Soluzioni

ESERCIZIO 1 (COMPITO A):
Dati: $h = 3.75$ m, $d = 4.88$ m.

(1) Utilizzando la conservazione dell'energia otteniamo

$$mgh = \frac{1}{2}mv_A^2, \qquad v_A = \sqrt{2gh} = 8.58\,\mathrm{m/s}.$$

(2) Utilizzando il fatto che la variazione di energia meccanica deve essere uguale al lavoro della forza d'attrito, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = L_{\text{attrito}} = -\mu_d mgd$$

da cui, essendo $v_B = 0$, otteniamo

$$\mu_d = \frac{v_A^2}{2gd} = \frac{h}{d} = 0.768$$

ESERCIZIO 1 (COMPITO B):
Dati: $d = 2.15$ m, $L = 6.22$ m.

(1) Utilizzando la conservazione dell'energia otteniamo

$$mgd = \frac{1}{2}mv_A^2, \qquad v_A = \sqrt{2gd} = 6.49\,\mathrm{m/s}.$$

(2) Utilizzando il fatto che la variazione di energia meccanica deve essere uguale al lavoro della forza d'attrito, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = L_{\text{attrito}} = -\mu_d mgL$$

da cui, essendo $v_B = 0$, otteniamo

$$\mu_d = \frac{v_A^2}{2gL} = \frac{d}{L} = 0.346$$

ESERCIZIO 1 (COMPITO C):
Dati: $L = 4.38$ m, $d = 2.67$ m.

(1) Utilizzando la conservazione dell'energia otteniamo

$$mgL = \frac{1}{2}mv_A^2, \qquad v_A = \sqrt{2gL} = 9.27\,\mathrm{m/s}.$$

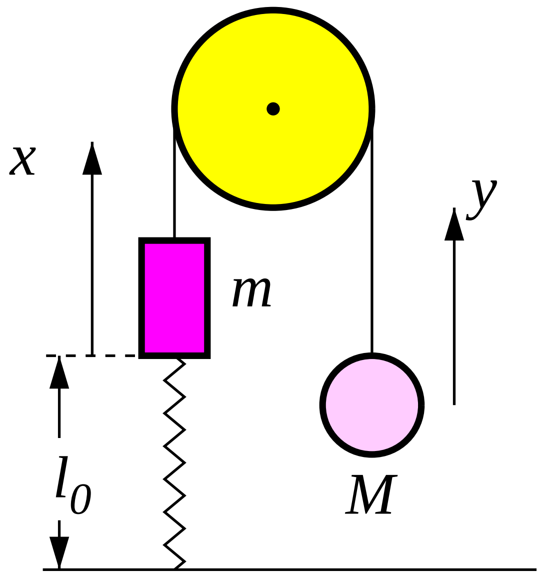
(2) Utilizzando il fatto che la variazione di energia meccanica deve essere uguale al lavoro della forza d'attrito, otteniamo

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = L_{\text{attrito}} = -\mu_d mgd$$

da cui, essendo $v_B = 0$, otteniamo

$$\mu_d = \frac{v_A^2}{2gd} = \frac{L}{d} = 1.64$$

ESERCIZIO 2: Scegliamo i sistemi di riferimento come indicato in figura. Al tempo $t = 0$ la massa m si trova in $x = 0$, la massa M in $y = 0$ e la molla è a riposo. Con questa scelta l'allungamento della molla coincide con x. Se la corda è tesa vale $x = -y$.



Compito A: $M = 2m$
Compito B: $M = 3m$
Compito C: $m = 2M$

(a) Le equazioni di Newton sono date da:

$$ma_x = T - kx - mg \qquad\qquad Ma_y = T - Mg$$

Se il sistema è equilibrio $a_x = a_y = 0$. Eliminando T abbiamo

$$x_{\text{eq}} = \frac{(M-m)g}{k} \qquad\qquad l_{\text{eq}} = x_{\text{eq}} + l_0$$

Quindi

Compito A	$x_{\text{eq}} = \frac{mg}{k} = 3.0\,\text{cm}$	$l_{\text{eq}} = 15.0\,\text{cm}$
Compito B	$x_{\text{eq}} = \frac{2mg}{k} = 4.0\,\text{cm}$	$l_{\text{eq}} = 17.0\,\text{cm}$
Compito C	$x_{\text{eq}} = -\frac{Mg}{k} = -1.0\,\text{cm}$	$l_{\text{eq}} = 7.0\,\text{cm}$

(b) Le forze agenti sono conservative e quindi l'energia si conserva. Nel sistema di riferimento scelto

$$E_{\text{mecc}} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}Mv_y^2 + \frac{1}{2}kx^2 + mgx + Mgy$$

Se la corda è tesa, allora $x = -y$ e $v_x = -v_y$. Quindi

$$E_{\text{mecc}} = \frac{1}{2}(m+M)v_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 + (m-M)gx$$

Dato che l'energia si conserva, $E_{\text{mecc}} = E_{\text{mecc}}(t=0)$. Quindi abbiamo

$$\frac{1}{2}(m+M)v_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 + (m-M)gx = \frac{1}{2}(m+M)w_0^2.$$

L'allungamento massimo e minimo corrispondono a $v_x = 0$. Risolvendo l'equazione di secondo grado otteniamo

$$x_{\text{max,min}} = x_{\text{eq}} \pm \frac{1}{k}\sqrt{(m-M)^2g^2 + k(m+M)w_0^2}$$

Quindi

Compito A
$$x_{\text{max,min}} = x_{\text{eq}} \pm \frac{1}{k}\sqrt{m^2g^2 + 3kmw_0^2}$$
$$x_{\text{min}} = -4.4\,\text{cm} \qquad x_{\text{max}} = 10.4\,\text{cm}$$
$$l_{\text{min}} = 7.6\,\text{cm} \qquad l_{\text{max}} = 22.4\,\text{cm}$$

Compito B
$$x_{\text{max,min}} = x_{\text{eq}} \pm \frac{1}{k}\sqrt{4m^2g^2 + 4kmw_0^2}$$
$$x_{\text{min}} = -2.8\,\text{cm} \qquad x_{\text{max}} = 10.8\,\text{cm}$$
$$l_{\text{min}} = 10.2\,\text{cm} \qquad l_{\text{max}} = 23.8\,\text{cm}$$

Compito C
$$x_{\text{max,min}} = x_{\text{eq}} \pm \frac{1}{k}\sqrt{M^2g^2 + 3kMw_0^2}$$
$$x_{\text{min}} = -3.5\,\text{cm} \qquad x_{\text{max}} = 1.5\,\text{cm}$$
$$l_{\text{min}} = 4.5\,\text{cm} \qquad l_{\text{max}} = 9.5\,\text{cm}$$

(3) Ritorniamo alle equazioni del moto. Tenendo conto che $a_x = -a_y$, abbiamo

$$\frac{1}{m}(T - kx - mg) = -\frac{1}{M}(T - Mg) \qquad T = \frac{mM}{M+m}\left(2g + \frac{kx}{m}\right)$$

I valori massimi e minimi si ottengono sostituendo x_{max} e x_{min} ricavati in (b). Quindi

Compito A
$$T_{\text{max,min}} = \frac{2m}{3}\left(2g + \frac{kx}{m}\right)$$
$$T_{\text{max}} = 33.2\,\text{N} \qquad T_{\text{min}} = 3.2\,\text{N}$$

Compito B
$$T_{\text{max,min}} = \frac{3m}{4}\left(2g + \frac{kx}{m}\right)$$
$$T_{\text{max}} = 105\,\text{N} \qquad T_{\text{min}} = 8.3\,\text{N}$$

Compito C
$$T_{\text{max,min}} = \frac{2M}{3}\left(2g + \frac{kx}{2M}\right)$$
$$T_{\text{max}} = 16.6\,\text{N} \qquad T_{\text{min}} = 1.6\,\text{N}$$

Come si vede $T_{\min}$ è positivo: quindi la corda è sempre in tensione.
In generale dev'essere $x_{\min} \geq -2mg/k$ e questo impone che w_0 non sia troppo grande:

$$|w_0| \leq 2g\sqrt{\frac{mM}{k(m+M)}}.$$