamo comunque un semplice (e classico) esempio unidimensionale in due varianti.

Corpo lanciato verso l'alto con velocità iniziale v_0

Dal momento in cui l'oggetto viene lanciato a quando si ferma, all'altezza h rispetto alla quota di partenza, la variazione di $mv^2/2$ vale

$$\Delta\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right)\Big|_0^h = 0 - \frac{1}{2}m\,v_0^2\,. \tag{2.135}$$

Nello stesso tratto l'integrale $\int_{z_1}^{z_2} F_z(z)\,dz$ vale

$$\int_0^h(-mg)\,dz \quad = \quad -mgh \tag{2.136}$$

Uguagliando i due termini otteniamo quindi

$$-\frac{1}{2}m\,v_0^2 \quad = \quad -mgh\,, \tag{2.137}$$

dalla quale si trova la quota h raggiunta:

$$h \quad = \quad \frac{v_0^2}{2g}\,. \tag{2.138}$$

Corpo cade di un tratto h

Facciamo ora il caso in cui un oggetto, sottoposto alla sola forza di gravità, cada da un'altezza h. Come si capisce bene, il problema è esattamente l'inverso di quello precedente[33] e la velocità finale raggiunta vale $\sqrt{2gh}$. Naturalmente in questi esempi elementari le cose sono talmente banali per cui non si vede alcun vantaggio di usare le relazioni che abbiamo trovato. Vedremo invece casi nei quali il calcolo di questi integrali è molto più facile del dettaglio della cinematica.

2.9 Pressione

2.10 Forza e pressione

Come abbiamo fatto per la forza, colleghiamo anche la pressione a sensazioni fisiologiche anche se la cosa non è semplice in quanto il nostro corpo è sensibile sia alla forza totale applicata che

[33]Nei dettagli, con $z_1 = h$ e $z_2 = 0$ e con la forza di gravità rivolta verso il basso,

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - 0 \quad = \quad (-mg)\times(0-h)\,,$$

da cui

$$\frac{1}{2}\,mv^2 \quad = \quad mgh\,.$$

Naturalmente, si poteva pensare l'asse z rivolto verso il basso, con $z_1 = 0$ e $z_2 = h$. Ma in questo caso la forza di gravità sarebbe risultata positiva e avremmo quindi avuto

$$\frac{1}{2}\,mv^2 - 0 \quad = \quad (mg)\times(h-0)\,,$$

che porta allo stesso risultato.