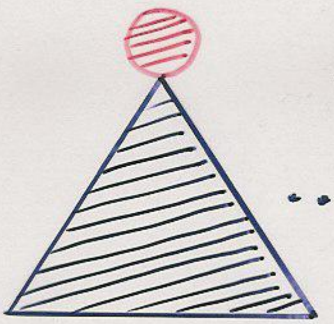
POSIZIONI DI EQUILIBRIO

Una posizione si dice di equilibrio se ponendo in essa un corpo, esso rimane in quiete

EQUILIBRIO DINAMICO $\vec{a}=0 \Rightarrow \vec{F}=0$

RISULTANTE!



...MA... ... POSIZIONE DI EQUILIBRIO!

EQUILIBRIO $\begin{cases} \text{STABILE} \\ \text{INSTABILE} \\ \text{INDIFFERENTE} \end{cases}$

tre diverse condizioni di equilibrio classificabili in base a quanto avviene spostando di poco il corpo dalla cosiddetta posizione di equilibrio

Supponiamo: punto materiale nel campo gravitazionale

$$f_x = 0 \quad f_y = 0 \quad f_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

(U = energia potenziale
$U = -V$)

Equilibrio : $\vec{f}=0 \Rightarrow f_x, f_y, f_z = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = 0$$

Nel campo gravitazionale $U = mgh + \text{cost}$

ed $U \equiv U(z)$ dipende solo da z

Se quindi il punto materiale compie uno spostamento $d\vec{s}$ è solo la variazione di z (dz) che influenza la variazione di U

$$\underbrace{dU = \frac{dU}{ds} \cdot ds}_{\text{definizione di differenziale}} = \frac{dU}{dz} \cdot \frac{dz}{ds} \cdot ds$$

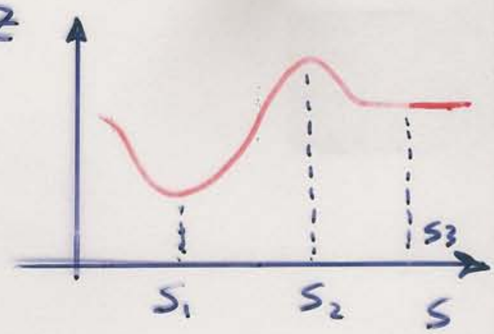
$\frac{dU}{dz}$ → quanto varia U per una variazione di z

$\frac{dz}{ds}$ → quanto varia z per uno spostamento ds

U rimane costante se z rimane costante

$$dU = 0 \quad \text{se} \quad dz = \frac{dz}{ds} \cdot ds = 0 \; !$$

Lo studio di $\frac{dU}{ds}$ si può fare studiando $\frac{dz}{ds}$ come varia la quota z durante la traiettoria.

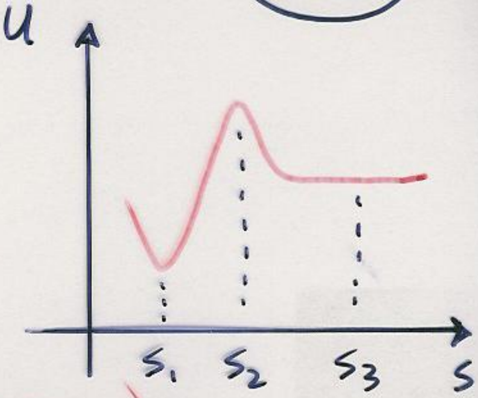


In → s_1, s_2, s_3

$$\frac{dz}{ds} \quad \text{cioè} \quad \frac{dU}{ds} = 0 \; !$$

dove la tangente alla traiettoria è orizzontale

$$\frac{dU}{ds} = 0$$



attorno ad s_1 (forza attrattiva)

U ha un minimo $\Rightarrow$ EQUILIBRIO STABILE

$ds < 0$ $\quad s < s_1 \quad \frac{dU}{ds} < 0$ $\quad ds = s - s_1 < 0$ $\Rightarrow dU > 0$ per $ds < 0$

$ds > 0$ $\quad s > s_1 \quad \frac{dU}{ds} > 0$ $\quad ds = s - s_1 > 0$ $\quad dU > 0$ per $ds > 0$

$f = -\frac{dU}{ds}$ ha segno discorde rispetto a ds

La forza tende a riportare il punto in s_1

attorno ad s_2 (forza repulsiva)

U ha un massimo $\Rightarrow$ EQUILIBRIO INSTABILE

per $s < s_2 \quad \frac{dU}{ds} > 0 \quad \begin{cases} ds = s - s_2 < 0 \\ dU < 0 \end{cases}$

$s > s_2 \quad \frac{dU}{ds} < 0 \quad \begin{cases} ds = s - s_2 > 0 \\ dU < 0 \end{cases}$

$f = -\frac{dU}{ds}$ ha segno concorde rispetto a ds

La forza tende ad allontanare il punto da s_2

attorno ad s_3

U è costante $\Rightarrow$ EQUILIBRIO INDIFFERENTE

$\left.\begin{matrix} ds < 0 \\ ds > 0 \end{matrix}\right\} \quad dU = 0 \Rightarrow \frac{dU}{ds} = 0$

$f = 0$ non compaiono forze né attrattive, né repulsive

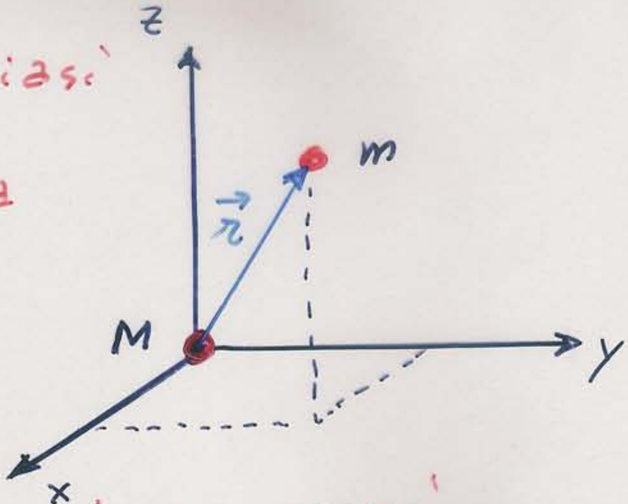
Abbiamo parlato di forza di gravità: quale è la sua origine?

Attrazioni fra pianeti: traiettorie (Keplero, Newton ...)

$\Rightarrow$ attrazioni fra due corpi qualsiasi

Prendiamo due corpi qualsiasi (Punti Materiali) con massa

M, m



$\Rightarrow$ Dinamometro sensibile

$\Rightarrow$ attrazione fra i due corpi

$$\vec{f} \equiv \vec{f}(m) = -f(m)\,\hat{r} \quad \left(\begin{array}{l}\text{AVENDO} \\ \text{FISSATO } M\end{array}\right)$$

La forza dipende da m $\left(\begin{array}{l}\text{massa} \\ \text{campione}\end{array}\right)$ ed è orientata in verso opposto ad $\hat{r}$ (forza centrale)

m è uno scalare, per mettere in relazione $\vec{f}$ con m abbiamo bisogno di un altro vettore: $\vec{g}(\vec{r})$

$$\vec{g}(\vec{r}) = \frac{\vec{f}}{m}$$

(forza che in presenza di M si esercita su una massa unitaria)

$\vec{g}(\vec{r})$ è funzione della distanza fra i due corpi

Si verifica che $|\vec{g}| = \frac{GM}{r^2}$ $G = 6.66 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2}$

$|\vec{g}|$ dipende dalla massa M che genera il campo e decresce $\left(\frac{1}{r^2}\right)$ allontanandosi da M.

vettorialmente $\vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

quindi essendo $\vec{f} = \vec{g}(\vec{r}) \cdot m$

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$

o anche, essendo $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{\vec{r}}{r}$

$$= \hat{i}\frac{x_r}{r} + \hat{j}\frac{y_r}{r} + \hat{k}\frac{z_r}{r}$$

avremo

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^3}\left(\hat{i}\,x_r + \hat{j}\,y_r + \hat{k}\,z_r\right)$$

La forza $\vec{f}$ è definita in ogni punto dello spazio tranne che nel punto $r \equiv 0$ (divergenza) } CAMPO DI FORZE

$$f_x = -\frac{GMm}{r^3}x_r = -GMm\frac{x_r}{(x_r^2 + y_r^2 + z_r^2)^{3/2}}$$

+ analoghe per f_y, f_z

tale campo di forze è conservativo?

$$\frac{\partial f_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{GMm\, x_r}{(x_r^2+y_r^2+z_r^2)^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial z}\left(-GMm\, x_r \cdot (x_r^2+y_r^2+z_r^2)^{-3/2}\right) =$$

$$= \frac{3}{\cancel{2}} GMm\, x_r (x_r^2+y_r^2+z_r^2)^{-5/2} \cdot \cancel{2} z_r$$

e

$$\frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-GMm\, z_r (x_r^2+y_r^2+z_r^2)^{-3/2}\right) =$$

$$= \frac{3}{2} GMm\, z_r (x_r^2+y_r^2+z_r^2)^{-5/2} \cdot 2x_r$$

quindi $\dfrac{\partial f_x}{\partial z} = \dfrac{\partial f_z}{\partial x}$

+ analoghe!

Il campo gravitazionale così definito è un campo conservativo!

$\exists$ quindi una funzione potenziale tale che $\vec{\nabla} V = \vec{f}$

$$dV = \underbrace{f_x\, dx}_{\to\, -\frac{GMm\,x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,dx} + f_y\, dy + f_z\, dz = \vec{f}\cdot d\vec{r} = \vec{\nabla} V \cdot d\vec{r}$$

Per ottenere il potenziale di tale campo conservativo dobbiamo integrare termini simili: $V(B) = \int_A^B dV + V(A)$

integriamo il termine $f_x\, dx$

$$\int -GMm \frac{x\, dx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = -GMm \int \frac{x\, dx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$r = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{+1/2}}$$

analoghe espressioni si possono trovare per $\frac{\partial r}{\partial y}$, $\frac{\partial r}{\partial z}$

$$dr = \frac{x\, dx}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{y\, dy}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}} + \frac{z\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

quindi $$\int dV = -GMm \int \frac{x\, dx + y\, dy + z\, dz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

$$= -GMm \int \underbrace{\frac{(x\, dx + y\, dy + z\, dz)}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}}_{dr} \cdot \underbrace{\frac{1}{(x^2+y^2+z^2)}}_{1/r^2} =$$

$$V_B - V_A = -GMm \int_A^B \frac{dr}{r^2}$$

$$V_B - V_A = -GMm \left[-\frac{1}{r}\right]_A^B = GMm \left[\frac{1}{r}\right]_A^B$$

$$= GMm \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

In genere $V = \frac{GMm}{r} + \text{cost} = -U(r)$

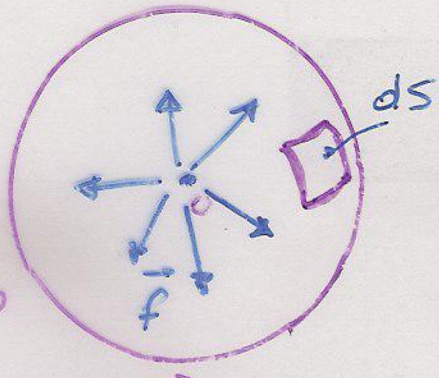
e $f = -\frac{GMm}{r^2}$

Consideriamo di nuovo il campo di forza generato da una massa (o carica)

$\Rightarrow$ forza radiale $\Rightarrow$ simmetria sferica

Il campo è conservativo

$\Rightarrow \exists\ \forall$ punto P $\quad V(P)$ = funzione potenziale



Sia $\vec{f}$ il vettore generato dalla massa (carica) posta in O

Molto importante $\Rightarrow$ flusso del vettore $\vec{f}$ attraverso la superficie arbitraria dS

(immaginate un fluido attraverso un foro)

dS = superficie

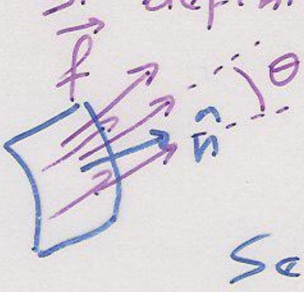
se $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie

possiamo definire

$$\vec{dS} = \hat{n}\, dS$$

vettore normale alla dS

Si definisce flusso di $\vec{f}$ attraverso dS



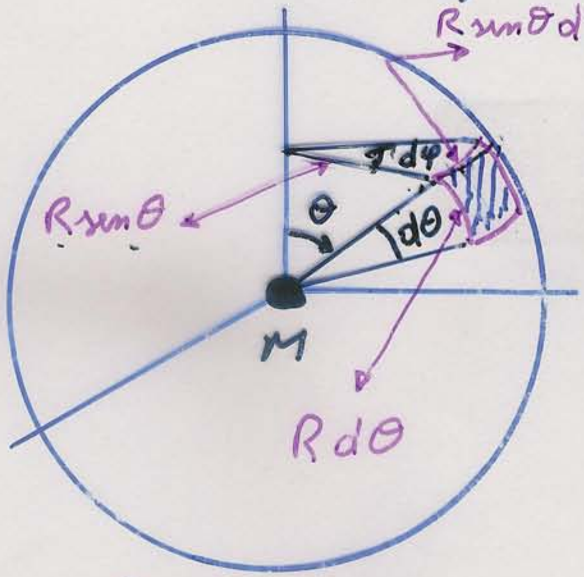
$$d\Phi = \vec{f} \cdot \vec{dS} = \vec{f} \cdot \hat{n}\, dS = f\, dS \cos\theta$$

Se ora dS è un elemento della superficie S

$$\Phi = \underbrace{\int_S}_{\text{integrale di superficie.}} \vec{f} \cdot \vec{dS}$$

Calcoliamo il flusso del campo gravitazionale $\vec{g}$ generato da M, attraverso una superficie chiusa S (ad es. una sfera)

Supponiamo M al centro della sfera di raggio R



$$dS = (R\,d\theta)(R \,\text{sen}\,\theta \, d\varphi)$$

Per rappresentare l'intera superficie della sfera devo integrare per tutto il dominio di variabilità delle variabili indipendenti: φ, θ

$$0^\circ \leq \varphi \leq 360^\circ$$
$$0 \leq \theta \leq 180^\circ$$

Infatti $\quad S = \int_S dS = \int_S R^2 d\theta \,\text{sen}\,\theta \, d\varphi$

$$S = R^2 \underbrace{\int_0^{\pi} \text{sen}\,\theta \, d\theta}_{[-\cos\theta]_0^{\pi} = 2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} = 2\pi R^2 \left[-\cos\pi + \cos 0\right] = 4\pi R^2$$

Si definisce angolo solido

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

l'angolo solido sotteso dalla sfera è

$$\Omega = \frac{S}{R^2} = 4\pi$$

se calcoliamo ora il flusso del vettore $\vec{g}$

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_S g \cdot \underbrace{ds \cdot \cos\theta} = \int_S -\frac{GM}{\cancel{r^2}} \cdot \cancel{r^2} \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

essendo il problema a simmetria sferica $\theta = 0$ quindi $\cos\theta = 1$ sempre

$$\Phi = -GM \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -2\pi GM \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta$$

$$= -2\pi GM \left[-\cos\theta \right]_0^{\pi} = -4\pi GM$$

TEOREMA DI GAUSS

In effetti tale risultato può essere ottenuto qualunque sia la superficie chiusa che circonda M, qualunque sia la posizione di M all'interno della superficie chiusa

$$\Phi = \int_S \vec{g} \, d\vec{s} = \int_S g \, ds \cos\theta = -GM \int_S \frac{dS_n}{r^2}$$

$$\frac{dS_n}{r^2} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$ = angolo solido indipendente dal raggio

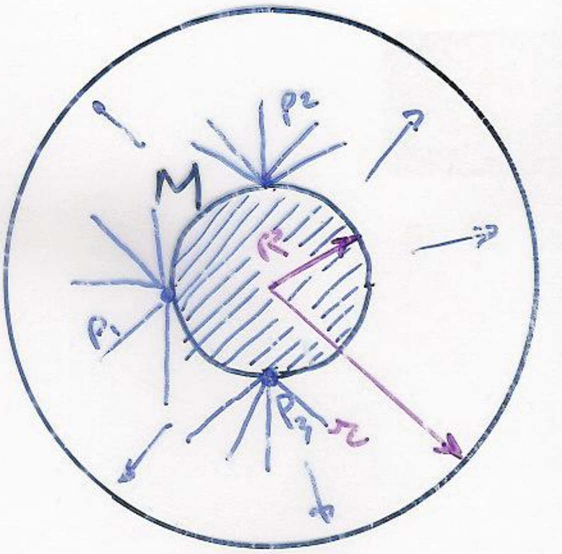
$$\Phi = -GM \int d\Omega = -4\pi GM$$

Abbiamo supposto che M sia puntiforme.

Se il corpo è esteso (la Terra ad esempio) come si può generalizzare?

Tutta la massa contenuta nella sfera R ($r > R$) genera il campo vettoriale

$$\vec{g}(\vec{r})$$



Per simmetria $|\vec{g}(\vec{r})|$ sarà costante per ogni sfera concentrica con la massa M (o con una eventuale carica)

Ciò è vero per ogni valore di $\vec{r}$

$$|\vec{r}| \lesseqgtr R$$

Se $\vec{g}(\vec{r}) = -g(r)\,\hat{r} \iff$ forza attrattiva

$$\Phi = \int_S \vec{g} \cdot d\vec{S} = \int_S -g(r)\,\hat{r} \cdot d\vec{S} = -g(r) \int_S dS =$$

$$= -g(r)\, 4\pi r^2$$

Per il teorema di GAUSS

$$-g(r)\, 4\pi r^2 = -GM\, 4\pi$$

$$\Rightarrow g(r) = \frac{GM}{r^2}$$

come nel caso della Massa puntiforme

Quindi per $r \geq R$ $\quad \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{GM}{r^2}\hat{r}$

Per $r < R$?

La massa contenuta nella sfera di raggio $\tilde{r}$ $(\tilde{r} < R)$ è pari alla densità ρ per il volume $\frac{4}{3}\pi\tilde{r}^3$

$$\text{La densità} = \frac{\text{Massa Totale}}{\text{Volume Totale}} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \rho$$

$$\tilde{m}(r) = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$$

massa contenuta nella sfera di massa $\tilde{r}$

$$= \frac{M}{R^3} r^3$$

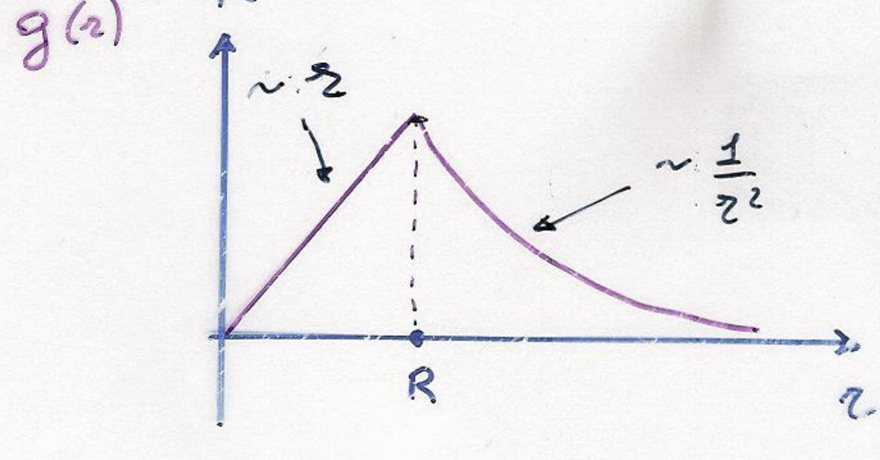
$$r < R \Rightarrow \vec{g}(\vec{r}) = -\frac{G\tilde{m}(r)}{r^2}\hat{r} =$$

$$= -\frac{GM}{r^2 R^3} r^3 \hat{r} = -\frac{GMr}{R^3}\hat{r} =$$

$$= -\frac{GM}{R^3}\vec{r}$$

la forza di gravità sulla massa m è quindi

$$\vec{f} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{r}$$



Il potenziale nel punto a distanza r $\Rightarrow$ $V = -\int \frac{GMm}{r^2}\hat{r}\, d\vec{r} = \frac{GMm}{r} + cost$

per $r = \infty$ $V = 0 \Rightarrow cost = 0$

L'energia potenziale che compete al corpo di massa m a distanza r dal centro della Terra $r = R_{Terra} + h$

$$U = -V = -\frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{(R_T + h)}$$

Se il corpo di massa m ha una velocità v, la sua Energia mecc. totale

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r} \begin{cases} >0 \\ =0 \\ <0 \end{cases}$$

!! Se $E < 0$ $|K| < |U|$ il corpo non può sfuggire al campo gravitazionale

sistema legato

Se $E > 0$ $|K| > |U|$

il corpo m può sfuggire al campo attrattivo

Se $E = 0$ $\Rightarrow$ condizione limite

$$\frac{1}{2}mv_{lim}^2 = \frac{GMm}{R_T} \Rightarrow v_{lim} = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$

tale velocità limite è indipendente dalla massa del corpo in esame.

$M = 5.97 \cdot 10^{24}$ Kg $G = 6.66 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{Kg^2}$ $R_T = 6.3 \cdot 10^6$ m

$v_{lim} = 11'200$ m/s $= 40'000$ Km/h

Come si passa da $\vec{f} = -\frac{mMG}{r^2}\hat{r}$ alla forza peso ($\vec{f}_p = m\vec{g}$) ?

173

In prossimità della superficie terrestre

$r = R_T + h$ $\qquad \vec{f} = -\frac{GMm}{(R_T+h)^2}\hat{r} = -\frac{GMm}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2}$

evidentemente $\frac{h}{R_T} \ll 1$ quindi

potremmo indicare $\quad x = \frac{h}{R_T} \ll 1$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2}$$

Quanto vale $(1+x)^{-2}$ sapendo che $x \simeq 0$?

$f(x) = (1+x)^{-2}$ $\qquad$ per definizione di

differenziale $\qquad df(x) = f'(x) \cdot dx$

$$\Downarrow$$

$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x$$

si può calcolare la variazione di

$f(x)$ (attorno al valore $f(x) = 1$)

quando x varia attorno al valore $x = 0$

conoscendo la derivata di $f(x)$ in $x = 0$

in generale $\qquad \Delta f(x) = f'(x_0)(x - x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

nel nostro caso $\qquad f'(x_0) = \left[\frac{d}{dx}(1+x)^{-2}\right]_{x=0} =$

$$= \left[-2(1+x)^{-3}\right]_{x=0} = -2$$

Quindi nell'intorno di $x_0 = 0$ dove $f(x_0) = 1$

$$f(x) = \underset{1}{f(x_0)} + \underset{-2}{f'(x_0)}\,(\underset{\frac{h}{R_T}}{x} - \underset{0}{x_0})$$

$$\vec{f}(x) = \frac{-GMm\hat{r}}{R_T^2\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^2} \simeq -\frac{GMm}{R_T^2}\cdot\left(1 - 2\frac{h}{R_T}\right) = m\vec{g}_0\left(1-\frac{2h}{R_T}\right)$$

dove $\vec{g}_0 = -\text{Cost}\,\hat{r} = -\frac{GM}{R_T^2}\hat{r}$

$$\vec{f}_0 = m\vec{g}_0 \quad \text{per } h=0$$

$|\vec{f}| \neq |\vec{f}_0|$ quando $h \neq 0$

$$R_T = 6.37\cdot 10^6\ m$$

se ci si sposta di $3\,Km = h$

$$g(h) = |\vec{g}_0|\left(1 - \frac{2\cdot 3\cdot 10^3}{6.37\cdot 10^6}\right) \simeq |\vec{g}_0|\left(1-10^{-3}\right)$$

$$= g_0 = \frac{GM}{R_T^2} = \frac{6.66\cdot 10^{-11}\cdot 5.97\cdot 10^{24}}{(6.37)^2\cdot 10^{12}} =$$

$$\simeq 9.81\ m/s^2$$

Analogamente a quanto abbiamo fatto per verificare che sulla superficie terrestre

$$|\vec{f}| = \frac{GMm}{(R_T+h)^2} \Rightarrow \approx f = mg$$

con $g = \frac{GM}{R_T^2}$ e $h \ll R_T$

possiamo ricavare l'energia potenziale del campo di forze gravitazionale partendo da

$$U = -\frac{GMm}{R_T} = U(0) \leftarrow$$ energia potenziale per $h=0$

$$U(h) = -\frac{GMm}{R_T+h} = -GMm(R_T+h)^{-1}$$

$$= -\frac{GMm}{R_T}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1}$$

per $\frac{h}{R_T} \approx 0 \Rightarrow \left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1} \Rightarrow$ sviluppo in serie di potenze

$$f(x) = (1+x)^{-1} \qquad (x \simeq 0)$$

$$f(x) - f(x=0) = \Delta f = \left[f'(x)\right]_{x=x_0}(x-x_0)$$

$$\left[f'(x)\right]_{x=x_0} = \left[-1(1+x)^{-2}\right]_{x=x_0=0} = -1$$

$$f(x=x_0=0) = 1$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)_{x=0}(x-x_0) = 1 - 1\cdot x$$

nel nostro caso $U(h) = -\frac{GMm}{R_T}\left(1+\frac{h}{R_T}\right)^{-1} = -\frac{GMm}{R_T}\left(1-\frac{h}{R_T}\right)$

$$U(h) = \frac{GMmh}{R_T^2} - \frac{GMm}{R_T} = \frac{GM}{R_T^2}mh + cost = mgh + cost$$