Prova scritta di Fisica 2 16.1.2012

Esercizio n.1 **[11 punti]**

Ad una sfera conduttrice di raggio $\boldsymbol{R_a}$ viene data una carica $\boldsymbol{Q_a}$. Intorno alla sfera c'è un guscio isolante di raggio interno $\boldsymbol{R_a}$, raggio esterno $\boldsymbol{R_b}$ e costante dielettrica ε_r . Scrivere l'espressione del campo elettrico e del potenziale elettrostatico in tutto lo spazio, calcolarli nei punti ***r= 0 ; R**$_a$* ***; R**$_b$* e disegnarne l'andamento.

Dati: $R_a = 1\ cm$, $R_b = 2\ cm$, $\varepsilon_r = 1{,}5$, $Q_a = 9\ 10^{-9}\ C$

La prima legge di Maxwell in forma integrale è $\phi(\overline{D}) = Q_{\text{int}}$ che, scritta nelle tre zone in cui è diviso lo spazio (0,1,2) diventa, tenendo conto che per la simmetria del problema i campi sono radiali:

$$r < R_a \qquad \phi(\overline{D}_0) = 0 \quad ; \quad D_0 = 0 \quad ; \quad E_0 = 0$$

$$R_a \le r < R_b \qquad \phi(\overline{D}_1) = Q_a \quad ; \quad D_1(r) = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \quad ; \quad E_1(r) = \frac{D_1(r)}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$$R_b \le r \qquad \phi(\overline{D}_2) = Q_a \quad ; \quad D_2 = \frac{Q_a}{4\pi r^2} \quad ; \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon_0} = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E_1(0) = 0 \quad ; \quad E_1(R_a) = 540\ kV/m \quad ; \quad E_1(R_b) = 135\ kV/m \quad ; \quad E_2(R_b) = 200\ kV/m$$

Per il calcolo del potenziale V(r):

$$r \le R_a \qquad V_0(r) = -\int^r E_0(r)dr = C_0 \qquad (1)$$

$$R_a \le r \le R_b \qquad V_1(r) = -\int^r E_1(r)dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r} + C_1 \qquad (2)$$

$$R_b \le r \qquad V_2(r) = -\int^r E_2(r)dr = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0 r} + C_2 \qquad (3)$$

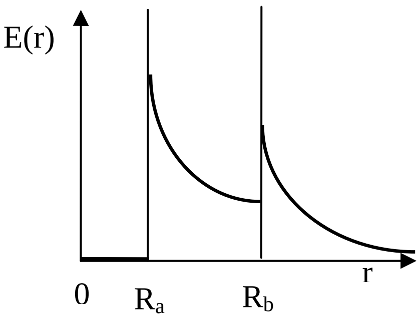
Da cui, imponendo che V(r) sia nullo all'infinito e la continuità di V(r) al passaggio da un mezzo all'altro, si ha:

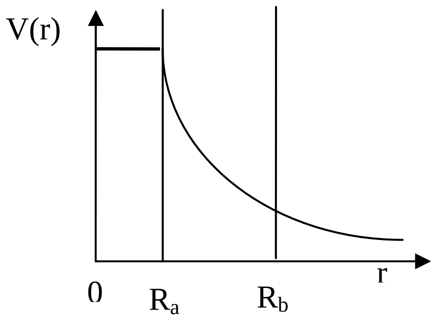
$$(3): \quad V_2(\infty) = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = 0$$

$$(3)\ e\ (2): \quad V_1(R_b) = V_2(R_b) \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{Q_a(\varepsilon_r - 1)}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_b} = \frac{9\cdot 10^{-9}(1{,}5-1)\cdot 9\cdot 10^{9}}{1{,}5\cdot 2\cdot 10^{-2}} = 1{,}35 \quad kV$$

$$(2)\ e\ (1): \quad V_0(R_a) = V_1(R_a) \quad \Rightarrow \quad C_0 = \frac{Q_a}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left[\frac{1}{R_a} + \frac{\varepsilon_r - 1}{R_b}\right] = 6{,}75 \quad kV$$

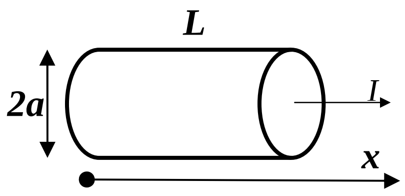
$$V(0) = 6{,}75 \quad kV \quad ; \quad V(a) = 6{,}75 \quad kV \quad ; \quad V(b) = 4{,}05 \quad kV$$





Esercizio n.2 [8 punti]

Un conduttore cilindrico di diametro ***2a*** e lunghezza ***L,*** con l'asse parallelo all'asse delle ***x***, è percorso da una corrente stazionaria ***I***. La resistività del conduttore varia linearmente lungo l'asse del cilindro secondo l'espressione $r(x)= r_1 + (r_2-r_1)\, x/L$ dove $0 \le x \le L$. Scrivere l'espressione della densità delle cariche di volume $\rho(x)$ e calcolarne il valore al centro del cilindro.



Dati: $a = 1\ mm$, $L = 1\ cm$, $r_1 = 1{,}5\ 10^{-8}\ \Omega m$, $r_2 = 2{,}5\ 10^{-8}\ \Omega m$, $I= \pi\ A$

Soluzione

Si chiede di calcolare la densità delle cariche di volume, che appare nella relazione: $div\overline{E} = \rho/\varepsilon_0$, quindi è necessario trovare un'espressione per il campo elettrico nel cilindro.
La resistività varia lungo l'asse x, ma è costante su ogni diametro del cilindro, quindi anche la densità di corrente $J = I/S = I/\pi a^2$ sarà costante sul diametro, e la si può scrivere in funzione del campo elettrico come:

$$\overline{E} = r\,\overline{J},\ E_x = r(x)J_x = [r_1 + (r_2 - r_1)x/L]\frac{I}{\pi a^2}$$

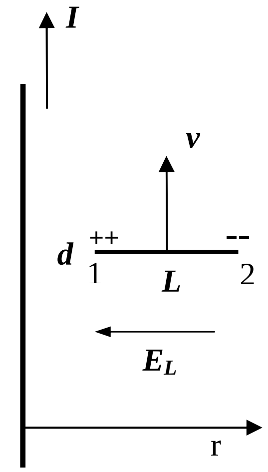
Riprendendo la relazione: $div\,\overline{E} = \rho/\varepsilon_0$ si ha: $\overline{E} = E_x\,\hat{x}\,;\, div\overline{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_0}$ da cui:

$$\rho(x) = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{r_2 - r_1}{\pi L a^2} I = \frac{8{,}85 \cdot 10^{-12}(2{,}5 - 1{,}5)10^{-8}}{\pi 10^{-2}\ \ 10^{-6}}\pi = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C/m^3$$

La densità è costante.

Esercizio n.3 [11 punti]

Un filo rettilineo indefinito è percorso da una corrente costante ***I.*** Una sbarra metallica, di lunghezza ***L***, e distante ***d*** dal filo, si muove ortogonalmente al filo con velocità costante ***v.*** Si calcoli la differenza di potenziale esistente ai capi della sbarretta.



Dati: ***I=50 A , L= 30 cm , d= 1 cm , v=20 m/s***

Soluzione

Il filo percorso dalla corrente I genera nello spazio un campo magnetico ***B*** le cui linee di forza sono circonferenze concentriche ortogonali al filo, con verso antiorario e di modulo:

$\boldsymbol{B(r)} = \dfrac{\mu_0\, I}{2\pi\, r}$, ***r*** essendo la distanza dal filo. Sulle cariche in movimento agisce la forza di Lorentz $\overline{F}_L = q\,\overline{v} \times \overline{B}$, in cui q rappresenta il valore delle cariche nel conduttore. Questa forza genera un campo elettromotore $\overline{E}_L = \dfrac{\overline{F}}{q} = \overline{v} \times \overline{B} = -vB(r)\hat{r}$. Questo campo non dipende dalla carica e non è costante lungo la sbarretta, dato che ***B*** varia con ***r.***

Il campo elettromotore separa le cariche, portandole verso gli estremi della sbarretta, fin quando non è bilanciato dal campo elettrostatico generato dalla distribuzione della cariche lungo la sbarretta. All'equilibrio si ha quindi:

$$\overline{E}(r) = -\overline{E}_L(r) = vB(r)\hat{r}$$

La differenza di potenziale tra gli estremi della sbarretta può essere calcolata, dalla definizione, come l'integrale del campo elettrostatico:

$$V_1 - V_2 = \int_1^2 \overline{E}(r)\cdot d\overline{r} = \int_d^{d+L} vB(r)dr = \int_d^{d+L} \frac{\mu_0 vI}{2\pi r}dr = \frac{\mu_0 vI}{2\pi}\ln\frac{d+L}{d} = \frac{4\pi\cdot 10^{-7}\cdot 20\cdot 50}{2\pi}\ln\frac{31}{1} = 0{,}66\ mV$$