Esercizio n.1 [9 punti]

Si supponga di avere una sfera di raggio ***R***, carica con densità di carica di volume ρ positiva e costante. Un elettrone, provenendo dall'esterno, penetra radialmente dentro la sfera. 1) Si calcoli il campo elettrico dentro la sfera. 2) Si giustifichi il fatto che l'elettrone, dentro la sfera, si muove di moto armonico con frequenza ***f***. scrivendone l'espressione. 3) Si calcoli la carica totale posseduta dalla sfera.

Dati: *R* = 50 cm, *f=1kHz, e/m=1,76 · 10^{11} C/kg.*

Soluzione

Il campo elettrico ell'interno della sfera si ottiene applicando il teorema di Gauss ad una sfera di raggio r:

$$\phi(\overline{E}) = \int_S \overline{E} \cdot \hat{n}\, dS = \sum Q_i \Big/ \varepsilon_0 \quad \text{, quindi} \quad 4\pi r^2 E(r) = \frac{4}{3\varepsilon_0}\pi r^3 \rho \quad \text{, da cui} \quad \overline{E}(r) = \frac{\rho \overline{r}}{3\varepsilon_0}$$

L'elettrone, all'interno della sfera, sarà soggetto alla forza $\overline{F}(e) = q\,\overline{E} = -e\frac{1}{3\varepsilon_0}\rho\,\overline{r}$.

La forza ***F*** è una forza di richiamo del tipo F = - Kx (forza elastica dovuta ad una molla) che produce, per la massa **m** collegata, un moto armonico di pulsazione $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$,che in questo caso si scrive : $\omega = \sqrt{\frac{e\rho}{3m\varepsilon_0}}$ essendo ***m*** la massa dell'elettrone.

O anche: l'equazione del moto per l'elettrone è $\overline{F} = m\,\overline{a}$, quindi $-\frac{e\rho}{3\varepsilon_0}\overline{r} = m\ddot{\overline{r}}$ e $\ddot{r} + \frac{e\rho}{3m\varepsilon_0}r = 0$ che è appunto l'equazione di un moto armonico per il corpo di massa ***m.***

La frequenza del moto sarà quindi $f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e\rho}{3m\varepsilon_0}}$ **,** da cui si può calcolare la densità di carica

$$\rho = 3(2\pi f)^2 \frac{m\varepsilon_0}{e}$$

La carica totale posseduta dalla sfera sarà quindi:

$$Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho = 2(2\pi R)^3 f^2 \frac{m\varepsilon_0}{e} = 3{,}1 \cdot 10^{-15}\ C$$

Esercizio n.2 [9 punti]

Un condensatore piano, le cui armature sono poste a distanza ***d***, ha una capacità C_0 quando fra le armature c'è dell'elio gas a bassa pressione (ε_r=1). Se il vuoto viene abbattuto ed il sistema portato a bassa temperatura, sulle facce del condensatore si deposita un sottile strato ***x*** di elio liquido di costante dielettrica relativa ε_{el}=1,01

Scrivere l'espressione della variazione percentuale δ della capacità del condensatore per ***x<<d***, disegnare l'andamento della funzione δ(x/d), e calcolare la variazione percentuale massima, quando tutto il condensatore è riempito di elio liquido.

Nota: la variazione percentuale δ di una grandezza è definita come $\delta = \frac{G_2 - G_1}{G_1}$

Soluzione

Il condensatore sotto vuoto, o con l'elio a bassa pressione fra le armature, ha una capacità $C_0 = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$,avendo indicato con **S** la superficie delle armature.

Una volta che le facce del condensatore sono coperte da uno strato ***x*** di elio liquido, il condensatore è equivalente a tre condensatori in serie, due di spessore x, uno di spessore (d-2x):

$$C^{-1} = C^{-1}(x) + C^{-1}(x) + C(d-2x) = \frac{2x}{\varepsilon_0 \varepsilon_{el} S} + \frac{d-2x}{\varepsilon_0 S} = \frac{1}{C_0 d} \frac{2x + \varepsilon_{el}(d-2x)}{\varepsilon_{el}}.$$

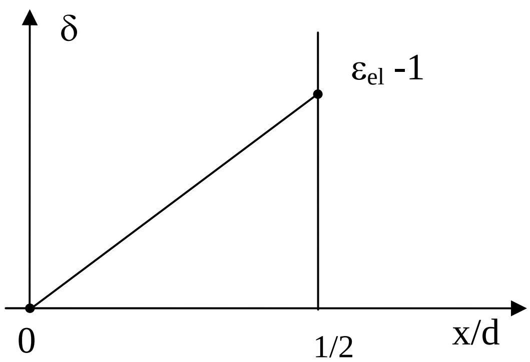
Da cui:

$$\delta(x/d) = \frac{C - C_0}{C_0} = \frac{d\varepsilon_{el}}{2x + \varepsilon_{el}(d-2x)} - 1 = \frac{\frac{2x}{d}\frac{\varepsilon_{el}-1}{\varepsilon_{el}}}{1 - \frac{2x}{d}\frac{\varepsilon_{el}-1}{\varepsilon_{el}}} \cong \frac{2x}{d}\frac{\varepsilon_{el}-1}{\varepsilon_{el}}$$

Avendo considerato che $\frac{\varepsilon_{el}-1}{\varepsilon_{el}} \cong 0{,}01$ e che $2x/d \leq 1$.

Quando tutto il condensatore è pieno di elio liquido si ha $x = d/2$, da cui si calcola il valore di $\delta(1/2) = \varepsilon_{el} - 1 = 0{,}01$, che coincide con il valore trovato inserendo per C il valore $C = \varepsilon_{el} C_0$.

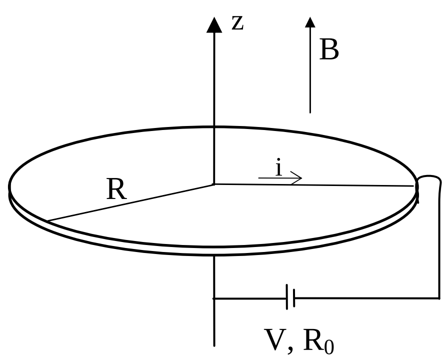
L'andamento della funzione è il seguente, con un andamento lineare fra 0 e 1/2, e il valore limite indicato per x/d=1/2.



Esercizio n.3 [12 punti]

Un sottile disco conduttore di raggio ***R***, imperniato su di un asse verticale intorno a cui può ruotare liberamente, è immerso in un campo magnetico ***B***, ortogonale al piano del disco, costante ed uniforme. Con un contatto strisciante è possibile fra passare una corrente radiale dall'asse del disco ad un punto agli estremi del disco, tramite un generatore di d.d.p. costante ***V*** (vedi figura). Tutto il circuito così formato ha resistenza R_0.

Al tempo t=0 il disco è fermo. In seguito al passaggio della corrente il disco inizia a ruotare con velocità angolare ω. Calcolare l'espressione del momento delle forze agenti rispetto all'asse di rotazione, e il valore massimo che assume il momento.



A regime, per t=∞, la velocità angolare assume il valore $\omega_f = \frac{2V}{BR^2}$. Calcolare in questo caso il valore della corrente che scorre nel circuito e giustificare il risultato ottenuto. Si trascurino gli attriti e l'induttanza del circuito.

Dati: R=10 cm ; B=2 T ; V=4 V ; R_0=4 Ω

Soluzione

Il segmento radiale che congiunge il centro del disco con il contatto esterno, essendo percorso da una corrente ed essendo immerso in un campo magnetico ***B***, è sotto posto ad una forza.

L'elemento infinitesimo ***dr***, distante ***r*** dal centro, sarà sottoposto alla forza tangenziale:

$\left|d\overline{F}\right| = i \cdot \left|d\overline{r} \times \overline{B}\right| = i\, dr\, B$ e quindi al momento $d\overline{M} = \overline{r} \times d\overline{F} = -i\, B\, r\, dr\ \hat{z}$. Il momento totale sarà quindi

$$\left|M\right| = \int_0^R dM = \frac{1}{2} i\, BR^2$$

Calcolo della corrente ***i*** che scorre nel circuito. In seguito alla rotazione del disco, tra l'asse ed il contatto esterno appare la f.e.m indotta ***f = - dϕ/dt.*** Il flusso infinitesimo dϕ, dovuto ad una rotazione infinitesima dθ sarà:

$d\phi = B\, dS = \frac{1}{2} R \cdot R d\theta \cdot B$ e la f.e.m. indotta: $f = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\frac{1}{2} R^2 d\theta \cdot B}{dt} = -\frac{1}{2} R^2 \omega B$

L'equazione del circuito sarà: $V + f = R_0\, i$ da cui $i = \frac{V}{R_0} - \frac{\omega R^2 B}{2R_0}$ e il momento totale:

$$M = \frac{1}{2} B R^2 \left(\frac{V}{R_0} - \frac{\omega R^2 B}{2R_0} \right) = \frac{B R^2}{2R_0} \left(V - \frac{\omega R^2 B}{2} \right)$$

Il valore massimo di ***M*** si ha per ω =0: $M(\max) = \frac{B R^2}{2R_0} V = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 4} \cdot 4 = 1 \times 10^{-2}\ Nm$

A regime, quando la velocità angolare è costante e vale ω_f, la corrente ***i*** sarà:

$$i = \frac{V}{R_0} - \frac{\omega_f\, R^2 B}{2R_0} = \frac{V}{R_0} - \frac{\frac{2V}{BR^2} R^2 B}{2R_0} = 0$$

Se la velocità angolare è costante vuol dire che il momento delle forze deve essere nullo, quindi anche la corrente deve essere nulla.