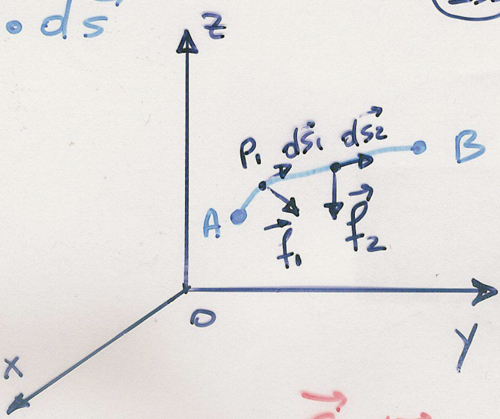
Lavoro di una forza - Integrale di linea

Lavoro elementare $dL = \vec{f} \cdot d\vec{s}$



$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s}$$

L'integrale è compiuto lungo il percorso, integrale di linea della forma differenziale $\vec{f} \cdot d\vec{s}$

DOBBIAMO CONOSCERE $\vec{f} \equiv \vec{f}(x, y, z) \equiv \vec{f}(\vec{r})$

CAMPO DI FORZE: una regione di spazio in cui per ogni punto possiamo definire la $\vec{f} \equiv \vec{f}(\vec{r}, t)$

$$\begin{cases} f_{p_x} \equiv f_1(x, y, z, t) \\ f_{p_y} = f_2(x, y, z, t) \\ f_{p_z} = f_3(x, y, z, t) \end{cases}$$

se $\vec{f} \equiv \vec{f}(\vec{r})$ NON DIPENDE DAL TEMPO

CAMPO DI FORZE STAZIONARIO

Per un campo stazionario

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B \underbrace{\left(f_x(x, y, z)\, dx + f_y(x, y, z)\, dy + f_z(x, y, z)\, dz \right)}_{\text{forma differenziale lineare}}$$

Conoscendo $\vec{f} \equiv \vec{f}(\vec{r})$ il campo

$\vec{r} \equiv \vec{r}(t)$ la legge oraria del moto

possiamo calcolare l'integrale di linea

Supponiamo che in una regione di spazio agisca un campo di forze definito da

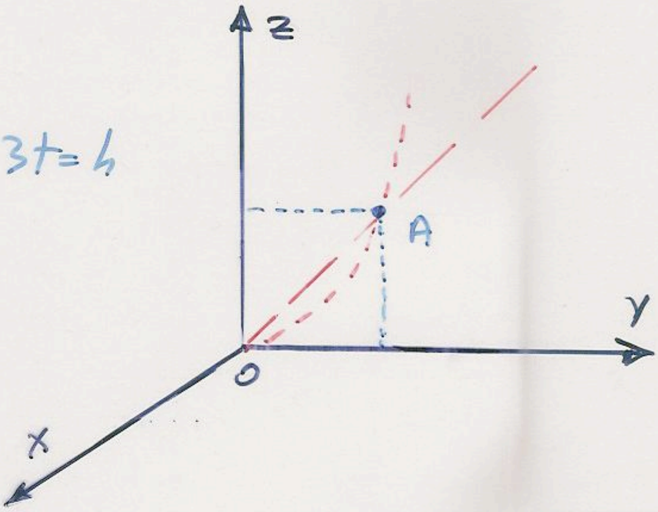
$$\begin{cases} f_x = 2x + z \\ f_y = y \\ f_z = 3y \end{cases}$$

Calcolare il lavoro compiuto dalla forza del campo per andare dall'origine al punto $A \equiv (0,1,1)$ compiendo una traiettoria rettilinea o parabolica

LEGGE ORARIA DEL MOTO

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 3t \end{cases} \qquad \begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = 3t \\ z(t) = 9t^2 \end{cases}$$

dobbiamo calcolare le traiettorie. Chiamiamo $3t = h$



retta : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 3t = h \\ z = y = h \end{cases}$

parabola : $\begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = y^2 = h^2 \end{cases}$

Dobbiamo calcolare $L = \int_0^A dL = \int_0^A \vec{f} \cdot d\vec{s} =$

$$L = \int_0^A \left(f_x(x,y,z)\,dx + f_y(x,y,z)\,dy + f_z(x,y,z)\,dz \right)$$

calcoliamo intanto dx, dy, dz

$h = 3t$ retta $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dh \\ dz = dh \end{cases}$

parabola $\begin{cases} dx = 0 \\ dy = dh \\ dz = 2h\, dh \end{cases}$

possiamo ora calcolare l'integrale di linea

PERCORSO RETTILINEO $L_{OA} = \int_0^1 \cancel{(2x+z)\cdot 0} + h \cdot dh + 3h\, dh =$

$$= \int_0^1 4h\, dh = 4\left[\frac{1}{2}h^2\right]_0^1 = 4\left[\frac{1}{2} - 0\right] = 2$$

PERCORSO PARABOLICO $L_{OA} = \int_0^1 \cancel{(2x+z)\cdot 0} + h\, dh + 3h \cdot 2h\, dh =$

$$= \int_0^1 h\, dh + 6\int_0^1 h^2 dh = \left[\frac{1}{2}h^2 + \frac{6}{3}h^3\right]_0^1 =$$

$$= \left[\frac{1}{2} + 2\right] = \frac{5}{2}$$

IL lavoro compiuto da tale campo di forza dipende dal percorso compiuto. Ciò è vero in generale.

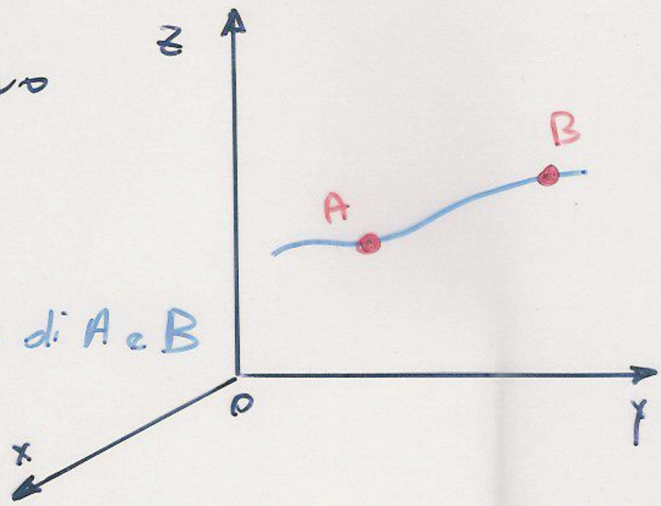
Inoltre si può ridurre l'integrale di linea all'integrazione di una funzione di un solo parametro.

Se il lavoro compiuto dal campo di forze dipende solo dai punti estremi della traiettoria (e non dalla traiettoria)

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = F(A,B)$$

ALLORA IL CAMPO DI FORZA SI DICE CONSERVATIVO

PER ESSERE CONSERVATIVO un campo di forze deve essere STAZIONARIO (condizione necessaria ma non sufficiente)



Se il campo è conservativo

$$L_{AB} = F(A,B) = V(B) - V(A)$$

V = funzione delle coordinate di A e B

$$L_{OA} = f(O,A)$$
$$L_{OB} = f(O,B) \qquad L_{OB} = L_{OA} + L_{AB}$$

$$L_{AB} = L_{OB} - L_{OA} = f(O,B) - f(O,A) = V(B) - V(A)$$

IL PUNTO O è arbitrario!

IL POTENZIALE È DEFINITO A MENO DI UNA COSTANTE ADDITIVA

rappresenta il lavoro per spostare il punto materiale da O a B

$V(P) \equiv V(x_P, y_P, z_P)$ funzione POTENZIALE del campo di forze conservativo

In un campo di forze conservativo quindi

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = V(B) - V(A)$$

se $A \equiv B$ (percorso chiuso) $\Rightarrow L = 0$!

QUALI SONO LE PROPRIETÀ DELLA FUNZIONE POTENZIALE PER CAMPI CONSERVATIVI ?

$$V \equiv V(x_P, y_P, z_P)$$

QUANTO VARIA V per uno spostamento dx, dy, dz ?

Dobbiamo definire la variazione di $V(P)$ per dx, dy, dz

Per funzioni di 1 variabile $f = f(x)$

$$df = f'(x)\, dx = \frac{df(x)}{dx} \cdot dx$$

Se $f = f(x, y, z)$ la variazione totale di f è la somma delle variazioni che la $f(x, y, z)$ subisce per variazioni infinitesime delle variabili indipendenti

dV = diff. totale di $V(x, y, z)$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right) dz$$

indica la derivata "parziale" della funzione $V(x, y, z)$ rispetto alla variazione della variabile x considerando costanti le variabili y e z

La quantità $\frac{\partial V}{\partial x}$ è una funzione ancora di x, y, z (in generale) quindi può essere ancora derivata rispetto ad $x \Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$

o $y \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial x}$

DERIVATE SECONDE MISTE

o $z \Rightarrow \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial x}$

IN GENERALE, SOTTO CONDIZIONI MOLTO VASTE, LE DERIVATE SECONDE MISTE SONO INDIPENDENTI DALL'ORDINE DI DERIVAZIONE (TEOREMA DI SCHWARTZ)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \quad ; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} \quad \text{etc..}$$

CI ERAVAMO CHIESTI: SOTTO QUALI CONDIZIONI

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \int_A^B f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = V(B) - V(A)$$

l'integrale è funzione solo degli estremi ed è indipendente dal cammino percorso?

Se esiste una funzione $V(x, y, z)$ tale che

$\vec{f} \equiv (f_x, f_y, f_z)$ $\qquad f_x = \frac{\partial V}{\partial x} \quad ; \quad f_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad ; \quad f_z = \frac{\partial V}{\partial z}$

La forma $f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$ = DIFFERENZIALE ESATTO

SE LA $V(x, y, z)$ soddisfa anche il teorema di Schwartz L_{AB} dipende solo dagli estremi

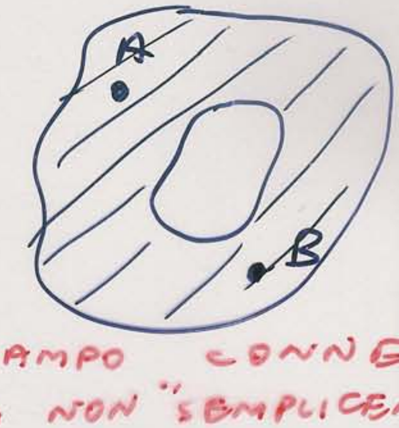
Condizione necessaria e sufficiente affinché

$$\int_A^B f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz = \int_A^B \left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right] =$$

$$= \int_A^B dV = V(B) - V(A)$$

1) Le funzioni $f_x(x,y,z)$, $f_y(x,y,z)$, $f_z(x,y,z)$ tali che $\vec{f} \equiv \vec{f}(x,y,z) \equiv (f_x, f_y, f_z)$ sono definite in un campo semplicemente connesso

CAMPO NON CONNESSO



CAMPO CONNESSO MA NON "SEMPLICEMENTE CONNESSO"

2) $\frac{\partial f_x}{\partial y} = \frac{\partial f_y}{\partial x}$; $\frac{\partial f_y}{\partial z} = \frac{\partial f_z}{\partial y}$; $\frac{\partial f_z}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial z}$

Se le condizioni 1) e 2) sono verificate infatti esiste una funzione V tale che

$\frac{\partial V}{\partial x} = f_x$; $\frac{\partial V}{\partial y} = f_y$; $\frac{\partial V}{\partial z} = f_z$ in modo tale che

$\left[\frac{\partial V}{\partial x}dx + \frac{\partial V}{\partial y}dy + \frac{\partial V}{\partial z}dz\right]$ sia un differenziale esatto

Calcoliamo ora l'integrale

$$L_{AB} = \int_A^B f_x\, dx + f_y\, dy + f_z\, dz$$

per un campo di forze conservativo

•) IL CAMPO DI FORZE USATO NELL'ESEMPIO PRECEDENTE

$$\vec{f} \equiv (f_x, f_y, f_z) \text{ con } \begin{cases} f_x = 2x + z \\ f_y = y \\ f_z = 3y \end{cases}$$

NON È CONSERVATIVO : L_{AB} dipendeva dal cammino percorso !

Non è soddisfatta infatti la condizione della eguaglianza delle derivate parziali miste

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} \quad \text{O.K} \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial z} = 0 \neq \dfrac{\partial f_z}{\partial y} = 3 \\ \dfrac{\partial f_x}{\partial z} = 1 \neq \dfrac{\partial f_z}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

Costruiamo allora un campo di forze conservativo ....

Supponiamo di avere in generale

$$\begin{cases} f_x = a \cdot x + b \cdot y \\ f_y = c \cdot z + d \cdot x \\ f_z = e \cdot x + h \cdot y \end{cases}$$

Quali dovranno essere le relazioni fra a, b, c, d, e, h affinche' il campo sia conservativo?

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = b \\ \dfrac{\partial f_y}{\partial x} = d \end{cases} \Rightarrow b = d \qquad \forall\, b$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial x} = e \end{cases} \Rightarrow e = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_y}{\partial z} = c \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial y} = h \end{cases} \Rightarrow c = h \qquad \forall\, c$$

Quindi il campo $\begin{cases} f_x = a \cdot x + b \cdot y \\ f_y = c \cdot z + b x \\ f_z = c \cdot y \end{cases}$

e' un campo conservativo

calcoliamo l'integrale $L_{AB} = \int_0^A f_x dx + f_y dy + f_z dz$

con $A \equiv (0, 1, 1)$ considerando i due percorsi già descritti : retta , parabola

- RETTA -

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = y = h \end{cases}$$

equazione oraria (velocità $v_{y,z} = 1$ m/s)

traiettoria calcolata al tempo $t = h$

$\Downarrow$

$dx = 0$
$dy = dh$
$dz = dh$

- PARABOLA -

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = h^2 \end{cases}$$

$\left(\begin{array}{l} v_y = 1 \text{ m/s} \\ a_z = 2 \text{ m/s}^2 \end{array} \right)$ equazione oraria

traiettoria al tempo $t = h$

$\Downarrow$

$dx = 0$
$dy = dh$
$dz = 2h\,dh$

RICORDIAMO

$\Downarrow$

$$\begin{cases} f_x = a \cdot x + b \cdot y \\ f_y = c \cdot z + b \cdot x \\ f_z = c \cdot y \end{cases}$$

RETTA $\Rightarrow$ $L_{OA} = \int_0^A (a \cdot x + b y)\, dx + (c \cdot z + b \cdot x)\, dy + (c \cdot y)\, dz$

$= \int_0^1 (c \cdot h + b \cdot 0)\, dh + (c \cdot h)\, dh = 2c \int_0^1 h \cdot dh = c \cdot \left[h^2 \right]_0^1$

$= c$

PARABOLA $\Rightarrow$ $L_{OA} = \int_0^h (c\, h^2 + b \cdot 0)\, dh + (c \cdot h)\, 2 \cdot h \cdot dh =$

$= 3c \int_0^1 h^2\, dh = c \left[h^3 \right]_0^1 = c$! c.v.d.

Tale risultato non è dovuto alla scelta particolare del punto A.

Prendiamo il punto $B \equiv (0, 2, 4)$ raggiunto quando $t = 2\,s$ quando il punto è in moto sulla parabola. A tale punto si arriva anche con un moto rettilineo sulla traiettoria data da

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 2 \cdot t \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = h \\ z = 2y = 2h \end{cases} \Leftarrow \text{traiettoria.}$$

$$\begin{pmatrix} v_y = 1\,m/s \\ v_z = 2\,m/s \end{pmatrix} \qquad \Downarrow$$

$$dx = 0 \; ; \; dy = dh \; ; \; dz = 2 \cdot dh$$

RETTA $\Rightarrow$ $$L_{AB} = \int_0^2 (c \cdot 2h + b \cdot 0)\,dh + (c \cdot h)\,2 \cdot dh =$$

$$= 4c \int_0^2 h \cdot dh = 4c \left[\frac{1}{2} h^2\right]_0^2 = 8c$$

PARABOLA $\Rightarrow$ $$L_{AB} = c\left[h^3\right]_0^2 = 8c \; !$$ c.v.d.

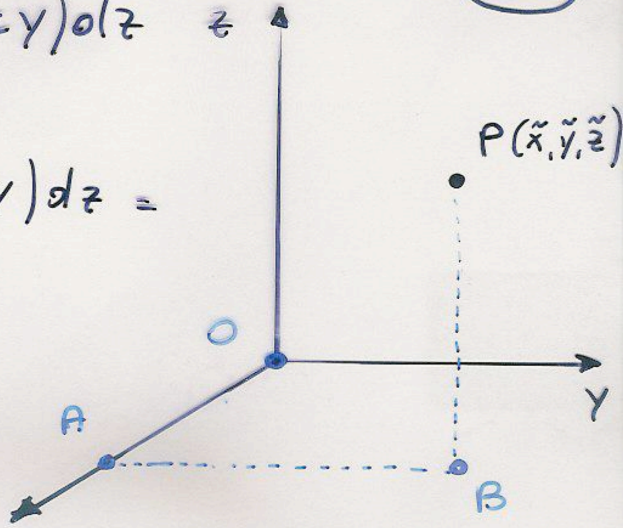
possiamo ora ricavare la funzione potenziale.

Calcoliamo l'integrale $$L_{OP} = \int_O^{P \equiv P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})} f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

fra l'origine ed un punto generico $P \equiv P(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$. IL campo è conservativo quindi

$$L_{OP} = V(P) - V(O) = V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - V(0,0,0)$$

$$L_{OP} = \int_0^{P(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})} (a \cdot x + by)\,dx + (cz + bx)\,dy + (cy)\,dz$$



$$= \int_0^A (ax + by)\,dx + \int_A^B (cz + bx)\,dy + \int_B^P (cy)\,dz =$$

nel tratto OA il valore $y = 0$
nel tratto AB il valore $z = 0$

$$= \int_0^{A(\tilde{x},0,0)} a \cdot x \cdot dx + \int_{A(\tilde{x},0,0)}^{B(\tilde{x},\tilde{y},0)} b \cdot x \cdot dy + \int_{B(\tilde{x},\tilde{y},0)}^{P(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})} c \cdot y \cdot dz =$$

$$= \left[\frac{1}{2} a x^2\right]_0^{\tilde{x}} + \left[b\tilde{x}y\right]_0^{\tilde{y}} + \left[c\tilde{y}z\right]_0^{\tilde{z}} =$$

$$= \frac{1}{2} a\tilde{x}^2 + b\tilde{x}\tilde{y} + c\tilde{y}\tilde{z} = V(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) - V(0,0,0)$$

essendo $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ arbitrari

$$V(x,y,z) = \frac{1}{2} a x^2 + bxy + cyz + V(0,0,0)$$

costante ad es $V(0,0,0) = 0$

La funzione potenziale e' quindi determinata a meno di una costante additiva.

Si verifica

$$f_x = \frac{\partial V}{\partial x} = ax + by$$

$$f_y = \frac{\partial V}{\partial y} = bx + cz$$

$$f_z = \frac{\partial V}{\partial z} = cy$$

Abbiamo visto che per qualsiasi campo di forze

$$L_{AB} = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = K_B - K_A$$

per un campo di forze conservativo inoltre

$$L_{AB} = V_B - V_A$$

Quindi per un campo di forze conservativo

$$K_B - K_A = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = V_B - V_A$$

o anche

$$K_B - V_B = K_A - V_A = \text{cost} \quad \left(\begin{array}{l} \forall \text{ punto} \\ \text{del campo} \\ \text{conservativo} \end{array} \right)$$

energia cinetica nel punto B — potenziale del campo di forze nel punto B

Introduciamo $U(x,y,z) = -V(x,y,z)$

$$\begin{cases} f_x = -\dfrac{\partial U}{\partial x} \\ f_y = -\dfrac{\partial U}{\partial y} \\ f_z = -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{cases}$$

ENERGIA POTENZIALE — POTENZIALE DEL CAMPO

$$K_B + U_B = K_A + U_A = \text{cost}$$

ENERGIA CINETICA + ENERGIA POTENZIALE = ENERGIA MECCANICA TOTALE = cost

VALIDO PER UN CORPO IN MOTO IN UN CAMPO DI FORZE CONSERVATIVO

Il campo di forze gravitazionale è conservativo?

$$f_x = 0 \quad ; \quad f_y = 0 \quad ; \quad f_z = -mg$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_x}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial f_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial x} = 0 = \dfrac{\partial f_x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial f_z}{\partial y} = 0 = \dfrac{\partial f_y}{\partial z} \end{cases}$$

$$\vec{f} = \vec{i} f_x + \vec{j} f_y + \vec{k} f_z = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z) + \vec{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial V}{\partial z}$$

$$= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left(-U(x,y,z)\right) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \left(-U(x,y,z)\right) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \left(-U(x,y,z)\right)$$

Quanto vale l'energia potenziale per il campo gravitazionale

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -f_x = 0 \quad ; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -f_y \; ; \; \frac{\partial U}{\partial z} = -f_z = mg$$

$$U(P) - U(O) = \int_{O(0,0,0)}^{P(x,y,h)} mg \, dz = mgh$$

$$U(P) = mgh + U(O)$$

COSTANTE ADDITIVA ARBITRARIA

AD ES $h=0 \Rightarrow U=0$

Abbiamo detto che il differenziale totale del potenziale $V(x,y,z)$ è

$$\underbrace{dV}_{\text{scalare}} = \frac{\partial V}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y}\cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z}\cdot dz$$

abbiamo anche visto che

$$\underbrace{\vec{f}}_{\text{vettore}} = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} V(x,y,z) + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} V(x,y,z) + \vec{K}\frac{\partial}{\partial z} V(x,y,z)$$

SCALARE

possiamo introdurre un nuovo operatore, L' operatore vettoriale gradiente $\equiv \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x};\ \vec{j}\frac{\partial}{\partial y};\ \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \Leftrightarrow \vec{\nabla}$

VA APPLICATO AD UNO SCALARE

in modo che

PRODOTTO SCALARE

$$dV = \underbrace{\vec{\nabla} V}_{\text{vettore}} \cdot \underbrace{d\vec{z}}_{\text{vettore}}$$

$$\vec{f} = \vec{\nabla} V = -\vec{\nabla} U$$

OPERATORE GRADIENTE

POTENZIALE

ENERGIA POTENZIALE