G. D'Agostini

Oscillatore smorzato e RCL impulsato

(Appunti dal Corso di Fisica per Informatici)

0.1

Oscillazioni smorzate

Equazioni del moto di corpo soggetto a forza elastica e forza di viscosità $-\beta\vec{v}$ (caso unidimensionale):

$$F = -k\,x - \beta\,v \tag{1}$$

$$m\,a = -k\,x - \beta\,v\,, \tag{2}$$

ovvero

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x = 0\,, \tag{5}$$

con $\gamma = \beta/m$ e $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, entrambe aventi le dimensioni dell'inverso del tempo. Il caso con $\beta = 0$, ovvero $\gamma = 0$ si riduce all'oscillatore armonico. $\beta \neq 0$ introduce lo smorzamento, come mostrato nell'esperienza in aula (moto della molla).

0.2

Introduzione (empirica) all'induttanza, come elemento del circuito ai capi del quale c'è una differenza di potenziale proporzionale alla variazione nel tempo della corrente, con coefficiente di proporzionalità L

$$F_L = -L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,. \tag{6}$$

Si può verificare che le dimensioni di L sono quelle di $\Omega\cdot$ s [$L = -F_L/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) \rightarrow$ V/(A/s) $\rightarrow \Omega\cdot$ s]. La sua unità di misura è l'Henry (H): $1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega \times 1\,\mathrm{s}$.

0.3

Effetto nel circuito di (auto-)induttanza, con introduzione qualitativa (l'induzione magnetica vera e propria non fa parte del corso):

- Corrente I che percorre una 'bobina': $\rightarrow$ campo magnetico.
  Esempio: elettromagnete, come quelli negli altoparlanti (segnale musicale $\rightarrow$ corrente $I(t)$ all'uscita dell'amplificatore $\rightarrow$ campo magnetico $B(t)$ modulato dal segnale musicale $\rightarrow$ magnete permanente immerso in $B(t)$ e solidale con la membrana dell'altoparlante $\rightarrow$ oscillazione membrana $\rightarrow$ suono).

- Se I cambia con il tempo: $\rightarrow$ forza elettromotrice indotta ai capi della bobina $-\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. Il segno meno ha il seguente significato: se la corrente scorre dal capo A al capo B dell'induttore (la bobina) e cresce (ovvero $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la forza elettromotrice indotta è tale che $V(A) < V(B)$; viceversa se la corrente diminuisce.

- La forza elettromostrice indotta è "tale da opporsi alla causa che l'ha generata": se I sta scorrendo da A a B ed aumenta, la forza elettromotrice indotta tende a ridurla.

Siamo interessati a studiare l'effetto di L sul circuito dalla sola conoscenza della (6). Ad esempio, vediamo come cambia la legge di scarica del condensatore se aggiungiamo anche una induttanza in serie a C ed R. Scegliendo il verso positivo della corrente quello che carica il condensatore, ovvero quello per cui $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = I$, abbiamo la seguente somma di differenze di potenziale sui vari elementi del circuito:

$$\Delta V_C + \Delta V_R + \Delta V_L = 0 \tag{7}$$

$$-V_C - R\,I - L\,\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{8}$$

$$-\frac{Q}{C} - R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} - L\,\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} = 0 \tag{9}$$

$$L\,\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + R\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{Q}{C} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q = 0 \tag{12}$$

(ove $\gamma = R/L$ e $\omega_0^2 = 1/LC$), formalmente uguale alla (5) e quindi avente analoga soluzione.

0.4

In entrambi i casi siamo quindi interessati a risolvere la generica equazione differenziale, scritta nella generica variabile z

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 z = 0 \tag{13}$$

Prima di risolvere questa equazione differenziale, analizziamo l'analogia fra i due problemi fisici, in particolare confrontando la (10) con la (3). In un caso siamo interessati alla variazione nel tempo della posizione $x(t)$, rispetto a quella di equilibrio, di punto materiale legato all'estremo di una molla. Nell'altro alla carica $Q(t)$ depositata su un'armatura del condensatore. Nel caso meccanico la derivata rispetto al tempo della quantità di interesse rappresenta la velocità, nel caso elettrico la corrente elettrica. Inoltre:

- $\beta\, v$ rappresenta la forza di attrito di viscosità, ovvero il termine che 'brucia' energia, nel senso che se $\beta = 0$ il sistema conserva l'energia meccanica, ovvero la (3) si riduce ad un oscillatore armonico ideale.

- L'equivalente elettrico di β è la resistenza R, la quale consuma energia per effetto Joule. Si evince quindi che un *ideale circuito* (resistenze nei circuiti, benché minime, sono inevitabili, così come inevitabili sono gli attriti nei sistemi meccanici) avente solo C ed L (ovvero quello che si chiama un circuito 'LC', mentre il circuito con $R \neq 0$ si chiama genericamente 'RLC', o 'RCL') si comporterebbe come un oscillatore armonico nella variabile $Q(t)$, con l'energia che viene 'palleggiata' fra condensatore e induttanza, con periodo $2\pi/\omega_0$. Conosciamo bene il caso meccanico. Scriviamo le espressioni di $Q(t)$ e $I(t)$:

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t) \tag{14}$$
$$I(t) = -Q_0\, \omega_0 \sin(\omega_0 t) \ : \tag{15}$$

  - inizialmente il condensatore comincia a scaricarsi e circola una corrente negativa, inizialmente nulla e che cresce in modulo con il tempo, la quale produce un campo magnetico nella bobina;

- dopo un quarto di periodo (ovvero quando $\omega_0\, t = \pi/2$) il condensatore si è completamente scaricato e la corrente è massima in modulo (è minima, se si considera anche il segno);
- per t immediatamente maggiore di $T/4$ la corrente ricarica il condensatore, ma con polarità opposta (cariche positive cominciano ad arrivare sull'armatura inizialmene negativa), la corrente decresce in modulo e per $T/2$ il condensatore è di nuovo carico, con $Q(T/2) = -Q(0)$;
- poi tutto procede a ritroso, al tempo T il sistema ritorna esattamente nello stato iniziale e il moto si ripete all'infinito.

Si noti come varia l'energia del condensatore nel tempo. In particolare per $t = 0,\ \pi,\ \ldots$ è pari all'energia iniziale $1/2\, C\, V_{C_0}^2$, mentre per $t = \pi/2,\ 3/2\pi,\ \ldots$ essa è nulla: l'energia mancante è da ricercare nell'energia associata ad L (energia del campo magnetico).

- L è l'analogo della massa (inerziale) m in quanto si oppone alla variazione di I.

- Infine l'analogo della costante elastica k della molla è $1/C$: come una molla più è lontana dalla posizione di equilibrio e più è difficile tirarla/comprimerla ancora, così un condensatore più è carico e più è difficile caricarlo ulteriormente [in quanto il lavoro da compiere per aggiungere $\mathrm{d}Q$ è pari a $(Q/C)\,\mathrm{d}Q$]. Questo spiega anche perché l'equivalente della costante elastica è $1/C$: minore è C, maggiore è la tensione ai capi del condensatore a parità di carica applicata e quindi più difficile è caricarlo.

Possiamo finalmente scrivere la seguente tabella di analogie:

$$x \leftrightarrow Q \tag{16}$$
$$v \leftrightarrow I \tag{17}$$
$$a \leftrightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \tag{18}$$
$$m \leftrightarrow L \tag{19}$$
$$k \leftrightarrow \frac{1}{C} \tag{20}$$
$$\beta \leftrightarrow R \tag{21}$$
$$\frac{1}{2}\, m\, v^2 \leftrightarrow \frac{1}{2}\, L\, I^2 \tag{22}$$

$$\frac{1}{2}\,k\,x^2 \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\,\frac{1}{C}\,Q^2 \tag{23}$$

$$\beta\,v^2 \quad \leftrightarrow \quad R\,I^2 \tag{24}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{L\,C}} \tag{25}$$

nella quale si è introdotta l'energia $1/2\,L\,I^2$ associata ad L.

Se β, o rispettivamente R, è diverso da zero, l'oscillazione è smorzata, in quanto ogni volta che la velocità, o rispettivamente la corrente, è diversa da zero viene dissipata energia con una potenza pari a $\beta\,v^2$, ovvero $R\,I^2$.

0.5

Per quanto riguarda la **soluzione della (13)**, ricordiamo che il procedimento è quello di partire da una soluzione di prova complessa (la cui parte reale costituisce la soluzione fisica) del tipo

$$z(t) \quad = \quad k\,e^{\alpha\,t}\,, \tag{26}$$

la quale, inserita nella (13) dà luogo a

$$\alpha^2\,k\,e^{\alpha\,t} + \gamma\,\alpha\,k\,e^{\alpha\,t} + \omega^2\,k\,e^{\alpha\,t} \quad = \quad 0 \tag{27}$$

da cui segue l'*equazione algebrica associata*

$$\alpha^2 + \gamma\,\alpha + \omega^2 \quad = \quad 0 \tag{28}$$

le cui soluzioni sono

$$\alpha_{1,2} \quad = \quad -\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\,. \tag{29}$$

Essendo sia α_1 che α_2 soluzione della (13), la soluzione generale è data da

$$z(t) \quad = \quad k_1\,e^{\alpha_1\,t} + k_2\,e^{\alpha_2\,t}\,. \tag{30}$$

Il tipo di soluzioni dipende dal segno del discriminante $(\gamma/2)^2 - \omega_0^2$:

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ reali negative: caso 'sovrasmorzato'} \tag{31}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 \text{ e } \alpha_2 \text{ complesse coniugate: caso 'sottosmorzato'} \tag{32}$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 \text{ (reale negativa): caso 'critico'}\,. \tag{33}$$

0.6

Soluzione dell'oscillatore smorzato, sia meccanico che elettrico, con le **condizioni iniziali**

$$z(0) = z_0 \tag{34}$$
$$\dot{z}(0) = 0\,, \tag{35}$$

ovvero: allungamento iniziale della molla e velocità nulla nel caso meccanico; carica iniziale del condensatore e corrente nulla nel caso elettrico. Le due condizioni danno:

$$k_1 + k_2 = z_0 \tag{36}$$
$$\alpha_1\, k_1 + \alpha_2\, k_2 = 0 \tag{37}$$

da cui

$$k_1 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, z_0 \tag{38}$$
$$k_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, z_0\,. \tag{39}$$

Nota: α_1 e α_2 dipendono dai parametri del sistema; K_1 e K_2 dalle condizioni iniziali e dai parametri del sistema.

0.7

Vediamo i due casi più interessanti (trattando, successivamente, il caso critico come caso limite di quello sottosmorzato):

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 > 0}$ α_1 e α_2 valgono

$$\alpha_1 = -\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \tag{40}$$
$$\alpha_2 = -\frac{\gamma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2} = -\left[\frac{\gamma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2}\right] \tag{41}$$

Esse sono state riscritte in modo tale da mettere in evidenza che sono entrambe negative e $\alpha_2 < \alpha_1$ (ovvero $|\alpha_1| < |\alpha_2|$). Esse hanno dimensioni

inverse del tempo. È quindi opportuno introdurre le grandezze positive e aventi le dimensioni del tempo $\tau_1 = -1/\alpha_1$ e $\tau_2 = -1/\alpha_2$, con $\tau_1 > \tau_2$.

Possiamo riscrivere quindi la soluzione come

$$\begin{aligned} z(t) &= k_1\, e^{\alpha_1\, t} + k_2\, e^{\alpha_2\, t} && (42)\\ &= z_0 \left[\frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}\, e^{\alpha_1\, t} + \frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\, e^{\alpha_2\, t} \right] && (43)\\ &= z_0 \left[\frac{\tau_1}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_1} - \frac{\tau_2}{\tau_1 - \tau_2}\, e^{-t/\tau_2} \right] , && (44) \end{aligned}$$

ove k_1 e k_2 sono state riscritte come $k_1 = \tau_1/(\tau_1 - \tau_2)$ e $k_2 = -\tau_2/(\tau_1 - \tau)$ al fine di mettere in evidenza $k_1 > 0$ e $k_2 < 0$, ed inoltre $k_1 > |k_2|$. Il fatto che i due esponenziale abbiano coefficienti di segno opposto è importante per riprodurre $\dot{z}(0) = 0$. Ma l'esponenziale con $k_2 < 0$ si estingue rapidamente e, dopo alcuni τ_2, prevale l'esponenziale con $k_1 > 0$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 < 0}$ Introducendo

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - (\gamma/2)^2 > 0\,, \qquad (45)$$

indichiamo le due soluzioni con

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1 && (46)\\ \alpha_2 &= -\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1\,, && (47) \end{aligned}$$

ove $j = \sqrt{-1}$ (in genere si usa il simbolo i).

k_1 e k_2 valgono quindi

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{-\frac{\gamma}{2} - j\,\omega_1}{-2\,j\,\omega_1}\, z_0 = \frac{z_0}{2}\left(1 - j\,\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right) && (48)\\ k_2 &= \frac{-\frac{\gamma}{2} + j\,\omega_1}{2\,j\,\omega_1}\, z_0 = \frac{z_0}{2}\left(1 + j\,\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right) . && (49) \end{aligned}$$

La soluzione è quindi

$$\begin{aligned} z(t) &= \frac{z_0}{2}\left(1 - j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right) e^{-\gamma/2\,t}\, e^{j\,\omega_1\, t} && (50)\\ &\quad + \frac{z_0}{2}\left(1 + j\frac{\gamma}{2\,\omega_1}\right) e^{-\gamma/2\,t}\, e^{-j\,\omega_1\, t} && (51) \end{aligned}$$

la cui parte reale è (provare a fare i conti come esercizio, ricordandosi[1] che $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$)

$$Z(t) = \mathrm{Re}\, z(t) \quad = \quad z_0\, e^{-t/\tau} \left[\cos\left(\omega_1\, t\right) + \frac{\gamma}{2\,\omega_1} \sin\left(\omega_1\, t\right) \right] \tag{52}$$

con $\tau = 2/\gamma$. [Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si può verificare inoltre[2] che la (52) può essere riscritta come

$$Z(t) \quad = \quad \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau} \cos\left(\omega_1\, t + \varphi\right), \tag{53}$$

con $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e quindi $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2}$.

La (53), più facile da leggere e da memorizzare dell'equivalente (52), ci mostra uno moto oscillante con ampiezza decrescente nel tempo in modo esponenziale. Si noti che $\omega_1 < \omega_0$, ovvero $T_1 > T_0$: lo smorzamento rallenta l'oscillazione.

Come regola pratica per ricordarsi la (53), si ricordi che essa è data, a parte un fattore, da tre componenti:

1. z_0, dato dall'ampiezza iniziale e che quindi costituisce la 'scala' del problema (la soluzione scala con z_0).

[1] Espandendo in serie di Taylor $e^{j\,x}$, $\sin x$ e $\cos x$ si ottiene:

$$\begin{aligned}
e^{j\,x} &= 1 + j\,x - \frac{x^2}{2!} - j\,\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + j\,\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - j\,\frac{x^7}{7!} + \dots \\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots .
\end{aligned}$$

da cui $e^{j\,x} = \cos x + j \sin x$.

[2] Con un po' di trigonometria si può vedere come $(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi)$ può essere riscritta come

$$\begin{aligned}
(1/\cos\varphi)\,\cos(\omega_1 t + \varphi) &= \frac{1}{\cos\varphi}[\cos\omega_1 t \cdot \cos\varphi - \sin\omega_1 t \cdot \sin\varphi] \\
&= \cos\omega_1 t - \tan\varphi \cdot \sin\omega_1 t \\
&= \cos\omega_1 t + \frac{\gamma}{2\omega_1} \sin\omega_1 t\,.
\end{aligned}$$

Si ricordi inoltre che $\cos(\arctan\alpha) = 1/\sqrt{1+\alpha^2}$.

2. Un termine di attenuazione, dato da $e^{-t/\tau}$, con τ pari all'opposto dell'inverso della parte reale di α_i ($\tau = 2/\gamma$);
3. Un termine oscillante con una opportuna fase, ovvero $\cos(\omega_1 t + \varphi)$, con ω_i pari al modulo della parte immaginaria di α_i.

La fase φ ha un ruolo importante. Infatti, si può facilmente verificare che $z_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t)$ ha derivata diversa da zero a tempo zero, contraddicendo la condizione iniziale $\dot{z}(0) = 0$.[3] Ma una volta introdotta tale fase, occorre far dividere $z_0 e^{-t/\tau}\cos(\omega_1 t + \varphi)$ per $\cos\varphi$, al fine di avere $z(0) = z_0$. Otteniamo quindi la (53).

Il valore di φ può essere ottenuto dalla condizione $\dot{z}(0) = 0$:

$$-\frac{1}{\tau}\cos\varphi - \omega_1 \sin\varphi = 0 \tag{54}$$

$$\Rightarrow \quad \tan\varphi = -\frac{\gamma}{2\omega 1}, \tag{55}$$

da cui $\varphi = \arctan(-\gamma/2\,\omega_1)$ e $\cos\varphi = 1/\sqrt{1 + (\gamma/2\omega_1)^2}$.

$\boxed{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 - \omega_0^2 = 0}$ Questa condizione si ottiene come limite per $\omega_1 \to 0$. Il procedimento più rapido[4] è a partire dal caso sottosmorzato, ed in particolare

[3] Si ricorda che, fisicamente, $\dot{z}(0) \neq 0$ corrisponde ad una discontinuità nella velocità o nell'intensità di corrente, a seconda che si tratti di oscillatore meccanico o elettrico, che implicherebbero forza infinita o forze elettromotrice indotta infinita.

[4] Alternativamente si può anche partire dal caso sovrasmorzato, ed in particolare dalla (43). Indicando $\sqrt{(\gamma/2)^2 - \omega_0^2}$ con ϵ, otteniamo che $\alpha_1 = -\gamma/2 + \epsilon$ e $\alpha_2 = -\gamma/2 - \epsilon$, da cui $\alpha_2 = \alpha_1 - 2\epsilon$. Si tratta quindi di fare il limite della (43) per $\epsilon \to 0$:

$$\frac{z(t)}{z_0} = \frac{\alpha_1 - 2\epsilon}{-2\epsilon} e^{\alpha_1 t} - \frac{\alpha_1}{-2\epsilon} e^{(\alpha_1 - 2\epsilon)\,t} \tag{56}$$

$$= \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon}\left[-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1 e^{-2\epsilon\, t}\right] \tag{57}$$

$$\approx \frac{e^{\alpha_1 t}}{2\epsilon}\left[-\alpha_1 + 2\epsilon + \alpha_1(1 - 2\epsilon\, t)\right] \tag{58}$$

$$\approx e^{\alpha_1 t}\left[1 - \alpha_1 t\right] \tag{59}$$

$$\to e^{-(\gamma/2)t}\left[1 - \frac{\gamma}{2}t\right] = e^{-t/\tau}\left(1 + \frac{t}{\tau}\right) \tag{60}$$

dalla (52). Sviluppando in serie, otteniamo[5] otteniamo:

$$Z(t) \approx z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 - \frac{(\omega_1\, t)^2}{2} + \frac{\gamma}{2\,\omega_1}(\omega_1\, t)\right], \tag{61}$$

che, per $\omega_1 \to 0$, diventa

$$Z(t) = z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{\gamma}{2}\, t\right] \tag{62}$$

$$= z_0\, e^{-t/\tau} \left[1 + \frac{t}{\tau}\right]. \tag{63}$$

[Si verifichi che $Z(0) = z_0$ e $\dot{Z}(0) = 0$.]

Si noti come $Z(t)$ è il prodotto di fattori non negativi e quindi è sempre ≥ 0, ovvero non si ha alcuna oscillazione intorno allo zero.

Come esercizio, mostriamo come la (63) soddisfi l'equazione differenziale da cui siamo partiti.

$$\dot{Z}(t) = -\frac{z_0}{\tau^2}\, t\, e^{-t/\tau} \tag{64}$$

$$\ddot{Z}(t) = \frac{z_0}{\tau^2}\, e^{-t/\tau} \left(\frac{t}{\tau} - 1\right). \tag{65}$$

[Quest'ultima ci dice che $Z(t)$ ha un flesso per $t = \tau$.]

Otteniamo quindi:

$$\ddot{Z}(t) + \gamma \dot{Z}(t) + \omega_0^2 Z(t) = \tag{66}$$

$$\frac{t}{\tau} - 1 - \gamma t + \tau^2 \omega_0^2 \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) = 0\,, \tag{67}$$

[5] Si ricorda che per $\epsilon \ll 1$

$$\sin\epsilon \approx \epsilon$$
$$\cos\epsilon \approx 1 - \frac{\epsilon}{2}\,.$$

Altre utili approssimazioni

$$e^{\epsilon} \approx 1 + \epsilon$$
$$(1+\epsilon)^2 \approx 1 + 2\,\epsilon$$
$$\sqrt{(}1+\epsilon) \approx 1 + \frac{\epsilon}{2}$$
$$\frac{1}{1+\epsilon} \approx 1 - \epsilon$$

ricordandoci che $\tau = 2/\gamma$ e $\tau^2\omega_0^2 = 4\omega_0^2/\gamma^2 = 1$ in quanto nel caso critico vale la relazione $\gamma/2 = \omega_0$.

0.8

Oscillatore smorzato: considerazioni energetiche.
Riprendiamo oscillatore smorzato, caso sottosmorzato, di cui riscriviamo la soluzione nella forma (53)

$$Z(t) = \frac{z_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos(\omega_1\, t + \varphi) \tag{68}$$

e ci ricordiamo che a seconda dei problemi incontrati Z ha il significato dello scostamento x rispetto alla posizione di equilibrio o di carica Q. Concentriamoci sul caso meccanico (quello elettrico è assolutamente equivalente), ovvero

$$x(t) = \frac{x_0}{\cos\varphi}\, e^{-t/\tau}\, \cos(\omega_1\, t + \varphi)\,. \tag{69}$$

Energia meccanica all'istante $t = 0$ e dopo n pseudoperiodi, nell'approssimazioni che l'oscillatore sia poco smorzato e quindi $\omega_1 \approx \omega_0$ (ovvero $\gamma^2/4 \ll \omega_0$):

$$E_0 = E(n=0) = \frac{1}{2}\, k\, x_0^2 \tag{70}$$

$$E(n) = \frac{1}{2}\, k\, x^2(t = nT_1) \tag{71}$$

$$= \frac{1}{2}\, k\, x_0^2\, e^{-2\, n\, T_1/\tau} \tag{72}$$

$$= E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega_1)\, n} \tag{73}$$

$$\approx E_0\, e^{-(2\pi\gamma/\omega 0)\, n}\,. \tag{74}$$

Il rapporto fra $E(n+1)/E(n)$ da un periodo all'altro vale

$$\frac{E(n+1)}{E(n)} \approx e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)}\,, \tag{75}$$

ovvero in un periodo abbiamo una variazione frazionaria di

$$\frac{E(n+1) - E(n)}{E(n)} \approx e^{-(2\pi\gamma/\omega_0)} - 1 \tag{76}$$

$$\approx 1 - \frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0} - 1 \tag{77}$$

$$\approx -\frac{2\,\pi\,\gamma}{\omega_0}\,, \tag{78}$$

ove abbiamo usato nel penultimo passaggio l'approssimazione $e^{-\epsilon} \approx 1 - \epsilon$, in quanto $\gamma/\omega_0 \ll 1$
Inoltre, possiamo riscrivere la (74) come

$$E(n) \approx E_0\, e^{-n/n_c} \tag{79}$$

$$(\, n_c = \frac{1}{2\,\pi}\frac{\omega_0}{\gamma}\,)\,. \tag{80}$$

ove n_c acquista il significato di 'numero di oscillazioni che l'oscillatore impiega per ridurre ad $1/e$ la sua energia iniziale: $\rightarrow$ altro andamento esponenziale!
Ovviamente, essendo il numero di periodi proporzionale al tempo trascorso, in quanto $t = n\,T = n\,(2\pi/\omega_0)$, e considerando l'andamento 'medio' dell'energia, valido ad ogni numero intero di periodi (l'andamento esatto è un po' più complicato, in quanto la variazione dell'energia nell'unità di tempo è proporzionale al quadrato della velocità istantanea), otteniamo

$$< E(t) > \approx E_0\, e^{-\gamma\, t} = E_0\, e^{-t/\tau_E}\,, \tag{81}$$

con $\tau_E = 1/\gamma$: l'andamento medio dell'energia nel tempo è esponenziale, con una costante di tempo inversamente proporzionale al coefficiente di viscosità β (o l'equivalente elettrico R nel circuito RLC).
Fattore di qualità (o di merito) di un circuito smorzato. Definizione:

$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}\,. \tag{82}$$

(<u>Da non confondere</u> con il simbolo della carica elettrica). Possiamo riscrivere le (78) e (80) come

$$\frac{E(n+1) - E(n)}{E(n)} \approx -\frac{2\,\pi}{Q} \tag{83}$$

$$n_c \approx \frac{Q}{2\,\pi}, \tag{84}$$

ovvero

- maggiore è il fattore di merito e minore è l'energia frazionaria persa per ogni oscillazione e, di conseguenza, maggiore il numero di oscillazioni prima che il sistema abbia perso una certa frazione prefissata di energia;

- in particolare, la (84) ci dice che $Q/2\pi$ rappresenta (approssimativamente) il numero di oscillazioni necessarie affinchè l'energia del sistema si riduca di $1/e$ di quella iniziale.

In termini dei parametri del sistema Q vale:

$$\text{Oscillatore meccanico:} \qquad Q = \frac{1}{\beta}\sqrt{m\,k} \tag{85}$$

$$\text{Oscillatore elettrico:} \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\,. \tag{86}$$

0.9

Oscillatore forzato Riprendiamo l'equazione (2) e aggiungiamo una forza periodica sinusoidale[6] $f(t) = f_0\,\cos\omega t$. la forza totale sarà quindi

$$F \;=\; -k\,x - \beta\,v + f_0\,\cos\omega t \tag{87}$$

la (2) e seguenti diventano quindi

$$m\,\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \beta\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + k\,x \;=\; f_0\,\cos\omega t \tag{88}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\beta}{m}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\,x \;=\; \frac{f_0}{m}\,\cos\omega t \tag{89}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,x \;=\; \eta\,\cos\omega t\,. \tag{90}$$

Analogalmente, se nel circuito RCL aggiungiamo una forza elettromotrice cariabile nel tempo $f(t) = f_0\,\cos\omega t$, la (11) e seguenti diventano

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L\,C}\,Q \;=\; f_0\,\cos\omega t \tag{91}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,Q \;=\; \frac{f_0}{L}\,\cos\omega t\,, \tag{92}$$

formalmente analoga alla (90) . Risolviamo quindi la generica

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,z \;=\; \eta_0\,\cos\omega t\,, \tag{93}$$

ove η_0 sta per f_0/m o f_0/L, a seconda che si tratta del caso meccanico o elettrico (si noti che in entrambi i casi il denominatori rappresenta un termine di inerzia).

[6] L'importanza dello studio di moti periodici sinusoidali è lagato al teorema di Fourier, attraverso è possibile scrivere qualsiasi funzione periodica come una opportuna combinazioni di sinusoidi.

Si noti come nel caso meccanico $f_0/m \cos\omega t$ rappresenta l'accelerazione dovuta alla sola forza $f(t)$.
Come è noto, la soluzione della (93) è pari alla somma della soluzione omogenera e di quella particolare. Come abbiamo visto precedentemente, la soluzione omogenea (ovvero quella con $\eta_0 = 0$) dà luogo ad una soluzione smorzata che asintoticamente si estingue. Dopo $\approx 5\,Q$ oscillazioni (ove Q è il fattore di merito) resta soltanto la soluzione particolare, 'forzata' alla stessa frequenza di $f(t)$. Quindi la soluzione sarà del tipo

$$z(t) \;=\; z_0 \cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{94}$$

Come è anche noto, i conti si semplificano se usiamo la notazione complessa, ovvero: consideriamo

$$\eta_0 \cos\omega t \;=\; \mathrm{Re}[\eta_0\, e^{j\omega t}]\,; \tag{95}$$

usiamo la variabile complessa

$$z \;=\; z_0\, e^{j\omega t}\,, \tag{96}$$

ove z_0 è essa stessa una variabile complessa, e contenente quindi la fase φ:

$$z_0 \;=\; Z_0\, e^{j\varphi} \tag{97}$$

$$z \;=\; Z_0\, e^{j\varphi}\, e^{j\omega t}\,, \tag{98}$$

ove con Z_0 indichiamo l'ampienza fisica dell'oscillazione (variabile reale).
Risolviamo quindi la (93) per variabili complesse e infine prediamo la parte reale del risultato.

0.10

Soluzione della (93) Sostituendo la soluzione di prova $z = z_0\, e^{j\omega t}$ nella (93) otteniamo

$$-\omega^2\, z_0\, e^{j\omega t} + j\omega\,\gamma\, z_0\, e^{j\omega t} + \omega_0^2\, z_0\, e^{j\omega t} \;=\; \eta_0 \cos\omega t \tag{99}$$

$$z_0\,(-\omega^2 + j\omega\,\gamma + \omega_0^2) \;=\; \eta_0 \tag{100}$$

$$z_0 \;=\; \frac{\eta_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\,\gamma}\,, \tag{101}$$

dalla quale si ricavano[7] ampiezza di z, che scriviamo con Z_0 e la sua fase φ:

$$Z_0 = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \tag{102}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}, \tag{103}$$

ovvero la soluzione completa è

$$z(t) = \frac{\eta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \cos\left[\omega t + \arctan \frac{\gamma\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}\right] \tag{104}$$

Discussione del risultato: $\rightarrow$ **risonanza**.
Per $\omega = \omega_0$ (ω_0 è detta frequenza di risonanza) l'ampiezza di oscillazione ha un massino e vale $\eta_0/\gamma\omega_0$, inversamente proporzionale al coefficiente del termine dissipativo (β o R nei due casi).

0.11 Nota

Nel corso di LEC l'oscillatore forzato è stato risolto in realtà facendo uso della impedenza complessa:

$$\vec{I} = \frac{V_0}{\vec{Z}} \tag{105}$$

$$= \frac{V_0}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} \tag{106}$$

$$= \frac{V_0}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})} \tag{107}$$

$$\vec{V}_R = R\vec{I} \tag{108}$$

$$\vec{V}_C = \frac{1}{j\omega C}\vec{I} \tag{109}$$

$$\vec{V}_L = j\omega L\vec{I} \tag{110}$$

[7] Si ricorda che i numeri complessi possono essere rappresentati in un piano cartesiano ('piano complesso') come un punto avente per ascissa la sua parte reale e per ordinata la sua parte immaginaria. Il modulo rappresenta quindi la distanza del punto dall'origine e la fase l'angolo formato fra il segmento congiungente punto-origine e l'asse delle ascisse. Modulo e fase sono quindi calcolati dalle usuali formule di geometria e trigonometria.

Valgono inoltre le seguenti regole pratiche: 1) il modulo di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a prodotto o rapporto dei moduli; 2) la fase di un prodotto o di un rapporto di n umeri complessi è pari, rispettivamente, a somma o differenza delle fasi.

etc.