Prova scritta di Fisica 2 4.11.2011

Esercizio n.1 **[10 punti]**

Tre cariche puntiformi sono disposte lungo l'asse y: una carica **q** in **y=a**, una carica **-2q** nell'origine e una carica **q** in **y=-a**.
1)Trovare l'espressione del potenziale e del campo elettrico nell'approssimazione di quadrupolo o di due dipoli (a scelta), nei punti dell'asse y in cui **y>a,** e calcolarne il valore per **y=2a**.
2) Determinare, nel caso in cui **y>>a,** il valore minimo di y per cui la differenza percentuale fra il potenziale calcolato precedentemente ed il potenziale calcolato esplicitamente come somma dei potenziali creati dalle tre cariche, risulta minore dell'1% (0,01).

*Dati: **q = 0,1 μC , a= 4 cm***

Soluzione

Approssimazione di quadrupolo

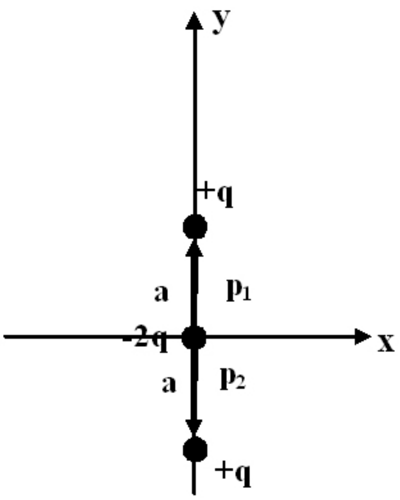
Il potenziale è $V(\bar{r}) = k\dfrac{Q(\hat{r})}{r^3}$ dove $Q = \sum q_i\left[\dfrac{3}{2}(\bar{r}_i \cdot \hat{r})^2 - \dfrac{r_i^2}{2}\right]$ e $k = 1/4\pi\varepsilon_0$

Quindi risulta $V_Q(y) = k\dfrac{2qa^2}{y^3}$ e $E_Q(y) = -\dfrac{\partial}{\partial y}V(y) = k\dfrac{6qa^2}{y^4}$

Per y=2a si ha: $V(2a) = k\dfrac{q}{4a} = 5{,}62\cdot 10^3\ V$; $E(2a) = k\dfrac{3q}{8a^2} = 2{,}1\cdot 10^5\quad V/m$

Approssimazione di dipolo

Il sistema può essere visto come la somma di due dipoli p_1 e p_2 centrati rispettivamente in ***y=a/2*** e **y=-a/2** , e di modulo ***p=aq***.
Il potenziale di un dipolo a distanza r è $V(r) = k\dfrac{\bar{p}\cdot\bar{r}}{r^3}$ da cui si può calcolare il potenziale sull'asse y dovuto ai due dipoli: $V_d(y) \cong k\dfrac{2qa^2}{y^3}\left(1+\dfrac{a^2}{2y^2}\right)$, il termine correttivo fra parentesi in y=2a vale: $\left(1+\dfrac{a^2}{2y^2}\right) = \left(1+\dfrac{1}{8}\right) = 1{,}125$ da cui ***V(2a)=6,32 10³ V***



Calcolo esatto con tre cariche

$$V_e(y) = kq\left(\frac{1}{y-a} - \frac{2}{y} + \frac{1}{y+a}\right) \cong k\frac{2qa^2}{y^3}\left(1+\frac{a^2}{y^2}\right)$$

I valori di y perché sia $\dfrac{V_{Q,d} - V_e}{V_e} \le 0{,}01$ sono: **y>10a** nel caso dell'approssimazione di quadrupolo e **y>7a** nel caso dell'approssimazione di dipolo.

Esercizio n.2 **[10 punti]**

Due cilindri concentrici e coassiali **a** e **b**, di raggio r_a e r_b ed altezza h, hanno lo spazio fra i due riempito di un dielettrico con costante dielettrica relativa ε_r. Esternamente c'è il vuoto. Sulla superficie del cilindro interno è presente una densità carica superficiale costante σ_a. La densità di carica superficiale sul cilindro esterno è tale che i campi D ed E sono nulli dappertutto eccetto che fra le due superfici cilindriche. Calcolare la densità di carica superficiale presente sul cilindro esterno e calcolare esplicitamente l'espressione ed il valore della capacità del sistema considerato.

Dati: $r_a = 1\ cm$, $r_b = 2\ cm$, $h = 10\ cm$, $\sigma_a = 40\ pC/m^2$, $\varepsilon_r = 1{,}25$.

Soluzione

Se i campi D ed E esternamente sono nulli vuol dire che la somma delle cariche libere e di polarizzazione sono nulle, quindi il cilindro esterno ha carica uguale e contraria al cilindro interno, si ha cioè un'induzione completa ed il sistema forma un condensatore ideale.
La condizione che le cariche siano uguali e contrarie [$Q_a = -Q_b$] si scrive:

$$2\pi r_a \cdot h\sigma_a = -2\pi r_b \cdot h\sigma_b \quad \text{da cui} \quad \sigma_b = -\frac{r_a}{r_b}\sigma_b = -20\ pC/m^2$$

All'interno dei due cilindri, ad una distanza r dall'asse, utilizzando il teorema di Gauss si ha:

$$\phi_r(\overline{D}) = Q_i \quad \text{, quindi} \quad D(r)\,2\pi r h = \sigma_a\, 2\pi r_a h \quad \text{da cui} \quad D(r) = \sigma_a \frac{r_a}{r}$$

La differenza di potenziale fra i due cilindri è:

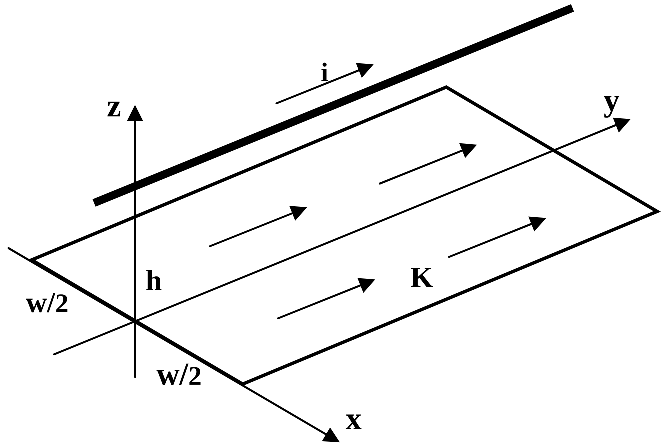
$$V(b) - V(a) = \int_a^b \overline{E}\cdot d\overline{r} = \int_a^b \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r}dr = \int_a^b \frac{r_a\,\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{dr}{r} = \frac{r_a\,\sigma_a}{\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{r_b}{r_a} = \frac{10^{-2}\cdot 40\cdot 10^{-12}}{8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}25}\ln 2 = 2{,}5\cdot 10^{-2}\ V$$

Il valore della capacità è quindi:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi r_a\, h\sigma_a}{V(b) - V(a)} = \frac{2\pi\varepsilon_0\,\varepsilon_r h}{\ln r_b/r_a} = \frac{2\pi\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}25\cdot 0{,}1}{\ln 2} = 0{,}1\cdot 10^{-10}\ F = 10\ pF$$

Esercizio n.3 **[10 punti]**

Un filo conduttore è percorso da una corrente ***i*** parallela ad una striscia sottile, larga ***w,*** percorsa da una densità di corrente ***K***. La distanza fra i due corpi è ***h***. Scrivere la forza per unità di lunghezza che si esercita sulla striscia (modulo e direzione), calcolarla per ***w=2h*** e nel caso che la larghezza **w** della striscia vada all'infinito.



Dati: ***i=0,2A , K= 300 mA/cm , w= 20cm ,***

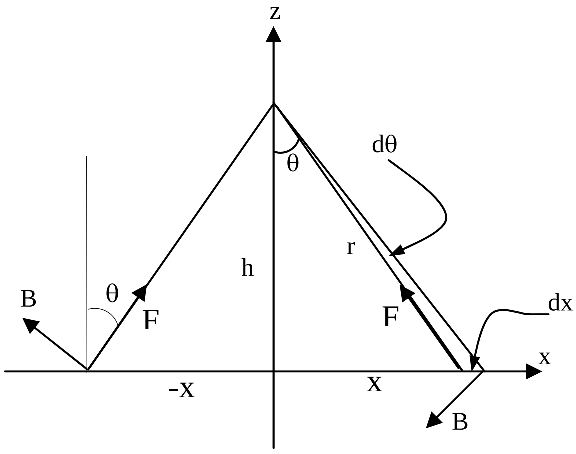
Soluzione

Il campo B creato dalla corrente I, a distanza r dal filo é $B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}$ in direzione normale ad r e verso orario. La forza dF che si esercita sulla striscia, per una lunghezza L, ed una larghezza dx, nel punto x è: $d\overline{F} = di \cdot \overline{L} \times \overline{B}$ dove ***di=Kdx*** è l'elemento di corrente che scorre attraverso una larghezza ***dx*** della striscia. Per ogni elemento ***dx*** in **x,** ce n'è uno simmetrico in **–x** e la somma delle due forze (dirette secondo r) ha come risultante la somma delle componenti z [vedi figura].

L'elemento dx è $dx = \frac{r\,d\theta}{\cos\theta}$. La componente z della forza dovuta ad ogni coppia in x, -x sarà quindi:

$$\frac{dF_z}{L} = 2\cdot K\,dx\cdot B\cos\theta = 2K\frac{r\,d\theta}{\cos\theta}\frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}\cos\theta = k\frac{\mu_0 i\cdot d\theta}{\pi}$$

$$\frac{F_z}{L} = \int_0^{\theta_{max}} K\frac{\mu_0}{\pi}i\,d\theta = \frac{K\mu_0 i}{\pi}arctg\frac{w}{2h}$$



che per i valori indicati diventa:

$$\frac{F_z}{L}(w=2h) = \frac{K\mu_o i}{4} = \frac{30\cdot 4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 0,2}{4} = 1,88\cdot 10^{-6}\ Nm^{-1}$$

$$\frac{F_z}{L}(w\to\infty) = \frac{K\mu_o i}{2} = 3,77\cdot 10^{-6}\ Nm^{-1}$$